500 World Famous

500个世界著名数学征解问题

Reader Solved Mathematics Problems

◎ 冯贝叶 编译



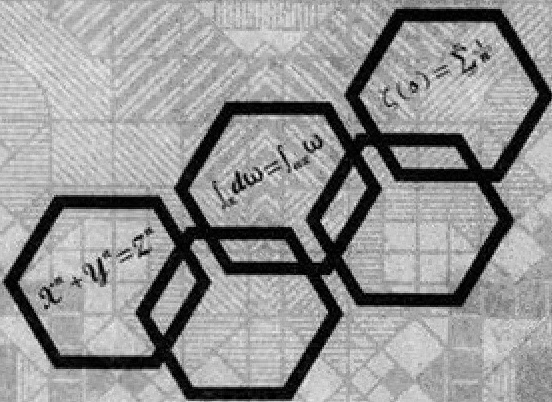
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

500 WORLD FAMOUS READER SOLVED MATHEMATICS PROBLEMS

500个世界著名

数学征解问题

冯贝叶 编译



哈尔滨工业大学出版社

内容简介

全书共分5章，涵盖了代数问题、几何问题、高等代数问题、初等数论问题、高等数学问题等内容，每章均包含了数例典型征解问题及解答。该书适合数学奥林匹克选手、教练员使用，也适合于大中院校师生及数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

500个世界著名数学征解问题/冯贝叶编译.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2009.4

ISBN 978-7-5603-2900-0

Ⅰ.5…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.数学问题　Ⅳ.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第061751号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张25　字数458千字
版　　次　2009年5月第1版　2009年5月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2900-0
印　　数　1～3 000册
定　　价　48.00元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

◎ 前　言

这是一本献给数学爱好者的课外参考书，其内容包括了代数、几何、高等代数、初等数论和高等数学五方面的500余道各式各样的问题和解答（本来是计划选500题的，然而选到500题时，已看到2000年，于是索性将现有的刊物看完，共得578道题）. 这些问题基本上是根据1956—2006《美国数学月刊》、《数学杂志》等刊物中的问题与解答专栏编写的，其中也有一些问题是根据杂志中的文章的内容编写的，个别问题则是编选者自己编写的. 在每道题目后面的括弧中都注明了这道题原来在《美国数学月刊》、《数学杂志》（缩写分别为AMM和MM）中的题号或编选者据以改编的文章.《美国数学月刊》和《数学杂志》也刊登历年以来的《普特南数学竞赛题及解答》，这其中也有不少值得收入的好题，但是由于哈尔滨工业大学出版社已另辑单本出版，所以本书未选收其中的题目.

《美国数学月刊》和《数学杂志》都是世界上著名的杂志，目前国内还没有同样性质的刊物. 几十年来，它们刊登了大量饶有兴趣、紧跟时代发展的数学文章和问题. 这些文章的深度大多可被具有高中至大学程度的读者所理解，且又与当时科学界所关心的热点和前沿问题有关，所以对一般读者起了普及和鸟瞰作用. 例如在19世纪30年代，一种俄罗斯十五方块游戏曾经风靡美国，《美国数学月刊》就曾专门刊登文章探讨其数学原理. 到了19世纪七八十年代，混沌的研究又在数学物理界掀起了热潮，这时《美国数学月刊》又刊登过李天岩的《周期3蕴含混沌》的著名文章，至今仍是混沌研究中的一篇重要文献. 而《数学杂志》也刊登了好几篇有关周期3窗口的发生参数和消失参数方面的文

章.再比如,数学历史上曾有过许多非常著名的结果——代数基本定理.把整数表示为平方和的定理、常微分方程的解对初值和参数的连续性定理等.这些结果当时发表时的证明一般都是比较专业,难以为一般读者所理解的.而《美国数学月刊》和《数学杂志》又不断地发表对这些老的著名结果的简单的、容易理解的新的证明.这就不难理解为什么《美国数学月刊》和《数学杂志》几十年来一直是极受读者欢迎的刊物了.然而由于内容繁多以及语言障碍,因此很有必要针对中国读者的需要,从中精选部分内容结为专辑以飨读者.

本书是给数学爱好者阅读的课外读物,它既不能代替基础训练.也不是专门为了考大学或研究生而编写的.所以对那些带着寻找敲门砖的目的而阅读本书的人来说,这本书肯定是会使他们失望的.但是另一方面,世界上的事情有时就是很奇妙的,所谓"有意种花花不活,无心栽柳柳成荫".如果你认真钻研过本书,那也真说不准在数学竞赛、高考、考研中会得到意想不到的好处.

那么什么人可以算是适合阅读本书的数学爱好者呢?这使我想到《一千零一夜》中的一个故事.其内容大意是说古代埃及有一个王子,生活过得十分优越,但是他又感到十分无聊,就决定四处游访,见识一下外面的世界.有一次,他来到一个寺院,发现寺院里的僧人的左眼都是瞎的,但是对他十分友好,拿出好吃的水果和吃食招待他,并邀请他在寺院里多住几日,与他们一起欣赏寺院的风景并互相讲各人的见闻,一起讨论问题.结果这个王子在寺院里住了一段时间后就发现,每月有一天,院里的僧人就用锅灰把脸抹黑,不吃不喝,号啕大哭,过了这一天,又一切正常.他就感到很奇怪,但是他问了好几次,那些僧人都不告诉他,并且劝他不要再问,否则这美好的日子就要过到头了.但是这样一来,越发增加了王子的好奇心,在他的一再追问下,那些僧人生气了,对他说,既然你不听我们的劝告,你就等着倒霉吧.到了第二天,这些僧人用一张牛皮把他裹起来,并交给他一把刀,又在牛皮上涂了一些羊血.然后就把他扔到一个峡谷中.过了一会儿,就听见一阵呼呼的声音,他从缝隙中看见一只大鹏飞来,叼着他飞到了一个极高的悬崖之上.这时他用尖刀将牛皮割开,从牛皮中钻了出来,并挥刀把大鹏吓跑.等他放眼四看,就发现不远处有一座金碧辉煌的宫殿,就在他不知所措之时,从宫殿中跑出来30个月儿般美丽的姑娘,她们头上都戴着漂亮的花环,一齐对他说:"欢迎你,尊贵的客人."这30个姑娘把他拥进宫中,陪着他嬉戏玩乐.过了一段美好的日子.然而忽然有一天,为首的姑娘含着眼泪对他说:"现在我们必须要分别一个月,这个宫殿里一共有31个门,这前30个门,你都可以打开,每个门打开后,里面的陈列、景物都够你玩赏一整天的.只是最后一道门,你不能打开.你如果能按照我们的话去做,等我们回来,我们将永远陪着你,过着幸福愉快的日子,否则我们将再也不能相见."王子郑重地向她们保证他会照做,她们才满眼泪水、依依不舍地走了.等姑娘们走后,王子按照她们的话,每天打开一道门,果然每天的日子不知不觉就过去了.到了最后一天,王子起先恪守诺言,没有去开那个门,但是最后,却实在克制不住好奇心,终于还是把那个门打开了,打开后,却发现,这是一个很小的房间,里面只有一匹木马和一盆水,王子仔细检查了木马后,又骑到马上,发现马头上有一个开关,他又好奇地扭动了那个开关,结果这一下坏事了,他发现木马动起来了,并且会说话,只见马尾巴沾了一下盆里的水,向他脸上一挥,就把他的左眼打瞎了,然后马就飞起来,飞到一个地方,对着他说,下去吧,倒霉的家伙,他就掉了下去,下来后,他发现,自己正好又落到那个寺院里,从此,他也加入了那些僧人的行列,成了他们之中的一员.

我讲这个故事的意思就是要告诉你,科学家就是那种宁愿瞎掉一只眼睛,也想知道那个

门后面是什么的人.同样也只有具有这样强烈的好奇心,你才有钻研数学的动力.因此我认为一个真正的数学爱好者需要具备三个条件.首先的条件是你对数学要有强烈的兴趣,这表现在喜好数学题材的读物,看见一个数学问题就摩拳擦掌,想试试看会不会做,如果做不出来,又十分想知道答案,甚至达到废寝忘食的程度,而且在经过自己的努力,解决了一个数学问题后,会感到十分愉快和兴奋.如果你有这种劲头,这第一个条件就具备了.古代迦太基大数学家阿基米得对国王交给他甄别金王冠中是否掺假的问题曾思考了很长时间都未能解决,有一次他正洗澡时,由于感受到水的浮力而想到可以利用浮力原理来解决这一问题,就兴奋得光着身子跑到大街上大喊"我想出来了,我想出来了".这就叫做和数学有缘分.并不是每个人都是和数学有缘分的.有一次我曾偶然经过附近的小学校,当时操场上上体育课的男生分成两队,其中一队有一个队员突然起脚,球应声进门,结果这一队的队员都兴奋得大喊"踢进去了,踢进去了".我也很为他们高兴.然而这时我又听到另一种声音,才注意到,操场边上还有几个女生也在说话,但是她们说的却是"踢进去就踢进去呗,那又怎么了".我想这几个女生是天生与足球运动无缘的.如果你在一道数学题做不出来后感到"做不出来就做不出来,那又怎么样",那我想你也恐怕是与数学无缘的.

其次是当你看到一个陌生或抽象的数学符号或表达式时,是否会感到头晕,从心里产生一种害怕的感觉? 比如平常你解的方程都是关于 x 的一元一次方程或一元二次方程,结果在一次数学竞赛选拔考试中突然要你解方程

$$x^3-[x]=3$$

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,比如$[2.5]=2$,$[-3]=-3$,$[-3.4]=-4$.你是感到害怕还是觉得这个问题有点意思啊,再比如说,你平常见到的都是等号、大于号、小于号这些符号,结果有一天你去新华书店翻书,发现一本书里有许多有意思的问题,但是又同时有很多地方有 $a\equiv 2 \pmod 3$ 这种符号,你是马上感觉这本书看不懂,还是觉得这个"$\equiv$"到底是什么意思,很想知道一下?还有,你平常见惯了$1+4+\cdots+n^2$这种写法,如果有一天,你发现有的书上把这个式子写成$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$的样子,或者还有像$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}f(i,j)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n}f(i,j)$这种式子,你是感到嗓子眼发干,实在不想看下去,还是想继续看下去,搞清楚这是什么意思,并且等你看懂后觉得这种写法挺省事,以后也想这样写.如果你对陌生、抽象的数学符号和表达式,不晕,不怕,敢于弄懂,并且见到一个数学问题后,不管是否能把它做出来,就先愿意在纸上划拉两道,摆弄摆弄,那么可以说你对数学有点感觉,已具备了数学爱好者的第二个条件.

最后,尽管你对数学很感兴趣,也有感觉,你还需思考一下,你是否在数学上确实有落在实处的记录以证明你确实有这方面的才能.再具体点来说,就是你在学校中数学作业和考试的成绩如何,是否在某种级别的数学竞赛中得过名次或至少参加过这种竞赛.如果你只是在口头上说或者自认为对数学很感兴趣,但是在学校里数学成绩却很糟糕,这个恐怕你应该承认,自己实际上还没能表现出这方面的能力.如果课本中的数学题目都不会做,或做起来很费劲,那恐怕这本书中的题目就更难看得懂了.也就是说,至少你已很熟练地掌握了数学课本中的内容(倒不一定表现在每次数学考试都能得 100 分),在学校里数学成绩还不错,课本里的题目做起来很轻松,那才可以考虑钻研一下这本书中的题目.

如果你对数学有兴趣,有感觉也有能力,那么我认为你是可以看这本书的,并且一辈子都会感到这是一本有价值的书.

现在我从这本书中抽出十个问题(题目后面第一个括弧中的号码是这道题在本书中的章号和题号,第二个括弧中注明了理解这道题目的解答所需要的文化程度),如果你对这些问题没有一点兴趣,那就不要看了.如果发现自己至少对一两个问题感兴趣,并且有想知道答案的欲望,那我建议你赶紧把这本书买下,只要能看懂一部分就可买下,其余不懂的部分买回去后慢慢看,我说过这本书是够你琢磨一辈子的,是可以终身陪伴你的一本书.老实说,如果一本书中的东西你都知道,都看得懂,那就没必要再看了,就是要有一些你一开始看不懂,看了后才懂,这本书才对你有价值.

1.用一个简单的法则来描述数列

$$122112122122112112212112122112112122122112\cdots$$

的构成规律,它的第 n 项是什么,这个数列是否是周期的?(1.3)(初中)

2.证明:$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$.(1.26)(初中)

3.在等腰$\triangle ABC$中,$AB=AC$.顶角$\angle A=20^\circ$,在AB边上取一点D,使$AD=BC$.求$\angle BDC$的度数.(2.1)(初中)

4.(1)证明:不可能存在一个连续的保距映射f,把球面上所有的点都映射到平面中去(即不可能把球面整体地展开成平面的一部分).(2.44(1))(初中)

5.设$x_1,x_2,\cdots,x_{48}$是$x^{49}=1$的不等于1的根,且

$$N=(1+x_1+x_1^4)(1+x_2+x_2^4)\cdots(1+x_{48}+x_{48}^4)$$

问是否可能成立$N=83^5$?(3.42)(高中)

6.由计算可知$\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{29}-\operatorname{cosec}\frac{10\pi}{29}=1.999\ 989\ 433\cdots$,证明:不可能存在正整数$j,k$和正奇数$n$,使得$\operatorname{cosec}\frac{j\pi}{n}-\operatorname{cosec}\frac{k\pi}{n}=2$.(3.43)(高中或大学)

7.证明:对所有$n\geqslant 0$,成立

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$$

(4.35)(高中)

8.设$a_0=4,a_1=a_2=0,a_3=3,a_{n+4}=a_{n+1}+a_n$.证明:如果$p$是一个素数,则$p\mid a_p$.(4.67)(高中或大学)

9.设$0<x_0<\pi,x_{n+1}=\sin x_n$,证明:当$n\to\infty$时,$\sqrt{n}x_n\to\sqrt{3}$.(5.66)(大学)

10.(1)设$1\leqslant a_1<a_2<\cdots$是严格递增的正整数.证明:如果存在整数$r\geqslant 0$使得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^r}{a_k}$$

发散,则$\xi=0.(a_1)(a_2)(a_3)\cdots$是一个无理数.

(2)设$2,3,5,7,\cdots$是所有的素数组成的数列,证明:$\xi=0.235\ 7\cdots$是无理数.

(3)设$1,4,9,16,25,\cdots$是所有的完全平方数组成的数列,证明:$\xi=0.149\ 162\ 5\cdots$是无理数.(5.167)

有意思的题目还有很多,但限于篇幅,有些就只好割爱了.上面这些题目,很多都和一些历史上著名的问题或数学中重要的问题有联系.比如第2题是一个很著名的等式,称为山克斯(Thanks)等式,《美国数学月刊》曾刊登过一篇书评,在此书评中,评论者特意介绍了这一

等式，并且说明，这一等式可以从伽罗华理论得出．再比如第4题，来源于历史上的地图理论，现在很多数学爱好者都知道无论你怎么制图，都不可能把球面完全不失真地画在平面上，更确切一点说，不管你用什么方法在平面上制成一幅球面的地图，都不可能使地图上任意两点之间的距离恰好等于这两点所对应的球面上的两点之间的原来的真实距离．第6题完全是由研究工作中真实的计算所引出的一个问题．第8题也是和数论中很有名的课题素性判断有关联的问题，所谓素性判断就是给出一个法则以决定一个给定的数字是否是一个素数．这也是一个很有新闻价值的问题．报纸杂志上每隔一段时间就会出现又发现至今以来最大的素数的报导．这些数一般都是一种称为莫森尼素数的数．判断这种数是否是一个素数，就要用到一个叫做卢卡斯－莱赫默(Lucas-Lehmer)判据的定理以及依靠计算机强大的计算能力．第9题也是数学分析中一个很基础，也很重要的问题，那就是弄清一个无穷小量的阶，数学历史上很多有名的结果其实就是给出了一个无穷小量的阶或阶的估计．这道题如果改成求数列$\{x_n\}$的极限那就容易多了，是大学数学分析课中常见的一道习题．恐怕中学生也可以做，但是可能要难一些，需要知道极限存在的魏尔斯特拉斯判据．不难得知这个极限就是零．但是第9题的形式就更难一些了．它实际上等价于要证明$x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$，也就是$x_n$和$\sqrt{\frac{3}{n}}$等价的无穷小，这一结果当然蕴含$\{x_n\}$的极限是零，所以是比后者更强的结果，那肯定也应该是难度更大的结果．如果粗略一点来说，也可以说成是x_n是$\sqrt{\frac{1}{n}}$级的无穷小，或者写成$x_n = o\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$，也就是不管其中的常数了．关键是你一精确化，就会出来个$\sqrt{3}$的常数，这个常数是怎么和$\sin x_n$这个东西联系起来的，好像一开始根本看不出来，这就有点意思了，你要解释为什么这个常数恰好是$\sqrt{3}$，恐怕就要知道$\sin x$的泰勒(Taylor)展开式，所以就这么一个简单的大学生的数学分析习题，你一深入研究，就可以挖掘出一些越来越深入的问题．最后一个问题就是第10题也是和数学中很重要的一个问题有关的结果，这个问题就是要判断一个给定的实数是否是无理数，这个问题也不是那么容易的，现在还仍有人不断给出这方面的结果，另外有些著名的常数例如欧拉常数至今仍不能得知是否是无理数．这道题本身就是这方面的一个结果，虽然它很初等，但是又很有用，其中的(2)，(3)部分就是应用，这两个结果你要不用这个结果得出来，恐怕也不是很容易．

这些题目虽然大多和一些历史上著名的问题或数学中重要的问题有联系，但是选他们的着眼点却并不仅在此，如果只追求有名，那也有不少问题，例如黎曼假设、哥德巴赫问题、四色定理等．但是讲这些问题，恐怕就只能比较虚，要是实打实地讲，一是没有多少人能看得懂，二是即使讲了一大堆难而又难的东西，最后仍只能是一个未知数．而这里选的问题让人感兴趣之处就在于它是可以雅俗共赏的，而且有的问题之解答，给人以出奇制胜之感，绝对是你根本想不到的．下面举几个例子：

第1个例子是第2题，也就是我上面提到过的那个山克斯等式，按照刚才说过的那个书评，说是要用伽罗华理论才能得出来，这就有点吓人，这个伽罗华理论也是很有一点名气的，它可以用来解决一个代数方程的根是否可用根式表出，不少人可能也从科普书中听说过，但是具体如何实行和真正进行计算，恐怕懂得的人就不多了．但是这么一个初等的等式居然要用这么高深的理论才能得出，我总有点不太相信．后来和几个朋友研究了一下，发现只要你

有足够的耐心，细心计算一下也是可以得出来的. 下面是一种证明方法，这个证法虽然不是最简单，但却是正常思维可以自然想到的. 其路线是设

$$\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$$

$$\beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$$

然后

(1) 通过估计首先得出 α 和 β 的范围，具体一点就是说明 $\alpha > 7, \beta > 7$.

(2) 证明：α 和 β 满足一个同样的代数方程 $f(x) = 0$.

(3) 证明：$f(x) = 0$ 只有唯一的一个根符合 $x > 7$ 的条件.

由此显然即可得出 $\alpha = \beta$ 的结论. 这里最困难和吓人的一步是(2)，因为为了要得出 α 和 β 所满足的代数方程，尤其是所满足的方程，你必须多次的平方，而搞得不好，那个根号还是去不掉. 不过等你真的去算一下，你就会发现其中有两步恰好可以消掉好些东西，所以并没有当初想的那么可怕. 下面是详细的证明：

(1) 我们有

$$\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}} > \sqrt{4} + \sqrt{22 + 3} = 2 + 5 = 7$$

又从 $2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}} > 1$ 以及 $10 < 2\sqrt{29} < 11$，可以得出

$$\beta = \sqrt{11 + 2\sqrt{29}} + \sqrt{16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}} >$$

$$\sqrt{11 + 10} + \sqrt{5 + 1} = \sqrt{21} + \sqrt{6} > 7$$

(2)

$$\beta^2 = 11 + 2\sqrt{29} + 16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}} +$$

$$2\sqrt{(11 + 2\sqrt{29})(16 - 2\sqrt{29} + 2\sqrt{55 - 10\sqrt{29}})}$$

所以 $\beta^2 - 27 - 2\sqrt{55 - 10\sqrt{27}} = 2\sqrt{60 + 10\sqrt{29} + 2(11 + 2\sqrt{29})\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}}$

$$(\beta^2 - 27)^2 - 4(\beta^2 - 27)\sqrt{55 - 10\sqrt{29}} + 4(55 - 10\sqrt{29}) =$$

$$4(60 + 10\sqrt{29} + 2(11 + 2\sqrt{29})\sqrt{55 - 10\sqrt{29}})$$

$$(\beta^2 - 27)^2 - 20 - 4(\beta^2 - 27)\sqrt{55 - 10\sqrt{29}} =$$

$$80\sqrt{29} + 8(11 + 2\sqrt{29})\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}$$

$$(\beta^4 - 54\beta^2 + 709) - 80\sqrt{29} = 4(\beta^2 - 5 + 4\sqrt{29})\sqrt{55 - 10\sqrt{29}}$$

$$(\beta^4 - 54\beta^2 + 709)^2 - 160(\beta^4 - 54\beta^2 + 709)\sqrt{29} + 185\ 600 =$$

$$16(\beta^2 - 5 + 4\sqrt{29})^2(55 - 10\sqrt{29}) =$$

$$16(55\beta^4 - 2\ 870\beta^2 + 38\ 495) - 160(\beta^4 - 54\beta^2 + 709)\sqrt{29}$$

算到这，你可以发现，式子里的根号已经可以消去了，因此，原则上，我们已经算是求出了 β 所满足的整系数代数方程，剩下的事只不过是化简一下，其实，我们甚至都不用再化简，只须知道 β 所满足的是一个 8 次方程就够了，但这是后话. 第一次算时，还是老老实实算一下.

$$((\beta^4 - 54\beta^2 + 269) + 440)^2 + 185\ 600 = 16(55\beta^4 - 2\ 870\beta^2 + 38\ 495)$$

$$(\beta^4 - 54\beta^2 + 269)^2 + 880(\beta^4 - 54\beta^2 + 269) + 440^2 + 185\ 600 =$$

$$880\beta^4 - 45\,920\beta^2 + 615\,920$$

算到这,你又可以发现,我们现在又可以消去好些东西

$$(\beta^4 - 54\beta^2 + 269)^2 - 1\,600\beta^2 = 0$$

由此就可以得出 β 满足一个整系数代数方程 $f(x) = 0$,其中

$$f(x) = f_1(x)f_2(x)$$

$$f_1(x) = x^4 - 54x^2 - 40x + 269$$

$$f_2(x) = x^4 - 54x^2 + 40x + 269$$

同时易证 α 满足整系数代数方程 $f_1(x) = 0$,当然也是 $f(x) = 0$ 的根.

(3) 由

$$f_1(-7) = 304, f_1(-6) = -139$$

$$f_1(-3) = -16, f_1(-2) = 149$$

$$f_1(1) = 176, f_1(2) = -11$$

$$f_1(7) = -256, f_1(8) = 587$$

可知 $f_1(x)$ 共有 4 个根 $-7 < x_1 < -6$, $-3 < x_2 < -2$, $1 < x_3 < 2$, $7 < x_4 < 8$. 易证 $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$, $-x_4$ 是 $f_2(x)$ 的根,而

$$-8 < -x_4 < -7,\ -2 < -x_3 < -1,\ 2 < -x_2 < 3,\ 6 < -x_1 < 7$$

由于 $f(x)$ 是一个 8 次方程,因此上述这 8 个根就是 $f(x)$ 的所有的根,因而其符合条件 $x > 7$ 的根是唯一的.

由(1),(2),(3) 三点就可得出 $\alpha = \beta = x_4$.

因此现在我们已经知道,要证明这个山克斯等式,是根本不需要用到什么伽罗华理论的(但是或许伽罗华理论是发现这一等式的一个来源). 但是你可能根本想不到,后来《美国数学月刊》又发表了一篇文章,内容是要证明这个等式,还有更简单的方法,只须用到最简单的乘法公式和

仅仅四行式子

就可证明. 答案就在这本书中. 当然,答案一经揭穿,也就不稀奇了,但是,在你知道答案并且感到不稀奇之后,是否想过在知道答案之前检验一下自己是否有这个眼力?这是比马后炮似的不稀奇更值得深思的问题.

第 2 个例子是上面的第 3 题(这道题并不是从《美国数学月刊》上选出的,是我弟弟问我的一个问题,但是我觉得这道题也很有意思,所以也把它收入了),这绝对不能算是一道难题,凡是学过解三角形的人肯定都能把他鼓捣出来,不信你可以拿这个问题去问理工科大学生或中学的数学老师,以及数学物理方面的科研工作者,都应该能做出来的,而且解法不止一种. 下面是一种解法,当然用这种解法你需要能熟练地记忆和运用各种三角公式,例如倍角公式、积化和差、和差化积公式等.

设 $BC = a$, $AB = AC = b$, $\angle BDC = \theta$,那么在 $\triangle ABC$ 中由正弦公式就有

$$\frac{a}{\sin 20^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ}$$

因此有

$$b = \frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ}a$$

而
$$BD = b - a = \left(\frac{\sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} - 1\right)a = \left(\frac{\sin(20^\circ + 60^\circ)}{\sin 20^\circ} - 1\right)a =$$
$$\frac{\sin(60^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ}a = \frac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}a = 2a\cos 20^\circ$$

在 $\triangle BCD$ 中再由余弦公式可得

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD \cdot BC\cos 80^\circ = (4\cos^2 20^\circ + 1 - 4\cos 20^\circ\cos 80^\circ)a^2 =$$
$$(2(1 + \cos 40^\circ) + 1 - 2(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ))a^2 =$$
$$(2 + 2(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ))a^2 = (2 + 4\cos 20^\circ\cos 60^\circ)a^2 =$$
$$2(1 + \cos 20^\circ)a^2 = 4a^2\cos^2 10^\circ = 4a^2\sin^2 80^\circ$$

因此
$$CD = 2a\sin 80^\circ$$

在 $\triangle BCD$ 中，再由正弦公式可得

$$\frac{a}{\sin\theta} = \frac{CD}{\sin 80^\circ} = \frac{2a\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 2a$$

这就得出 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，而 $\angle BDC = \theta = 30^\circ$.

但是我告诉你，解这道题其实根本不必用到什么正弦公式、余弦公式以及一大堆各种各样的三角公式，而只须用到初中课程中所学到的最基本的三角知识即可. 不知你相信不相信，你自己可以先试一试. 在本书中有这个答案. 不过虽然这个答案的确是非常简单的，但是我认为上面给出的解答仍旧是有价值的，因为它有一般性，可以适用于 $\triangle ABC$ 的顶角不是 20°，而是任意角 α 的一般情况.

说到这，我想插一句题外话. 就是一旦你知道了这个答案是 30°，那这个问题就可能变得容易了，因为知道了最终的答案和不知道这个答案是大不一样的，对于知道了答案的人，他的主要精力就不用放在探索最后的解答是什么形式方面了，而是放在往那个答案上凑，而且这个凑不是瞎凑，是有目标的. 这就好多了，这也是科研工作和做习题的最重要的差别. 有些习题也可以很难，但是再难，它也是一个已经解决了的问题，而科研工作的特点是你事先无法知道这个问题是否能解决，这里的风险是如果你企图解决一个错误的猜想，那可能你耗费了无数心血之后，发现自己是在白干. 也正因为这个原因，科研人员在自己的成果正式公布之前，一般是不愿意透漏给同行知道的，因为在得知了你的成果之后，其他的人就也可能做出来而抢先发表这一成果.

第3个例子是第4题，上面已经说过有不少数学爱好者都是知道不可能把球面完全不失真地画在平面上这个事情的，但是大多数人只是限于知道而已，却并不知道如何证明这一点，而且在很多人的心目中，要理解这件事情是需要用到例如微分几何那样比较高深的数学知识的，其实完全不是这样，看了本书之后你就会知道，要理解这件事情，只须用到最简单的初中几何知识就已足矣. 这里选的只是书中题目的第一问，第二问是要证明即使是球面上的任意一个小的区域也不可能完全不失真地画在平面上. 这就比第一问更难一些，但是要证明这件事情，也仅需要用到大学一年级的微积分学知识.

最后，我想提醒读者注意一下第5题，这道题原来的解答在我看来都是不能令人满意的，不是不够严格就是太过高深，目前的这个解答是我根据原解答中一个未给出证明的命题，请我的好友王国义先生给出的，这个解答我认为既足够巧妙又不难理解，其中最关键的一步是设

$$P(x) = (1 + x + x^4)\cdots(1 + x^{48} + x^{192})$$

然后去证明

$$N \equiv P(1) \pmod 7$$

这个证明当然是很巧妙,同时也很有基本技巧.但是更值得思考的问题是你如何会想到要去证明这个命题.这个即使有答案,书上一般都是不会说的,但是其实这正是最关键之处.假使你想不到这一点,那即使你有再高的本事,不知道往哪使劲也没有用.据原解答者称,他是通过计算发现了一批这种关系.所以看一本书,不仅要看到书中的内容,还有很多之外的东西需要你自己去体会.

其他有意思的可圈可点的材料还有很多,限于篇幅,这里无法一一列举.但是仅通过这几个随手摘出的例子,就足可以看出这本书中有趣的题目和巧妙的解法是很多的.我相信每一位数学爱好者都可从中发现自己感兴趣的问题.

下面,我想谈一下如何去读这本书.概括地说,我认为可以用

知,懂,熟,用,赏

五个阶段来形容.现在有很多"唐宋诗赏析"一类的书出版.其实不仅诗可以赏析,精彩有趣的数学问题也是可以赏析的,然而不管你赏的是唐诗也好,数学问题也好,都是首先要知道,赏的是些什么东西,连对象都不清楚,那就根本无从赏起了.所以看这本书的第一阶段是先把书中所有的问题起码看三遍.第一遍是浏览,先知道书中大概有些什么问题,心中有个印象;第二遍是细读和筛选,这一遍读时,可以把自己感兴趣的问题圈出来,把这些问题的条件和结论弄清楚,尤其是有些条件的细微差别就可能导致解答的难度大不相同;第三遍再读就是要一边读,一边手里拿着纸和笔不时地要动一动手,只有通过你自己动手,才能体会到这个题目是否困难,是否有趣.这个阶段最好长一些,甚至弄个一年半载的也可以,因为这本书不是供你速成的敲门砖,而是供你细细琢磨的艺术品.而且有些问题就是这样,当你想不出来时,不妨先放一下,过一段时间再想,可能就会"山重水复疑无路,柳暗花明又一村"了.你能不能反复地去思考一个数学问题,其实也是检验你是否真的对数学感兴趣的一个试金石.在有些文艺作品中,经常把数学家描写成十分冷漠的人,我认为这完全是一种误解.一个真正对数学感兴趣的人,当他投入到对问题的思考中时,会产生极大的热情和调动自身极大的能量,乃至茶饭无味,夜不能寐.而且在没有解决之前,会反复思考这一问题.

第二阶段就是"懂",也就是把你感兴趣的问题彻底弄懂,有些问题经过你反复想,如果仍无所获,而你又实在想知道怎么做,那这时便不妨参考一下解答.本书虽然提供了解答,但不要以为,一看解答即可解决.这个解答也是要根据你自己的程度来用的.有些知识,解答者认为是众所周知的或很基本的,但是你可能还不知道或熟悉,这时,就需要你自己先找一些有关的教材、参考书来补一补课,这本书也只有这样读才有价值.也就是说,如果你读这本书只是孤立地自以为弄懂了几道题,那就价值不大,只有通过读这本书,带动你把以前不知道或不熟悉的基本知识系统地学会弄懂,你才有了真正的收获.另外,即使解答中所用到的知识你都知道,有些解答的思路、逻辑可能也不是一次就能弄懂的,需要你多看几次才能理清.

第三阶段就是"熟",就是在弄懂的基础上把问题及其解答弄得熟而又熟.要检验你是否弄熟了,不妨找一两个同道,给他们讲一下这个问题如何解答,让他们给你提问题,告诉你哪听不懂.经过这么一弄,你才会发现自己是否真正弄懂了弄熟了这个问题.这就像研究生准

备答辩一样,只有通过答辩之前的在讨论班上的预先报告和听讲人的质疑,才会发现自己的不清楚之处.据我所知,有的导师在让他的研究生正式答辩之前,曾让他的研究生预先报告了多达三十多次.为什么一定要弄熟呢,因为只有把一个问题弄熟了,这个解题的思路、方法及有关的知识才真正是你自己的.俗话说"熟能生巧",又有"熟读唐诗三百首,不会做诗也会吟"之说,是有一定道理的.从心理学角度和认知过程方面来说,也可对此作出解释.因为当你把一个问题想得熟而又熟,清而又清之时,你的思维焦点以及注意力便不会被那些初级的技巧和手段所干扰,而会集中到问题的实质方面.这样,你的思考便是高质量的.这也可以解释为什么有的人会"顿悟"或突然间"茅塞顿开",甚至在睡梦中突然醒悟.原因就在于在此之前,他已思考了很久,把一切次要问题都想清了,而只剩下一个最后的突破口还未找到,此时,一旦找到了这个突破口,问题便会迎刃而解.相反,假如一个人连所要用到的概念和公式都尚未弄清时,你怎么能指望他去研究那些更高级更根本的问题和方法呢?所以,一定要熟,只有熟了,才能谈其他,才能往下走.

第四阶段便是"用"了,学以致用,熟以致用.经过前三个阶段,如果你能用你所学,独立解决新的问题甚至发表一两个成果,那便是你的学习已开始开花结果了.如能达此境界,我愿衷心对你表示祝贺,同时由衷地感到欣慰.但是这是比较高的要求了,一般读者能过前三关也就算是到此一游了,不必对自己苛求.

最后当你过五关,斩六将,看完这本书后,即可进入"赏"的阶段,或将你认为最有体会,最得意的题目不时拿出来揣摩回味一番,或提出一两个问题与朋友同道互相切磋,都会体会到赏析的愉快.美酒佳肴、艺术珍品、巧题妙题、好句佳联都是需要反复琢磨、反复体味才能越加觉出其美、其佳、其妙、其巧的,仅尝一次不足以品其真味,所以需要反复品尝,才能感受到新的体会带来的舒爽之感.而正因为最后你能进入"品"和"赏"的阶段,所以这本书也才有值得你收藏一辈子的价值.

最后,我祝你身心健康愉快,开卷有益,愿此书能伴你终生,成为你的良师益友,那便也是作者最大的愉快了,也热盼读者有任何意见和建议告知作者,可发电子邮件至 fby@amss.ac.cn.

作　者
2008年底于北京大学燕园6公寓

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室已出版(即将出版)图书目录

书　名	出版时间	定　价
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00
新编平面解析几何解题方法全书	即将出版	28.00
数学眼光透视	2008-01	38.00
数学思想领悟	2008-01	38.00
数学应用展观	2008-01	38.00
数学建模导引	2008-01	28.00
数学方法溯源	2008-01	38.00
数学史话览胜	2008-01	28.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00
从庞加莱到佩雷尔曼	即将出版	88.00
天庭的秩序——三体问题的历史	即将出版	88.00
空间想象力的发展	即将出版	48.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)	2006-12	68.00
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2006-12	18.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2009-06	48.00
几何变换与几何证题	即将出版	68.00
300个世界著名几何问题及1000个著名几何定理	即将出版	78.00
三角形的五心	即将出版	28.00
历届IMO试题集(1959—2005)	2006-05	58.00
历届CMO试题集	2008-09	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
已出版(即将出版)图书目录

书　名	出版时间	定　价
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009－03	88.00
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006－05	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008－01	48.00
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008－07	58.00
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	即将出版	58.00
500个最新世界著名数学智力趣题	2008－06	48.00
400个最新世界著名数学最值问题	2008－09	48.00
500个世界著名数学征解问题	2009－05	48.00
400个最佳数学征解老问题	即将出版	48.00
初等数论难题集(第一卷)	2009－05	68.00
初等数论难题集(第二卷)	即将出版	98.00
组合数学难题集	即将出版	38.00
数学 我爱你	2008－01	28.00
博弈论精粹	2008－03	58.00
精神的圣徒 别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008－09	48.00
数学史概论	即将出版	78.00
多项式和无理数	2008－01	68.00
模糊数据统计学	2008－03	48.00
解析不等式新论	即将出版	68.00
数学奥林匹克不等式研究	即将出版	68.00
初等数学研究(I)	2008－09	68.00
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009－05	118.00
中国初等数学研究	2009－05	20.00
数学奥林匹克超级题库(初中卷)	即将出版	88.00
中等数学英语阅读文选	2006－12	38.00
统计学专业英语	2007－03	28.00
中考数学专题总复习	2007－04	28.00

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室
邮　　编:150006
联系电话:0451－86281378　　13904613167
E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

目录

第 1 章　代数问题　/1

第 2 章　几何问题　/57

第 3 章　高等代数问题　/88

第 4 章　初等数论问题　/129

第 5 章　高等数学问题　/245

编后语　/379

第1章　代数问题

(AMM E1461)①

1.根据下面的加法算式确定式中各个字母的值：

$$\begin{array}{r} FIFTY \\ FOUR \\ FOUR \\ +\quad TWO \\ \hline SIXTY \end{array}$$

此外别忘了 $FOUR+12$ 是一个完全平方数.

解法1　用 θ 代替字母 O. 由于 $S>F\neq 9$，因此 F 是4或5，同时 $S=F+1$. 由于 $2R+\theta=10$ 或20，因而 $FOUR(=n^2-12)$ 只可能是4 612. 那样 $S=5$ 并且 $W=10-2U-1=7$. 现在 $F+2\theta+T+1=X+20$，$T=X+3$，并且有 $X=0$，$T=3$. 最后 $(I,Y)=(8,9)$ 或 $(9,8)$. 因此最后有两组都是对的加法式，即

$$48\ 439+4\ 612+4\ 612+376=58\ 039$$

$$49\ 438+4\ 612+4\ 612+376=59\ 038$$

解法2　我们有以下(模为10)的同余式

$$F+R+O\equiv \text{zero} \qquad ①$$

$$U+U+W+(1,2,\text{or } 3)\equiv \text{zero} \qquad ②$$

$$F+O+O+T+(1,2,\text{or } 3)\equiv X \qquad ③$$

$$F+F+(1,2,\text{or } 3)\equiv \text{zero} \qquad ④$$

方程

$$F+(1 \text{ or } 2)=S \qquad ⑤$$

和

$$FOUR+12\text{ 是一个完全平方数} \qquad ⑥$$

现在④说明 $F=4$ 或9；⑤说明 $F=4$，$S=5$；⑥给出(通过完全平方检验) $FOUR$ 是4 612；②现在给出 $W=7$；③导出 $T=3$，$X=$ zero，最后 I 和 Y 不是唯一确定的，它们中每一个既可能是8也可能是9.

① AMM是《美国数学月刊》的缩写，AMM E1461代表此题在《美国数学月刊》中原来的编号.

2. 把圆周 $n(n \geqslant 5)$ 等分后，然后每隔一个分点引一条弦就得到一个正星形多边形，每条弦上将有4个交点. 在每个交点处写一个各不相同的正整数，使得每条弦上的4个数之和都等于一个相同的常数，就得到一个魔术星形. 称魔术星形中的最大数和最小数之差 Δ 为它的特征数.

(1) 构造一个魔术星形，其常数为1 968，并且其 Δ 尽可能地小.

(2) 构造一个具有(1)中性质的魔术6角星形.

(3) 证明：不存在常数为1 967的魔术5角星形.

(AMM E2092)

解 本题按照(3)(2)(1)的顺序解答.

(3) 把魔术5角星形的每条弦上的数加起来，我们发现10个不同的正整数的和的两倍等于5倍的星形常数，因此这个常数必须是偶数，这就说明不存在常数为1 967的魔术5角星形.

(2) 对6角星形，共有12个交点，因此 $\Delta \geqslant 11$. 当且仅当在6角星形的交点上所写的数是12个连续的整数 $a, a+1, \cdots, a+11$ 时，$\Delta = 11$. 但是把所有的弦上的数相加就得出方程 $12a + 66 = 3 \cdot 1\,968$，这个方程没有整数解. 下一个最小的特征数是 $\Delta = 12$，要求所写的数 v_i 满足 $486 \leqslant v_i \leqslant 498$，$v_i \neq 492$. 图1表明，满足这一要求的构型是可能的.

(1) 对常数为1 968魔术5角星形，上面的论述表明 Δ 不可能是9，也不难证明 $\Delta \neq 10$，因此最小的 Δ 只可能是11，图2表明这种构型存在.

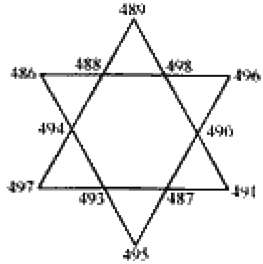


图1

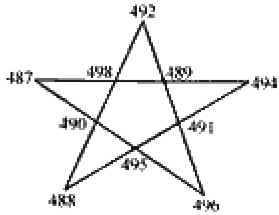


图2

注 N.M.Dongre考虑了把$\{1,2,\cdots,2n\}$这$2n$个数填到一个n角星形的$2n$个交点处的魔术星形问题. 首先考虑魔术5角星形，设其填法如图3所示.

设s表示任意一根弦上的数字之和，那么$5s$就等于两倍的所有数字之和. 因此$5s = 110$，即$s = 22$. 从所有数字之和(即55)中减去通过a的两条弦上的数字之和，我们得到 $a + 11 = b + e + h$. 类似的，可得到 $f + 11 = d + j + h$ 等.

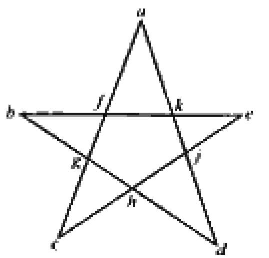


图3

现在考虑10和1的放法. 如果它们位于同一条线上，比如位于b和e处，那么从 $a + 11 = 11 + h$ 就得出 $a = h$，与我们要求所放的数字不重复，矛盾. 因此10和1必须位于不同的弦上，比如说，放在a和b处，那么 $10 + 11 = 1 + e + h$，因此 $e + h = 20$. 这同样是不可能的. 因此按照我们的要求，不可能存在5角魔术星形.

可以构造出符合要求的6,7,9角魔术星形，其中6角魔术星形如图4所示.

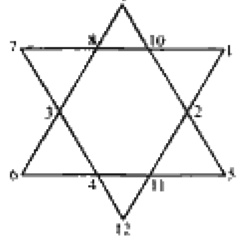


图4

尚不知道一般的构造方法和存在魔术星形的充分条件.

(AMM 5304)

3. 用一个简单的法则来描述叙列

1221121221221121122121121221121121221221…

的构成规律，它的第 n 项是什么，这个叙列是否是周期的？

解 设 x_n 是一个不是最终为常数的叙列. 我们考虑一个把 x_n 的若干个连续的相等的项分成一组的括号的叙列. 括号的长度将给出一个和 x_n 相关的叙列 $\hat{x}_n$. 所给的叙列可以定义如下：$a_1=1$，$a_n=1$ 或 2，并且对所有的 $n=1,2,\cdots$，$\{a_n\}=\{\hat{a}_n\}$. 那样，$\{a_n\}$ 就被唯一地确定了. 确实由于 $a_1=1$，所以 $\hat{a}_1=1$，这意味着 $\{a_n\}$ 的第一个括号的长度是 1. 因此 $a_2\neq 1$，因而 $a_2=2$. 由于 $\hat{a}_2=a_2=2$，因此 $\{a_n\}$ 的第二个括号将包括两个 2，因此又有 a_3 以及 $\hat{a}_3$ 都等于 2. 由于第三个括号必须从 1 开始，那么由 $\hat{a}_3=2$ 得出，它将包括两个 1. 因此 $a_4=a_5=1$，以这种方式继续，$\{a_n\}$ 就被递归地构造出来. 如果 s_n 是 $\{\hat{a}_n\}$ 的部分和 $\sum\hat{a}_n$，那么由于相邻的两个括号中包含不同的数，第奇数个括号中含有 1，而第偶数个括号中含有 2，所以当 $s_{m-1}<n\leqslant s_m$ 时，$a_n=\dfrac{3+(-1)^m}{2}$.

$\{a_n\}$ 不可能是周期的. 如果 $\{a_n\}$ 是周期的，那么比如说，当 $n=n_0$ 之后，就将有最小周期 N，那么 $\{\hat{a}_n\}$ 在某个 n_1 之后（实际上，$n_0<n_1<2n_0$）也将有另一个最小周期 $N_1>N$. 但是由于 $\{a_n\}$ 的括号的长度只能是 1 或 2，因此 $\{\hat{a}_n\}$ 的含有 N 个元素的一段将在 $\{a_n\}$ 中产生一个多于 N 但少于 $2N$ 的段，因此 $N<N_1<2N$. 但是由于 N 是 $\{a_n\}$ 的最小周期，因此 N_1 必须是 N 的倍数，这与 $N<N_1<2N$ 矛盾，所得的矛盾就说明 $\{a_n\}$ 不可能是周期的.

(AMM 10947)

4. 证明：对任意正整数 n，$1+5^n+5^{2n}+5^{3n}+5^{4n}$ 是一个合数.

证明 设 $f(n)=1+5^n+5^{2n}+5^{3n}+5^{4n}$. 如果 $n=2k$ 是偶数，那么利用 Aurifeuillian 多项式因式分解

$$x^8+x^6+x^4+x^2+1=$$
$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

就得出

$$f(n)=f(2k)=$$
$$(1+5^k+5^{2k}+5^{3k}+5^{4k})(1-5^k+5^{2k}-5^{3k}+5^{4k})$$

如果 $n=2k-1$ 是奇数，那么利用恒等式

$$x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+3x+1)^2-5x(x+1)^2$$

就得出

$$f(n)=f(2k-1)=(1+5^k+3\cdot 5^{2k-1}+5^{3k-1}+5^{4k-2})\cdot(1-5^k+3\cdot 5^{2k-1}-5^{3k-1}+5^{4k-2})$$

在这两种情况中，右边的两个因数显然都大于1，因此 $f(n)$ 是合数.

(AMM 5324)

5. 自从哈代(Hardy)去看当时住在 Putney 的拉马努金(Remanujian)以来，已经众所周知1 729是最小的可用两种不同的方式表为两个正整数的立方和的正整数.

(1) 证明：3 367可用三种不同的方式表为两个正整数的立方差.

(2) 什么数是最小的可用三种不同的方式表为两个正整数的立方和的正整数?

解 (1) $3\ 367=15^3-2^3=16^3-9^3=34^3-33^3$.

(2) $87\ 539\ 319=414^3+255^3=423^3+228^3=436^3+167^3$.

这是用计算机搜索所得的最小的可能的数. 见 Some Solutions of Diophantine Equations, Proc. Cambridge Phil. Soc., 53 (1957), 779.

(AMM 10426)

6. 证明：任何一个整数都可表示为两个完全平方数和一个立方数之和(这里的整数和立方数既可以是正的也可以是负的).

证明 我们有

$$2x+1=(x^3-3x^2+x)^2+(x^2-x-1)^2-(x^2-2x)^3$$

$$4x+2=(2x^3-2x^2-x)^2+(2x^3-4x^2-x+1)^2-(2x^2-2x-1)^3$$

$$8x+4=(x^3+x+2)^2+(x^2-2x-1)^2-(x^2+1)^3$$

$$16x+8=(2x^3-8x^2+4x+2)^2+(2x^3-4x^2-2)^2-(2x^2-4x)^3$$

$$16x=(x^3+7x-2)^2+(x^2+2x+11)^2-(x^2+5)^3$$

任何一个整数都可以表示成 $16x+r$，$r=0,1,2,\cdots,15$ 的形式，而

$16x$ 属于 $16x$ 的形式；

$16x+1,3,5,7,9,11,13,15$ 属于 $2x+1$ 的形式；

$16x+2,6,10,14$ 属于 $4x+2$ 的形式；

$16x+4,12$ 属于 $8x+4$ 的形式；

$16x+8$ 属于 $16x+8$ 的形式.

(AMM E1405)

7. 求和 $1+22+333+\cdots$.

解 原则上来说,此题是不定的,因为仅给出一个数列的前三项不能确定整个数列,而可以有无穷多个数列具有这三个首项.但是根据所写出的这几项,一般都认为后面的几项是 4 444, 55 555, 666 666, 7 777 777, 88 888 888, 999 999 999. 问题是后面的项是什么,可以有两种理解. 一种是写下 10 个 10, 11 个 11, …, 另一种是根据

$$1=1, 22=2\cdot 11, 333=3\cdot 111$$

而认为后面的项是 $10\cdot 1\ 111\ 111\ 111, 11\cdot 11111111111\cdots$, 显然,按照前一种理解,将难以写出一般项,而按照后一种理解,则可以看出明显的规律性,即一般项是

$$u_n=\frac{n(10^n-1)}{9}$$

我们就按这种理解来解这道题. 这时

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(10^k-1)}{9}$$

而 $\quad 9S_n=(1\cdot 10+2\cdot 10^2+\cdots+n\cdot 10^n)-(1+2+\cdots+n)$

令 $\quad P=1\cdot 10+2\cdot 10^2+\cdots+n\cdot 10^n$

那么 $\quad 10P=1\cdot 10^2+2\cdot 10^3+\cdots+n\cdot 10^{n+1}$

因此 $\quad 9P=-(10+10^2+\cdots+10^n)+n\cdot 10^{n+1}=$

$$-\frac{10(10^n-1)}{9}+n\cdot 10^{n+1}$$

因而 $\quad S_n=-\frac{10(10^n-1)}{729}+\frac{n\cdot 10^{n+1}}{81}-\frac{n(n+1)}{18}=$

$$\frac{[(9n-1)\cdot 10^{n+1}+10]}{729}-\frac{n(n+1)}{18}$$

(AMM E3083)

8. 设 x_0, y_0, z_0 是使得 $(x_0^2+y_0^2-z_0^2)(x_0^2+z_0^2-y_0^2)(y_0^2+z_0^2-x_0^2)\neq 0$ 的数,证明:如果 x_0, y_0, z_0 满足方程 $x^3+y^3+z^3=(x+y)(y+z)(x+z)$, 则

$$x_1=\frac{1}{x_0^2+y_0^2-z_0^2}, y_1=\frac{1}{x_0^2+z_0^2-y_0^2}, z_1=\frac{1}{y_0^2+z_0^2-x_0^2}$$

也满足同一方程.

证明 设 $x_1=\frac{1}{a}, y_1=\frac{1}{b}, z_1=\frac{1}{c}$, 则

$x_1^3+y_1^3+z_1^3-(x_1+y_1)(y_1+z_1)(x_1+z_1)=$

$$\frac{1}{a^3b^3c^3}(b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3-$$

$$abc(a+b)(b+c)(a+c))=-\frac{ABCD}{a^3b^3c^3}$$

其中 $A=x^3+y^3+z^3-x^2y-xy^2-y^2z-yz^2-x^2z-xz^2-2xyz$

$B=x^3+y^3-z^3-x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+x^2z-xz^2+2xyz$

$C=x^3-y^3-z^3+x^2y-xy^2+y^2z+yz^2+x^2z-xz^2-2xyz$

$D=x^3-y^3+z^3+x^2y-xy^2-y^2z+yz^2-x^2z-xz^2+2xyz$

注意

$$A=x^3+y^3+z^3-(x+y)(y+z)(z+x)=0$$

这就证明了所给的命题.

(AMM E1176)

> 9. 设 a,b,c,d 都是实数,且 $ad-bc=1$,证明:
> $$Q=a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\neq 0,1,-1$$

证明 $2Q-2=$

$$(a+c)^2+(a-d)^2+(b+d)^2+(b+c)^2$$

上式的右边不可能等于0,否则由 $c=-a=-d=b=-c$ 得出 $a=b=c=d=0$,这与 $ad-bc=1$ 矛盾.因此 $2Q-2>0$,$Q>1$.这就得出结论.实际上,由

$$Q-\sqrt{3}=\left(a+\frac{c}{2}-\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c\sqrt{3}}{2}+\frac{d}{2}\right)^2$$

可知 $Q\geqslant\sqrt{3}$.

(AMM E1977)

> 10. 求出所有的构成等差数列的4元数 x,y,z,w 的集合,使得
> $$x^3+y^3+z^3=w^3$$

解 设 $x=a+3d,y=a+4d,z=a+5d,w=a+6d$,那么所给的方程就成为

$$a(a^2+9ad+21d^2)=0$$

满足此方程的唯一整数是 $a=0$,因此所给方程的唯一解就是 $3d$,$4d$,$5d$,$6d$.

(AMM 10947)

> 11. 设 a 是一个非零整数,证明:方程 $x^3+y^3=a$ 至多可能有有限组整数解.(Jodeph . H . Silverman , Taxicabs and Sums of Two Cubes , AMM Vol . 100(1993) . No . 4: 331-340)

证明 假设方程 $x^3+y^3=a$ 有一组整数解 (u,v),则

$$a=u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)=bc$$

$$u + v = b, u^2 - uv + v^2 = c$$

从 $u + v = b$ 得出 $v = b - u$，把 $v = b - u$ 代入 $u^2 - uv + v^2 = c$ 中得

$$u^2 - u(b - u) + (b - u)^2 = c$$

由于 a 只有有限多种因数分解方法，而对每一种适合关系

$$a = u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2) = bc$$

$$u + v = b, u^2 - uv + v^2 = c$$

的分解，方程式 $u^2 - u(b - u) + (b - u)^2 = c$ 又至多有两组解，因此方程 $x^3 + y^3 = a$ 至多有有限多组整数解.

注 本题的证法高度依赖于 $x^3 + y^3$ 的因式分解. 对类似的命题，即 $x^3 + 2y^3 = a$ 仅有有限多组整数解，证明则困难得多，这一证明直到1909年才由 Thue, A., Über Annäherungswerte Algebraischer Zahlen, J. reine ang. Math. 135, 284-305 (1909) 给出. 作为对比，注意方程 $x^2 - 2y^2 = 1$ 却有无穷多组整数解.

（AMM 10728）

> 12. 确定所有从整数集合到整数集合的并满足关系式
> $$f(x^3 + y^3 + z^3) = f^3(x) + f^3(y) + f^3(z)$$
> 的映射 $f(x)$.

解 仅有的三个解是 $f(x) = 0$，$f(x) = x$ 和 $f(x) = -x$.

显然这三个映射都是解. 下面证明符合要求的解只能是以上的映射.

设 $x = y = z = 0$，则 $f(0) = 3f^3(0)$. 其唯一的整数解为 $f(0) = 0$. 再令 $y = -x, z = 0$，则 $f(0) = f^3(x) + f^3(-x) + f^3(0)$，由此得出 $f(-x) = -f(x)$，因此 $f(x)$ 是奇函数. 令 $(x, y, z) = (1, 0, 0)$，我们得到 $f(1) = f^3(1) + 2f^3(0)$，因此 $f(1) = -1, 0$ 或 1. 再让 $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ 和 $(x, y, z) = (1, 1, 1)$，我们得出 $f(2) = 2f^3(1) = 2f(1)$ 和 $f(3) = 3f^3(1) = 3f(1)$. 为继续讨论，我们需要以下引理：

引理 如果 x 是大于3的整数，那么 x^3 可以写成5个绝对值小于 x^3 的立方和.

引理的证明 我们有

$$4^3 = 3^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 + 1^3$$

$$5^3 = 4^3 + 4^3 + (-1)^3 + (-1)^3 + (-1)^3$$

$$6^3 = 5^3 + 4^3 + 3^3 + 0^3 + 0^3$$

和

$$7^3 = 6^3 + 5^3 + 1^3 + 1^3 + 0^3$$

如果 $x = 2k + 1, k > 3$，那么

$$x^3 = (2k + 1)^3 = (2k - 1)^3 + (k + 4)^3 +$$

$$(4-k)^3+(-5)^3+(-1)^3$$

如果 $x>3$ 是一个任意整数，那么 $x=my$，其中 y 是4或6或大于3的奇数，而 m 是一个正整数.由已证的结果可知，我们可以把 y 表示成

$$y^3=y_1^3+y_2^3+y_3^3+y_4^3+y_5^3$$

因此

$$x^3=(my)^3=(my_1)^3+(my_2)^3+(my_3)^3+(my_4)^3+(my_5)^3$$

由于 f 是奇函数并且 $f(1)=-1,0$ 或1，因此只须证明对每个整数 x，成立 $f(x)=xf(1)$ 即可.对 $|x|\leqslant 3$，这已证明.对 $x\geqslant 4$，设要证的命题已对绝对值小于 x 的正整数成立，因此由引理可知

$$x^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3+x_5^3$$

其中对所有的 i，$|x_i|<x$.由上式可得

$$x^3+(-x_4)^3+(-x_5)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3$$

用 f 对此式的两边作用，由 f 是奇函数的性质和已知条件可得

$$f^3(x)-f^3(x_4)-f^3(x_5)=f^3(x_1)+f^3(x_2)+f^3(x_3)$$

因此，由归纳假设法就得出

$$f^3(x)=\sum_{i=1}^{5}(x_if(1))^3=f^3(1)\sum_{i=1}^{5}x_i^3=f^3(1)x^3$$

从而有 $f(x)=xf(1)$.这样由数学归纳法就证明了要证的命题.

(AMM E1266)

13.求出方程组 $a^3-b^3-c^3=3abc$，$a^2=2(b+c)$ 的所有正整数解.

解　从第一个方程得出

$$(a-b-c)(a^2+(b-c)^2+ab+bc+ac)=0$$

由于上式左边第二个因子不可能为零，因此我们必须有

$$a=b+c=\frac{1}{2}a^2$$

这就得出方程组的唯一的正整数解是 $a=2$，$b=c=1$.

(AMM E1797)

14.求出方程 $y^2+y=x^4+x^3+x^2+x$ 的所有正整数解.

解　将所给的式子乘以4并加1得出

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+1=(2y+1)^2$$

对 $x=-1$，$y=-1$ 或0；对 $x=0$，$y=-1$ 或0；对 $x=1$，y 不是整数；对 $x=2$，$y=-6$ 或5.

当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时，上述方程的左边大于 $(2x^2+x)^2$ 但是小于 $(2x^2+x+1)^2$，因此不可能是一个整数的平方，因此所给方程

的全部整数解就是上面所列出的解.

(AMM E1248)

15.(1) 十个数 $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_{10}$ 是五个未知数 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_5$ 两两相加构成的和. 用 $s_i, i = 1,2,\cdots,10$ 表出 $x_j, j = 1,2,\cdots,5$.

(2) 证明:如果 $s_1 < s_2 < \cdots < s_6$ 是四个未知数两两相加所得的数,那么存在另外的四个数,使它们两两相加后也得出这六个数. 因而由这六个数无法唯一地确定四个未知数.

(1) 显然 $s_1 = x_1 + x_2, s_2 = x_1 + x_3, s_9 = x_3 + x_5, x_{10} = x_4 + x_5$ 以及

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{10} = 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_5)$$

由这些式子就可唯一地确定 $x_j, j = 1,2,\cdots,5$ 如下

$$x_1 = s_1 + s_2 + s_{10} - \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{10})$$

$$x_2 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{10}) - s_2 - s_{10}$$

$$x_3 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{10}) - s_1 - s_{10}$$

$$x_4 = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{10}) - s_1 - s_9$$

$$x_5 = s_1 + s_9 + s_{10} - \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + \cdots + s_{10})$$

(2) 如果一个集合是 $\{x_i\}$,那么另一个集合就是 $\{S - x_i\}$,其中

$$S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

这两个集合将是不同的,由于 $s_3 \neq s_4$ 蕴含 $S - x_4 \neq x_1$,其中 $S - x_4$ 和 x_1 分别是两个集合中的最小数.

(AMM 10947)

16. 设 n 是一个正整数,$S(n)$ 表示 n 的各位数字之和. 那么 $\rho(n) = S^k(n)$ 称为 n 的数字根,其中 k 是一个依赖于 n 的正整数,使得 $\rho(n) = S^k(n)$ 是一个个位数. 例如 $\rho(10\ 874) = \rho(21) = 3$. 设 $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geqslant 3$ 表示斐波那契数列,求出 $\rho(F_n)$.

解 众所周知,除了要把0换成9之外,所谓"数字根",只不过是"模9"的另一种说法,因而

$$\rho(F_n) \equiv \rho(F_{n-1}) + \rho(F_{n-2}) \pmod 9$$

由于数字根只可能取9个值,因此数列 $\rho(F_n)$ 是最终周期的. 事实

上，由手算容易得出 $\rho(F_{25})=\rho(F_{26})=1$，因此 $\rho(F_n)=\rho(F_{n(\mathrm{mod}\ 24)})$ 是一个周期为24的周期数列.其开头24个数是1，1，2，3，5，8，4，3，7，1，8，9，8，8，7，6，4，1，5，6，2，8，1，9.

（AMM E1396）

17. 设 $F_1=F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\geqslant 3$ 表示斐波那契数列，证明：

(1) 数列中每(连续的)5个数中，就有一个可被5整除.

(2) $F_{n+h}F_{n+k}-F_nF_{n+h+k}=(-1)^nF_hF_k$.

(3) $$H(F_1,\cdots,F_{2n-1})=\begin{vmatrix}F_1 & F_2 & \cdots & F_n\\ F_2 & F_3 & \cdots & F_{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ F_n & F_{n+1} & \cdots & F_{2n-1}\end{vmatrix}=0.$$

证明 (1) 从 $F_5=5,F_n=5F_{n-4}+3F_{n-5}$ 即可得出.

(2) 利用比内公式 $F_n=\dfrac{a^n-b^n}{2^n\sqrt{5}},a=1+\sqrt{5},b=1-\sqrt{5}$，并注意 $\dfrac{a^nb^n}{2^{2n}}=(-1)^n$ 即可得出要证的式子.

(3) 第三行是前两行之和，因此行列式为0.

（AMM 10947）

18. 设 $F_1=F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\geqslant 3$ 表示斐波那契数列，证明：

(1) $F_n=F_{k+1}F_{n-k}+F_kF_{n-k-1}(0<k+1\leqslant n)$.

(2) $F_{m+n}>F_mF_n(m,n>0)$.

(3) $F_{mn}>F_n^m,m>1$.

(AMM V67, No9, G. Shapiro, Some properties of the Fibonacci numbers)

证明 (1) 对 $k=0$ 和 $k=1$ 命题显然成立，假设对自然数 k 命题成立，则

$$\begin{aligned}F_n&=F_{k+1}F_{n-k}+F_kF_{n-k-1}=F_{k+1}(F_{n-k-1}+F_{n-k-2})+F_kF_{n-k-1}=\\&F_{n-k-1}(F_{k+1}+F_k)+F_{n-k-2}F_{k+1}=\\&F_{k+2}F_{n-k-1}+F_{k+1}F_{n-k-2}\end{aligned}$$

因而由数学归纳法就证明了(1).

(2) 由(1)，$F_{m+n}=F_{m+1}F_n+F_mF_{n-1}>F_{m+1}F_n\geqslant F_mF_n$.

(3) 由(2)，$F_{mn}>F_{(m-1)n}F_n>F_{(m-2)n}F_n^2>\cdots>F_n^m$.

(AMM E1347)

19. 设 $F_0, F_1, \cdots, F_n$ 是任意 $n+1$ 个连续的斐波那契数，证明：$\sum_{k=0}^{n} C_n^k F_{n-k} = F_{2n}$.

证明 利用斐波那契数的归纳定义可知 $F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}$，因而对 $k=1$，成立

$$F_{2n} = F_{2n-k} + C_k^1 F_{2n-k-1} + C_k^2 F_{2n-k-2} + \cdots + F_{2n-2k}$$

假设对小于或等于 k 的正整数上述公式成立，那么在上式右边用 $F_{j-1} + F_{j-2}$ 代替 F_j，用 C_{k+1}^j 代替 $C_k^{j-1} + C_k^j$ 就得出

$$F_{2n} = F_{2n-(k+1)} + C_{k+1}^1 F_{2n-(k+1)-1} + \cdots + F_{2n-2(k+1)}$$

因而由数学归纳法就证明了对任意正整数 k，成立式子

$$F_{2n} = F_{2n-k} + C_k^1 F_{2n-k-1} + C_k^2 F_{2n-k-2} + \cdots + F_{2n-2k}$$

在此式中令 $k = n$ 即得欲证.

(AMM 10774)

20. 设 $F(1) = F(2) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2), n \geqslant 3$，证明：

$$(F(F(1\,998))^2 + F(F(1\,999))^2 = F(F(1\,997))F(F(2\,000))$$

证明 我们证明如果 $a \leqslant b$，且 a 是偶数，b 是奇数，那么就有

$$(F(a))^2 + (F(b))^2 = F(b-a)F(b+a)$$

在上面的式子中令 $a = F(1\,998), b = F(1\,999)$ 就可得到所要证的等式. 由于当且仅当 $3 \mid n$ 时，$2 \mid F(n)$. 我们对奇数 n 应用公式 $F(n) = \frac{\tau^n + \tau^{-n}}{\sqrt{5}}$，而对偶数 n 应用公式 $F(n) = \frac{\tau^n - \tau^{-n}}{\sqrt{5}}$，其中 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 由此就得出

$$F(b-a)F(b+a) = \frac{\tau^{b-a} + \tau^{a-b}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\tau^{b+a} + \tau^{-a-b}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\tau^{2b} + \tau^{-2b} + \tau^{2a} + \tau^{-2a}}{5} =$$

$$\left(\frac{\tau^b + \tau^{-b}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\tau^a + \tau^{-a}}{\sqrt{5}}\right)^2 +$$

$$(F(b))^2 + (F(a))^2$$

(AMM E1846)

21. 设由 $f_1 = 1, f_2 = x, f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$ 定义了一个斐波那契多项式，证明：

$$f_k^2(x) \leqslant (x^2+1)^2(x^2+2)^{k-3}, k > 2$$

证明 易于验证，所说的不等式当 $n=3$ 时成立. 假设，当 $k>2$ 时成立

$$f_k^2(x) \leqslant (x^2+1)^2(x^2+2)^{k-3}$$

那么 $f_{k+1}^2(x) = (xf_k(x) + f_{k-1}(x))^2 \leqslant$

$$(x(x^2+1)(x^2+2)^{\frac{k-3}{2}} + (x^2+1)(x^2+2)^{\frac{k-4}{2}})^2 \leqslant$$

$$(x^2+1)^2(x^2+2)^{k-2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{1}{x^2+2}\right)$$

由不等式 $x^2(x^2+2) < (x^2+1)^2$ 可以得出上式括号中的式子是小于 1 的，因而

$$f_{k+1}^2(x) \leqslant (x^2+1)^2(x^2+2)^{k-2}$$

故由数学归纳法就证明了所说的不等式.

注 由此问题的迭代程序产生的多项式实际上就是所谓切比雪夫(Chebyshev)多项式

$$i^{n-1}f_n(x) = U_{n-1}\left(\frac{1}{2}ix\right), U_{n-1}(\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

(AMM E2497)

22. 设 a_1 和 a_2 是任意整数，由 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ 定义了双边无穷叙列

$$\cdots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \cdots$$

证明：对所有的整数 j, k 都有 $a_k \mid (a_{k+2j} + a_{k-2j})$.

证明 令 $m_j^{(k)} = a_{k+2j} + a_{k-2j}, n_j^{(k)} = a_{k+2j+1} - a_{k-2j-1}$，那么

$$n_j^{(k)} + m_j^{(k)} = m_{j+1}^{(k)}, n_j^{(k)} + m_{j+1}^{(k)} = n_{j+1}^{(k)}$$

显然有 $a_k \mid m_0^{(k)} = 2a_k, a_k \mid n_0^{(k)} = a_k$

由上面所给的式子还得出：如果 $a_k \mid m_j^{(k)}, a_k \mid n_j^{(k)}$，那么 $a_k \mid m_{j+1}^{(k)}, a_k \mid n_{j+1}^{(k)}$，因而由数学归纳法就证明了对所有的 j 成立 $a_k \mid m_j^{(k)}, a_k \mid n_j^{(k)}$.

(AMM E2367)

23. 设由递推式 $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = -1$ 定义了数列 a_n，证明：$2^{n+1} - 7a_{n-1}^2$ 是一个完全平方数.

证法 1 显然结论对 $n=2$ 成立. 现在假设结论对 $n \geqslant 2$ 成立，那么我们有

$$(2a_{n+1} + a_n)^2 = (-a_n - 4a_{n-1})^2 = a_n^2 + 8a_na_{n-1} + 16a_{n-1}^2 =$$

$$2(4a_n^2 + 4a_na_{n-1} + a_{n-1}^2) + 14a_{n-1}^2 - 7a_n^2 =$$

$$2(2^{n+1}-7a_{n-1}^2)^2+14a_{n-1}^2-7a_n^2=$$
$$2^{n+2}-7a_n^2$$

因此由数学归纳法就证明了所要证的结论.

证法2 首先用数学归纳法证明 $a_n^2-a_{n+1}a_{n-1}=2^{n-1},n\geqslant 2$,然后在此式两边乘以4,代入 $-a_{n+1}=a_n+2a_{n-1}$,再从两边减去 $7a_{n-1}^2$ 就得到

$$(2a_n+a_{n-1})^2=2^{n+1}-7a_{n-1}^2$$

(AMM 10211)

24.设 a,b,c,d 都是整数,$K=2(b^2+a^2d-abc)$,$y_0=a^2$,$y_1=b^2$,且 $y_{n+1}=(c^2-2d)y_n-d^2y_{n-1}+Kd^n,n\geqslant 1$.

证明:所给数列的每一项都是一个整数的平方.

证明 对确定的 a,b 和固定的 c,d,考虑一个 a,b 生成的整环 $Z[a,b]$ 上的由 $T(a)=b,T(b)=bc-ad$ 生成的自同态.注意

$$T(k)=2[(bc-ad)^2+b^2d-b(bc-ad)c]=$$
$$2(b^2+a^2d-abc)d=Kd$$

以及 $$T(y_0)=b^2=y_1,T(y_1)=(bc-ad)^2=y_2$$

假设对所有小于或等于 n 的正整数成立 $T(y_n)=y_{n+1}$,那么

$$T(y_{n+1})=(c^2-2d)T(y_n)-d^2T(y_{n-1})+T(K)d^n=$$
$$(c^2-2d)y_{n+1}-d^2y_n+Kd^{n+1}=y_{n+2}$$

由此即可得出

$$y_n=T^n(y_0)=T^n(a^2)=(T^n(a))^2$$

(AMM 10356)

25.设 $$a_0=0,a_1=1,a_2=0,a_3=1$$
$$a_{n+3}=\frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}a_{n+2}+$$
$$(n^2+n+1)a_{n+1}-\frac{n+1}{n}a_n$$

证明:对每一个 $n\geqslant 0$,a_n 都是一个完全平方数.

证明 令 $c_0=0,c_1=1,c_{n+2}=nc_{n+1}+c_n$,那么

$$c_{n+3}=(n+1)c_{n+2}+c_{n+1}$$
$$c_n=c_{n+2}-nc_{n+1}$$

将以上两式平方后得

$$c_{n+3}^2=(n+1)^2c_{n+2}^2+c_{n+1}^2+2(n+1)c_{n+2}c_{n+1}$$

$$c_n^2=c_{n+2}^2+n^2c_{n+1}^2-2nc_{n+2}c_{n+1}$$

从以上两式中消去 $c_{n+2}c_{n+1}$ 项后得

$$c_{n+3}^2=\frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n}c_{n+2}^2+(n^2+n+1)c_{n+1}^2-\frac{n+1}{n}c_n^2$$

因此 c_n^2 和 a_n 满足完全同样的递推关系，此外还有 $c_2=0$，$c_3=1$。因此 c_n^2 和 a_n 也满足完全同样的初始条件，这就说明对所有的 $n\geqslant 0$，$a_n=c_n^2$，因而是一个完全平方数.

(AMM 10947)

26. 证明：$\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}=$

$$\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

(J. G. Wendel, Shank's Identity is Elementary, AMM Vol. 95(1988), No.6: 534)

证明 设 $x,y>0$，$A=xy+\sqrt{x^2+2xy+y^2}$，$B=y+\sqrt{x^2(1+y^2)+2xyx}$，那么显然

$$A=B=x+y+xy$$

现在令 $x=\sqrt{11-2\sqrt{29}}$，$y=\sqrt{11+2\sqrt{29}}$，则易于算出

$$xy=\sqrt{5}$$

$$A=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$$

$$B=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}$$

(AMM E2619)

27. 设 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+[\sqrt{a_n}]$，$n=1,2,\cdots$，证明：当且仅当对某个正整数 k，$n=2^k+k-2$ 时，a_n 是一个完全平方数.

证明 对 $k\geqslant 1$ 实行数学归纳法，证明当 $n=2^k+k-2$ 时，$n=(2^{k-1})^2$ 以及当 $n_{k-1}<m<n_k$ 时 a_m 不是一个完全平方数 $(k\geqslant 2)$.

对 $k=1$，显然我们的断言为真. 现在假设断言对某个 $k\geqslant 1$ 为真，由对 i 的归纳得到

$$a_{n+2i+1}=(2^{k-1}+i)^2+2^{k-1}-i,0\leqslant i\leqslant 2^{k-1}$$

$$a_{n+2i}=(2^{k-1}+i-1)^2+2^k,1\leqslant i\leqslant 2^{k-1}$$

其中 $n=n_k$. 对 $i=2^{k-1}$，我们有

$$n+2i+1=n+2^k+1=n_{k+1}$$

和
$$a_{n_{k+1}}=(2^{k-1}+2^{k-1})^2=(2^k)^2$$

而上面已证的两个式子表明对 $n_k < m < n_{k+1}$，a_m 不是一个完全平方数.

(AMM E3391)

28. 设 $f(n)$ 是定义在正整数集上的函数，$f(1)=1$，且

$$f(n+1)=\begin{cases}f(n)+2, & \text{如果 } f(f(n)-n+1)=n\\ f(n)+1, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求出一个 $f(n)$ 的简明表达式.

(2) 证明：如果 $f(f(n)-n+1)\neq n$，那么 $f(f(n)-n+1)=n+1$.

解 我们证明 $f(n)=[\varphi n]$，其中 $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. 设 $F(n)=[\varphi n]$，那么 $F(1)=1$. 我们将用数学归纳法证明 $f(n)$ 和 $F(n)$ 满足同样的递归定义，因而是同样的函数.

注意 φ 满足关系 $\varphi^2-\varphi=1$.

首先看出 $F(n+1)-F(n)$ 只能是1或2. 这可从

$$F(n+1)-F(n)<\varphi(n+1)-(\varphi n-1)=\varphi+1<3$$

和 $$F(n+1)-F(n)>\varphi(n+1)-1-\varphi n=\varphi-1>0$$

得出.

其次，设 $H(n)=F(F(n)-n+1)$，那么从

$$H(n)<\varphi(\varphi n-n+1)=(\varphi^2-\varphi)n+\varphi<n+2$$

和 $$H(n)>\varphi(\varphi n-1-n+1)=(\varphi^2-\varphi)n-1=n-1$$

可以得出 $H(n)$ 只可能等于 n 或 $n+1$.

现在设 $F(n+1)-F(n)=1$，这蕴含

$$\begin{aligned}H(n)&=F(F(n+1)-n)=[\varphi[\varphi(n+1)]-n]>\\&\varphi(\varphi(n+1)-1-n)-1=\\&\varphi(\varphi-1)n+\varphi(\varphi-1)-1=n\end{aligned}$$

因此 $$H(n)=n+1$$

另一方面，$F(n+1)-F(n)=2$ 蕴含

$$\begin{aligned}H(n)&=F(F(n+1)-n-1)<\varphi(\varphi(n+1)-n-1)=\\&\varphi(\varphi-1)n+\varphi(\varphi-1)=n+1\end{aligned}$$

因此这时 $$H(n)=n$$

这就完成了归纳法的证明，因此必有 $F=f$.

(AMM E3374)

29. 设 J 是一个非负整数的函数，$J(0)=J(1)=2$，并且

$$J(n+1)=J(n)+\left[\frac{J(n-1)}{2}\right],n\geqslant 1$$

证明： $$[(\sqrt{3}-1)(J(n)+1)]=J(n-1),n\geqslant 1$$

证明 首先证明一个引理.

引理 设 b 是一个正整数，$a=[(b+1)(\sqrt{3}-1)]$，$c=b+\left[\frac{a}{2}\right]$，则 $[(c+1)(\sqrt{3}-1)]=b$.

引理的证明 由假设有 $a<(b+1)(\sqrt{3}-1)<a+1$，由于 a 是整数，故

$$b+\frac{a-1}{2}\leqslant c\leqslant b+\frac{a}{2}$$

不等式 $c\leqslant b+\frac{a}{2}$ 和 $a<(b+1)(\sqrt{3}-1)$ 蕴含

$$c+1<\frac{b}{2}(\sqrt{3}+1)+\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

在此不等式两边乘以 $\sqrt{3}-1$ 即得出不等式

$$(c+1)(\sqrt{3}-1)<b+1$$

不等式 $(b+1)(\sqrt{3}-1)<a+1$ 和 $b+\frac{a+1}{2}\leqslant c+1$ 蕴含

$$\frac{b}{2}(\sqrt{3}+1)+\frac{\sqrt{3}-1}{2}<c+1$$

在此不等式两边乘以 $\sqrt{3}-1$ 得出不等式

$$b+\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}<(c+1)(\sqrt{3}-1)$$

因此
$$b<(c+1)(\sqrt{3}-1)$$

这就证明了引理.

由所证的引理和数学归纳法就可得出要证的结果.

(AMM 5562)

30. 设 m,n 都是整数，叙列 $P(m,n)$ 和 $Q(m,n)$ 定义如下：对 $m\geqslant 0$ 和 $n\geqslant 1$ 有 $P(m,0)=1$ 和 $P(0,n)=0$，对 $m,n<0$ 有 $P(m,n)=0$，对 $m\geqslant 1$ 有

$$P(m,n)=\sum_{j=0}^{n}P(m-1,j)$$

对 $m\geqslant 1$

$$Q(m,n)=P(m-1,n)+P(m-1,n-1)$$

用 m,n 表出 $Q(m,n)$.

解 我们有 $P(1,n)=C_n^0$，$P(2,n)=n+1=C_{n+1}^1$，$n\geqslant 0$，利用公式

$$C_i^i+C_{i+1}^i+\cdots+C_{i+k}^i=C_{i+k+1}^{i+1}$$

和数学归纳法就得出

$$P(m,n)=C_{m-1+n}^{m-1}$$

现在令 $Q^*(q,n,s)=\sum_{j=0}^{s}P(q,n-j),s\leqslant n$,对 $q\geqslant 0$ 就得到

$$Q^*(q,n,s)=C_{q+n}^{q}-C_{q+n-s-1}^{q}$$

注意 $Q(m,n)=Q^*(m-1,n,2)$,于是最后就得出

$$Q(m,n)=C_{m+n-1}^{n-1}-C_{m+n-4}^{n-1}$$

(AMM E2096)

31. 设 $m<n$ 都是正整数,$x_i,i\leqslant n$ 都是实数,下列两式是否能同时成立?

$$m^2\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2-1\right)=m\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right)^2+1$$

$$n^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1\right)=n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^2+1$$

解 对每个 $k\leqslant n$,设

$$\bar{x}_k=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k},y_k=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x}_k)^2=\sum_{i=1}^{k}x_i^2-k\bar{x}_k^2$$

由于 $m<n$,故 $y_m\leqslant y_n$. 而所给的两个式子等价于 $y_m=1+\frac{1}{m^2}$ 和 $y_n=1+\frac{1}{n^2}$,由于

$$y_m=1+\frac{1}{m^2}>1+\frac{1}{n^2}=y_n$$

所以所给的两个式子不可能同时成立.

(AMM E2679)

32. 证明:如果正整数 m 有一个大于3的素因数,则 4^m-2^m+1 是合数.

证明 设 r,s 是互素的正整数,那么多项式 $P(x)=\frac{x^{rs}-1}{x^s-1}$ 可被多项式 $Q(x)=\frac{x^r-1}{x-1}$ 整除. 为证明这一断言,我们看出 Q 的所有零点都是单的,并且如果 $Q(\alpha)=0$,那么 $\alpha^r=1,\alpha\neq 1$,这就得出 $\alpha^{rs}=1,\alpha^s\neq 1$,即 $P(\alpha)=0$. 也就是说,$Q(x)$ 的根都是 $P(x)$ 的根. 因此由带余数定理可知 $P(x)=Q(x)R(x)$,其中 $R(x)$ 是一个整系数多项式.

现在设 $m=ns$,其中 $s>3$ 是一个素数,又取 $r=3$,那么

$$P(x)=x^{2s}+x^s+1,Q(x)=x^2+x+1$$

因此 $Q(-2^n)=4^n-2^n+1$ 整除 $P(-2^n)=4^m-2^m+1$.

(AMM 10947)

33. 证明：在形如 $J_m = m^2 + 1, m = 1, 2, \cdots$ 的集合中含有无穷多个合数 $J_N = J_m J_n$. 事实上，对任意的整数 m，可以求出两对对应的整数 n, N.

证明 由于对任意 a 恒有

$$(a^2+1)((a+1)^2+1) = (a^2+a+1)^2+1$$

因此对任意 $m \geqslant 2$，我们有 $J_{m-1}J_m = J_{m^2-m+1}$ 和 $J_m J_{m+1} = J_{m^2+m+1}$. 对 $m = 1$, $J_1 J_2 = J_3$ 和 $J_1 J_{12} = J_{17}$.

此外，复合数 J_N 也可由公式 $J_m J_{2m^2} = J_{2m^3+m}$ 获得.

(AMM 10947)

34. 确定使得不等式组

$$k < x^k < k+1, k = 1, \cdots, n$$

成立的整数 n 的最大值. 如果把 $<$ 号改成 $\leqslant$ 号，结果会发生什么变化？

解 n 最大不能超过 4. 如果 $n \geqslant 5$，那么不等式 $3 \leqslant x^3$ 和 $x^5 \leqslant 6$ 将蕴含 $3^5 \leqslant 6^3$，这是不可能的. 对 $n = 4$，任何满足 $3^{1/3} < x < 5^{1/4}$ 的数 x 都可使所说的不等式成立. 把 $<$ 号改成 $\leqslant$ 号，结果不会发生任何改变.

(AMM 11119)

35. 设 x, y 是正整数，证明：如果 $x^2 - Dy^2 = N$，那么

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{2y^2} \Leftrightarrow |N| < \sqrt{D}$$

证明 我们有

$$N = x^2 - Dy^2 = y^2\left(\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right)\left(\frac{x}{y} + \sqrt{D}\right)$$

设 $\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{2y^2}$，则用 $2y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{D}\right)$ 乘以此不等式两边就得到 $2|N| < \frac{x}{y} + \sqrt{D}$，因此 $\frac{x}{y} - |N| > |N| - \sqrt{D}$，此外还有

$$\frac{x}{y} - \sqrt{D} \leqslant \left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{2y^2} < \frac{1}{y}$$

因此
$$\sqrt{D} > \frac{x-1}{y}$$

如果 $|N| \geqslant \sqrt{D}$，那么就得出

$$\frac{x}{y} > |N| \geqslant \sqrt{D} > \frac{x-1}{y}$$

由于 x, y 和 N 都是整数,这就得出矛盾,所以必有 $|N|<\sqrt{D}$.

另一方面,设 $\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|\geqslant\frac{1}{2y^2}$,则用 $2y^2\left(\frac{x}{y}+\sqrt{D}\right)$ 乘以此不等式两边就得到

$$2|N|\geqslant\frac{x}{y}+\sqrt{D}$$

如果 $|N|<\sqrt{D}$,则由此得出

$$2|N|\geqslant\frac{x}{y}+\sqrt{D}>\frac{x}{y}+|N|$$

因而
$$|N|>\frac{x}{y}$$

设 $k=y|N|-x$,那么就得出

$$\begin{aligned}-N&=(y\sqrt{D})^2-x^2>(y|N|)^2-x^2=\\&(x+k)^2-x^2=2kx+k^2=\\&(2k-1)x+(k^2-k)+(x-k)>x-k=\\&y|N|\geqslant|N|\end{aligned}$$

矛盾,所得的矛盾说明必须有 $|N|\geqslant\sqrt{D}$,或者换句话说就是,如果 $|N|<\sqrt{D}$,则必须

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|<\frac{1}{2y^2}$$

这就证明了结论的另一半.

(AMM E1950)

36. 证明:不等式

$$\left(1+\frac{x}{[x]}\right)^{[x]}\leqslant 2^x\leqslant\left(1+\frac{x}{[x+1]}\right)^{[x+1]}$$

证明 把所要证的不等式写成

$$\left(1+\frac{x}{[x]}\right)^{\frac{[x]}{x}}\leqslant 1+1\leqslant\left(1+\frac{x}{[x+1]}\right)^{\frac{[x+1]}{x}}$$

那么从伯努利(Bernoulli)不等式 $(1+x)^r\geqslant(<)1+rx$ 对正的 $r\geqslant1(<1)$ 和 $x\geqslant0$ 就可直接得出上述不等式.

(AMM E1291)

37. 设 a,b,c,d 是使得 $c+d\leqslant\min(a,b)$ 的非负实数,证明:

$$ad+bc\leqslant ab$$

证明 我们有

$$ad+bc\leqslant(c+d)\max(a,b)\leqslant\min(a,b)\max(a,b)=ab$$

(AMM E2032)

38. 设 a,b,c 都是实数,证明:

$$\min[(b-c)^2,(c-a)^2,(a-b)^2] \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

证明 我们证明更一般的不等式

$$\min_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}(a_i-a_j)^2 \leqslant \frac{12}{n(n^2-1)}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$$

为了证明上式,给每个 a_i 乘以一个 λ,显然所得的不等式与原来的不等式是等价的.因此不失一般性,可设 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$.重新排序又不妨设 $a=a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$.再设 $\mu^2=\frac{12}{n(n^2-1)}$.如果所说的不等式不成立,那么,对 $i=1,2,\cdots,n-1$,$a_{i+1}-a_i>\mu$,因此

$$a_i > a+(i-1)\mu, i=2,3,\cdots,n$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 > \sum_{i=0}^{n-1}(a+i\mu)^2$$

用 $f(a)$ 表示右边,由于当 $a\to\pm\infty$ 时,$f(a)\to+\infty$,并且 $f(a)$ 是 a 的二次式,因此当 $a=-\frac{(n-1)\mu}{2}$ 时有最小值.计算得出

$$f\left(-\frac{(n-1)\mu}{2}\right)=1$$

因此
$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2 > \sum_{i=0}^{n-1}(a+i\mu)^2 \geqslant 1$$

这与 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$ 矛盾.

(AMM 11075)

39. 设 a,b,c 都是复数,证明:$|\sqrt{a^2+b^2+c^2}|\leqslant \max\{|a|+|b|,|b|+|c|,|c|+|a|\}$.

证明 不失一般性,不妨设 $|a|\leqslant|b|\leqslant|c|$,那么

$$\begin{aligned}
|\sqrt{a^2+b^2+c^2}| &\leqslant \sqrt{|a^2+b^2+c^2|}\leqslant\\
&\sqrt{|a^2|+|b^2|+|c^2|}\leqslant\\
&\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2}\leqslant\\
&\sqrt{|b|^2+2|b||c|+|c|^2}\leqslant\\
&\sqrt{(|b|+|c|)^2}\leqslant|b|+|c|\leqslant\\
&\max\{|a|+|b|,|b|+|c|,|c|+|a|\}
\end{aligned}$$

40. 设 $a,b,c,d,ad\neq bc$ 都是复数，x 是实数，证明：

$$\frac{|a\bar{b}-b\bar{a}|}{|ad-bc|+|a\bar{d}-b\bar{c}|}\leqslant\left|\frac{ax+b}{cx+d}\right|\leqslant\frac{|ad-bc|+|a\bar{d}-b\bar{c}|}{|c\bar{d}-d\bar{c}|}$$

如果 $c\bar{d}-d\bar{c}=0$ 将如何？

(AMM E1840)

证明 由问题的条件可知或者 $a\neq 0,c\neq 0$ 或者 $b\neq 0$, $d\neq 0$，不失一般性，我们可设 $ac\neq 0$. 由于我们总可以做变换 $y=\frac{1}{x}$，因此我们只须证明所给不等式的左边就够了. 我们有

$$|a\bar{b}-b\bar{a}||cx+d|=|a\bar{b}cx-\bar{a}bcx+a\bar{b}d-\bar{a}bd|=$$
$$|a\bar{a}dx-\bar{a}bcx+a\bar{b}d-b\bar{b}c-\bar{a}adx+a\bar{b}cx-\bar{a}bd+b\bar{b}c|\leqslant$$
$$|a\bar{a}dx-\bar{a}bcx+a\bar{b}d-b\bar{b}c|+|-\bar{a}adx+a\bar{b}cx-\bar{a}bd+b\bar{b}c|=$$
$$|\bar{a}x+\bar{b}||ad-bc|+|ax+b||-\bar{a}d+\bar{b}c|=$$
$$|ax+b|(|ad-bc|+|a\bar{d}-b\bar{c}|)$$

由上式即可得出所需的不等式. 又由微积分计算可知 $|cx+d|$ 的最小值是 $\frac{|c\bar{d}-\bar{c}d|}{2|c|}$，因此当且仅当 $|c\bar{d}-\bar{c}d|=0$ 时，$|cx+d|$ 可以在 x 等于某个实数时成为零.

41. 设 $a,b,c,d,ad\neq bc$ 都是复数，$ac\neq 0$. 证明

$$\frac{\max(|ac|,|ad+bc|,|bd|)}{\max(|a|,|b|)\max(|c|,|d|)}\geqslant\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

(AMM E2217)

证明 设 $\frac{a}{b}=r,\frac{d}{c}=s,\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\tau$，那么 $\tau^2=1-\tau$ 并且 $0<\tau<1$.

所需的不等式等价于

$$\max(1,|r+s|,|rs|)\geqslant\tau\max(1,|r|)\cdot\max(1,|s|)$$

一共可能发生三种情况：

ⅰ $|r|\geqslant 1$，$|s|\geqslant 1$；这时左边 $\geqslant|r|\cdot|s|>\tau|r|\cdot|s|=$ 右边.

ⅱ $|r|<1,|s|<1$；这时左边 $\geqslant 1>\tau=$ 右边.

ⅲ $|r|<1,|s|>1$；这时我们只要证明 $\max(1,|r+s|,|rs|)\geqslant\tau|s|$ 即可. 当 $|r+s|\geqslant\tau|s|$ 或者 $1\geqslant\tau|s|$（即 $|s|\leqslant\frac{1}{k}$）时，此式都成立，仅有的另外的可能是 $|r+s|<\tau|s|$ 以及 $1<\tau|s|$，在这种情况下我们有

$$|r|+|r+s|=|-r|+|r+s|\geqslant|s|$$

因此　$|r| \geqslant |s| - |r+s| \geqslant |s| - \tau|s| = \tau^2|s|$

因而由于 $|s| > 1$ 就有

$$\max(1, |r+s|, |rs|) \geqslant |r| \cdot |s| \geqslant \tau^2|s|^2 > \tau|s|$$

即我们所需的不等式成立. 由于 r, s 的地位是对称的, 因此当 $|r| > 1, |s| < 1$ 时同理可证不等式成立. 这就完成了证明.

注　τ 是最好可能的常数, 由于当 $|s| = \frac{1}{\tau} > 1$ 以及 $r = -\tau^2 s$, $|r+s| = \tau|s| = 1$, 以及 $|r| \cdot |s| = \tau^2|s|^2 = 1$ 时等号成立.

(AMM E2031)

42. 设 a 是任意不等于零的实数, 证明:

$$\left|\sqrt[3]{-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{1}{27}}}\right| < \sqrt[3]{|a|}$$

证明　设左边为 $|x|$, 那么不难证明 $x^3 + x + a = 0$. 由于 x^3 和 x 同号, 故 $|x^3| < |a|$, 由此即可得出结果.

(AMM 10944)

43. 设 a, b, c 都是正实数, 并且 $abc \geqslant 2^9$, 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}} \geqslant \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}$$

证明　设 $X = \sqrt{(1+a)(1+b)}$, $Y = \sqrt{(1+b)(1+c)}$, $Z = \sqrt{(1+a)(1+c)}$, $p = \sqrt[3]{abc}$, 那么要证的不等式等价于

$$(X+Y+Z)^2 \geqslant \frac{9}{1+p}(1+a)(1+b)(1+c)$$

上式的右边是

$$R = \frac{9}{1+p}(1+(a+b+c)+(ab+bc+ac)) + \frac{9p^3}{1+p}$$

而由对正数 x, y, z 的算术 - 几何平均不等式 $x+y+z \geqslant 3\sqrt[3]{xyz}$ 可得, 上式的左边 L 满足

$$L \geqslant (1+a)(1+b)+(1+b)(1+c)+(1+a)(1+c)+6((1+1)(1+b)(1+c))^{\frac{2}{3}}$$

由算术 - 几何平均不等式还可得出

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 1+(a+b+c)+(ab+bc+ac)+abc \geqslant (1+p)^3$$

因此, 只须证明

$$3+2(a+b+c)+(ab+bc+ac)+6(1+p)^2 \geqslant$$

$$\frac{9}{1+p}(1+(a+b+c)+(ab+bc+ac))+\frac{9p^3}{1+p}$$

即可，而这又等价于

$$(ab+bc+ac)(p-8)+(a+b+c)(2p-7)\geqslant 3p^3-18p^2-21p$$

注意 $p\geqslant 8$，那么两次应用算术 - 几何平均不等式就可得出

$$(ab+bc+ac)(p-8)\geqslant 3p^2(p-8)$$

和

$$(a+b+c)(2p-7)\geqslant 3p(2p-7)$$

联合上面两个式子即可得出上面提到的等价不等式.

(AMM E3087)

44. 设 $a_i,i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2$ 都是实数，$0\leqslant a_i\leqslant 1$，求出

$$S_n=(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_n-a_1)^2$$

的最佳上界，并确定所有达到上界的情况.

解 更一般的，我们求出循环和

$$S(n,p)=|a_1-a_2|^p+|a_2-a_3|^p+\cdots+|a_n-a_1|^p$$

的最大值.

显然 $n=2m$ 的情况是平凡的. 在这种情况下，$\max S(n,p)=n$，并且最大值在

$$a_1=a_3=\cdots=a_{2m-1}=1,a_2=a_4=\cdots=a_{2m}=0$$

时或两组等式反过来时达到. 对 $n=2m+1$ 是奇数的情况，我们将表明

$$\max S(2m+1,p)=\begin{cases}2m-1+2^{1-p},0<p\leqslant 1\\2m,\quad p>1\end{cases}$$

证明：假设上面的最大值在 $a_1,a_2,\cdots,a_{2m+1}$ 达到，那么或者 i 所有的 a_i 都是0或1；或者 ii 存在一个 a_i 使得 $0<a_i<1$. 在第一种情况下，对某个 $v,a_v=a_{v+1}$，那样，对任何 $p>0$ 都有 $S(2m+1,p)\leqslant 2m$. 在第二种情况中，设 $0<a_v<1$，那么 $a_{v-1}<a_v$ 以及 $a_{v+1}<a_v$ 都不可能成立，同理 $a_{v-1}>a_v$ 以及 $a_{v+1}>a_v$ 都不可能成立. 因此只可能 $a_{v-1}>a_v>a_{v+1}$ 或反过来. 无论发生哪种情况，都有

$$|a_{v-1}-a_v|^p+|a_v-a_{v+1}|^p\leqslant\begin{cases}|a_{v-1}-a_{v+1}|\leqslant 1,\quad p>1\\2\left(\frac{1}{2}|a_{v-1}-a_{v+1}|\right)^p\leqslant 2^{1-p},0<p\leqslant 1\end{cases}$$

由于显然对所有 $p>0$ 有

$$\sum_{i\neq v,v+1}|a_i-a_{i+1}|^p\leqslant 2m-1$$

这就得出所要的等式. 上界可在, 比如 $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = 1, a_{2k} = 0, a_{2k+1} = 1, 2 \leqslant k \leqslant m$ 时达到.

(AMM E2815)

45. 证明: 当 $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \pi$ 时, $\cos x + \cos y \leqslant 1 + \cos xy$.

证明 由于余弦是偶函数, 我们不妨设 $x, y \geqslant 0$. 由于当 $x \leqslant 1$ 时, 有

$$xy \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi} < \pi, \cos y \leqslant \cos xy$$

因此
$$\cos x + \cos y \leqslant 1 + \cos xy$$

所以我们可以进一步设 $x, y > 1$. 这时, 从 $xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2} \leqslant \frac{\pi}{2}$ 得出 $\cos xy > 0$. 因此如果要证的不等式不成立, 则有 $\cos x + \cos y \geqslant 1$, 因此 $\cos x \geqslant 1 - \cos y > 1 - \cos 1 > 0.45$, 而 $x < \arccos 0.45 < 1.2$, 同理 $y < 1.2$, 而 $xy < (1.2)^2 = 1.44$, 因此

$$1 + \cos xy > 1 + \cos 1.44 > 1.13 > 2\cos 1 > \cos x + \cos y$$

矛盾.

注 Grosswald 表明所要证的不等式在 $x^2 + y^2 \leqslant 4.1$ 时一直有效.

(AMM E2368)

46. 证明: 如果 $1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < y_1 < y_2 < \cdots < y_m$ 都是整数, 并且 $\sum x_i \geqslant \sum y_i$, 那么 $\prod x_i > \prod y_i$.

证明 为了方便起见, 我们在更弱的条件

$$1 < x_1 < x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant \cdots \leqslant x_k < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \cdots \leqslant y_m$$

下证明所说的不等式.

注意 $k \geqslant 2$ 以及 $k > m$. 设 $s = \sum x_i$, 我们对 k 和 s 实行数学归纳法. 当 $k = 2$ 时, 我们注意 $m = 1, x_1 \geqslant 2, x_2 \geqslant 3, s \geqslant 5$, 那么 $x_1 + x_2 \geqslant y_1$, 由于 $x_1x_2 - x_1 - x_2 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1 > 0$, 这蕴含 $x_1x_2 > y_1$. 这证明了当 $k = 2$ 时命题成立. 现在假设命题对所有 $k < j$ 成立, 我们看 $k = j$ 时的情况. 观察情况 $x_1 = 2, x_2 = x_3 = \cdots = x_j = 3$ 可以看出最小的 s 是 $3j - 1$, 这里 $\prod x_i = 2 \cdot 3^{j-1}$ 并且对所有的 i, $y_i \geqslant 4$. 由算数 - 几何平均不等式得出

$$\prod y_i \leqslant \left(\frac{\sum y_i}{m}\right)^m \leqslant \left(\frac{s}{m}\right)^m \leqslant \left(\frac{3j-1}{m}\right)^m$$

此外还有 $\frac{s}{m} \geqslant \sum \frac{y_i}{m} \geqslant 4$ 以及 $m \leqslant \frac{s}{4} = \frac{3j-1}{4}$. 对在这些关系限制下的 m, 容易证明 $\left(\frac{3j-1}{m}\right)^m$ 是 m 的递增函数, 对 m 微分其对数得出 $\ln(3j-1)-1-\ln m$. 由于从 $\frac{s}{m} \geqslant 4 > e$ 可以得出 $3j-1 > me$, 因此上述导数是正的. 因此只须证明对最大的 m, 即 $m = \frac{3j-1}{4}$, $2\cdot 3^{j-1} > \left(\frac{3j-1}{m}\right)^m$ 即可, 而这只须通过简单的代数运算即可验证, 因此对 $k=j$ 和 $s=3j-1$ 命题成立.

现在我们在 $k=j$ 的情况下对 s 实行归纳法. 首先看看 $s > 3j-1$ 时的某些特殊情况, 我们假设命题对所有小于 s 的情况成立. 注意在所有情况中都有 $x_1 \geqslant 3$ 或者 $x_j \geqslant 4$.

在 $x_1 \geqslant 3$ 时, 注意 $x_1-1, x_2, x_3, \cdots, x_j, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}, y_m-1$ 构成一组满足条件的整数, 并且集合 $x_2, x_3, \cdots, x_j, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ 对这两个集合应用归纳法假设的不等式并将其相加就完成了证明.

当 $x_2 = 2$ 时, $x_j \geqslant 4$ 并且 $y_i \geqslant 5$, $i=1,2,\cdots,m$. 我们注意集合 $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_j-1, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}, y_m-1$ 和 $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, y_1, y_2, \cdots, y_{m-1}$ 满足假设, 因而成立相应的乘积不等式. 再一次, 将这两个不等式相加就得出所要的结果.

注 如果我们允许 x_i 和 y_i 都是实数, 则所说的不等式不一定成立, 例如 $x_1 = 2, x_2 = 2.01, x_3 = 2.1, y_1 = 3, y_2 = 3.1$. 然而在假设

$$e \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_k < y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3 \leqslant \cdots \leqslant y_m \text{ 和} \sum x_i \geqslant \sum y_i$$

下, 对实数 x_i 和 y_i 成立 $\prod x_i > \prod y_i$.

47. 正整数的一个 k 元组 $S=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 称为是 k-满足的, 如果 S 具有性质 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ 以及 $\sum a_i = \prod a_i = v(S)$. 证明: (AMM E2447)

(1) 当 $k \geqslant 2$ 时, $r+k \leqslant v(S) \leqslant 2k$, 其中 r 是使得的 $2n-n \geqslant k$ 最小正整数.

(2) 对任何 $c>1$, 存在 S, 使得 $ck < v(S)$.

证明 (1) 首先注意, 对任何正整数 m, n, 由

$$mn-m-n+1=(m-1)(n-1) \geqslant 0$$

可以得出
$$mn+1 \geqslant m+n$$
等号仅在 $m=1$ 或 $n=1$ 时成立.

设 $b_i = a_i - 1$, 那么

$$k+\sum_{1}^{k}b_i=\sum_{1}^{k}a_i=v(S)=\prod_{1}^{k}a_i=\prod_{1}^{k}(1+b_i)=$$
$$1+\sum_{i=1}^{k}b_i+b_k\sum_{i=1}^{k-1}b_i+\cdots\geqslant$$
$$1+\sum_{i=1}^{k}b_i+b_k\sum_{i=1}^{k-1}b_i$$

由此得出
$$k\geqslant 1+b_k\sum_{i=1}^{k-1}b_i$$

由于 $k\geqslant 2$ 并且 S 是 k - 满足的，因此 $a_k\geqslant a_{k-1}\geqslant 2, b_k\geqslant b_{k-1}\geqslant 1$，因此应用一开始所提到的不等式就得出

$$k\geqslant 1+b_k\sum_{i=1}^{k-1}b_i\geqslant\sum_{i=1}^{k}b_i$$

因此
$$v(S)=\sum_{i=1}^{k}a_i=k+\sum_{i=1}^{k}b_i\leqslant 2k$$

为得出 $v(S)$ 的下界，首先证明以下引理：

引理 设 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 是非负整数，并且 $\prod_{i=1}^{k}(1+b_i)>2^m$，那么 $\sum_{i=1}^{k}b_i>m$.

不失一般性，可设所有的 b_i 都是正的. 因为把等于零的那些 b_i 去掉后，我们就得出一个相同的不等式，只是元素的个数不一样. 对 m 实行归纳法，当 $m=0$ 时，引理显然成立. 现在假设引理对所有小于 m 的非负整数成立. 并设

$$\prod_{i=1}^{k}(1+b_i)>2^m$$

当 $k=1$ 时引理显然成立，因此可设 $k\geqslant 2$. 存在非负整数 h，使得

$$2^h\leqslant b_k\leqslant 2^{h+1}$$

现在
$$\prod_{i=1}^{k-1}(1+b_i)=\frac{\prod_{i=1}^{k}(1+b_i)}{1+b_k}>\frac{2^m}{2^{h+1}}=2^{m-h-1}$$

因此由归纳假设法得出

$$\sum_{i=1}^{k-1}b_i>m-h-1$$

由此得出
$$\sum_{i=1}^{k}b_i>m-h-1+b_k\geqslant m-h-1+2^h\geqslant$$
$$m-h-1+h+1=m$$

因此由数学归纳法就证明了引理(易于用各种方法，例如也可以用数学归纳法对非负整数 h 证明不等式 $2^h\geqslant h+1$).

下面开始证明(1)的另一部分，设 $b_i=a_i-1$，那么由 v 的定

又可知

$$k > 2^{r-1} - (r-1) \geqslant 2^{r-2}$$

由于 $$\prod_{i=1}^{s}(1+b_i) = v(S) = k + \sum_{i=1}^{s} b_i \geqslant k > 2^{r-2}$$

因此应用刚才所证的引理就得出

$$\sum_{i=1}^{s} b_i > s - 2$$

那样 $$v(S) = k + \sum_{i=1}^{s} b_i > k + r - 2,$$

但是 $$k > 2^{r-1} - (r-1) = 2^r - r + 1 \geqslant 2^r - r + 2$$

因此 $$v(S) > k + r - 2 \geqslant 2^{r-1}$$

由此又得出 $$\prod_{i=1}^{s}(1+b_i) = v(S) > 2^{r-1}$$

因而再次应用引理就得出

$$v(S) > k + r - 1 \geqslant k + r$$

在 $k = 2^r - r$ 的情况下，此下界可由 $k - r$ 个1和 r 个2所组成的 S 达到.

(2) 设 $S = \left\{1,\cdots,1,s+2,\frac{k+s}{s+1}\right\}$，其中 k,s 使得$\frac{s+2}{s+1} < c$，$(s+1) \mid (k+s)$（这只要选 k 使得$k \equiv 1(\bmod s+1)$ 即可），并且 $\frac{k+s}{k} \cdot \frac{s+2}{s+1} < c$，这时就有 $v(S) > ck$.

(AMM E2373)

48. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数. 证明：存在$\{1,2,\cdots,n\}$的一个子集 N，它既不包含任何3个连续的整数，也没有任何3个连续的整数不被包含在它内，使得

$$\left|\sum_{j\in N} x_j\right| \geqslant \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} |x_j|$$

证明：对于复数也成立一个类似的不等式，其最佳常数是 $\frac{1}{3\pi}$.

证明 设 $\sum |x_j| = s$，并且对 $i = 0,1,2$，设 $p(i) = \sum\{x_j \mid x_j \geqslant 0$ 并且 $j \equiv i(\bmod 3)\}$，$p(i) = \sum\{x_j \mid x_j < 0$ 并且 $j \equiv i(\bmod 3)\}$. 存在不同的 i,i' 使得或者$p(i)+p(i') \geqslant \frac{s}{3}$ 或者 $n(i)+n(i') \leqslant -\frac{s}{3}$. 不失一般性，可设第一种情况成立. 现在，如果

$$p(i) + p(i') \geqslant -n(i) - n(i')$$

那么 $$2(p(i)+p(i'))+n(i)+n(i')\geqslant\frac{s}{3}$$

因此或者 $$p(i)+p(i')+n(i)\geqslant\frac{s}{6}$$

或者 $$p(i)+p(i')+n(i')\geqslant\frac{s}{6}$$

类似的，如果 $$p(i)+p(i')\leqslant -n(i)-n(i')$$

那么或者 $$-p(i)-n(i')-n(i)\geqslant\frac{s}{6}$$

或者 $$-p(i')-n(i)-n(i')\geqslant\frac{s}{6}$$

这就得出了所需的不等式. 为了证明 $\frac{1}{6}$ 是最好的常数，取 $x_1=x_2=x_3=1$ 以及 $x_4=x_5=x_6=-1$.

现在设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是复数. 设 $z_j=r_je^{i\theta_j}$, $\sum|z_j|=\sum r_j=s$, $F(\theta)=\sum r_j|\cos(\theta_j-\theta)|$. 初等的计算表明

$$\int_0^{2\pi}F(\theta)\mathrm{d}\theta=4s$$

同时由平均值定理可知存在 θ_0 使得 $F(\theta_0)=\frac{2s}{\pi}$. 应用上面对实数已证的不等式，我们得出存在一个 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的具有上述性质的子集 N 使得

$$\left|\sum_{j\in N}r_j\cos(\theta_j-\theta_0)\right|\geqslant\frac{1}{6}F(\theta_0)=\frac{s}{3\pi}$$

由此得出

$$\frac{s}{3\pi}\leqslant\left|\sum_{j\in N}r_j\cos(\theta-\theta_0)\right|=\left|\sum_{j\in N}\mathrm{Re}(r_je^{i(\theta_j-\theta_0)})\right|=$$
$$\left|\mathrm{Re}(e^{-i\theta_0}\sum_{j\in N}z_j)\right|\leqslant\left|e^{-i\theta_0}\sum_{j\in N}z_j\right|=\left|\sum_{j\in N}z_j\right|$$

这就证明了对于复数的不等式. 为了证明 $\frac{1}{3\pi}$ 是最佳常数，设 $n=12m$ 并且考虑 n 个单位根 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$，其中 $\omega_j=e^{i\theta_j}$ 并且 $\theta_j=\frac{2\pi j}{n}$. 设 $N\subset\{1,2,\cdots,n\}$ 是任意的特殊子集. 令 $\omega=\sum_{j\in N}\omega_j$ 以及 $\theta=\arg\omega$. 注意

$$\left|\sum_{j\in N}\cos(\theta_j-\theta)\right|=\left|\sum_{j\in N}\mathrm{Re}(e^{i(\theta_j-\theta)})\right|=$$
$$\left|\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta}\sum_{j\in N}\omega_j\right)\right|=|\mathrm{Re}(e^{-i\theta}|\omega|e^{i\theta})|=$$
$$|\omega|=\left|\sum_{j\in N}\omega_j\right|$$

现在把单位圆分成 $4m$ 个半开子区间 $I_1,I_2,\cdots,I_{4m}$，其中

$$I_k=\left\{z\mid |z|=1,(k-1)\frac{\pi}{2m}<\arg z\leqslant\frac{k\pi}{2m}\right\}$$

注意由对 N 的假设，在任何区间 I_k 中，ω_j 的数目或者是1，或者是2，但是不可能是0或3（或更多）．此外如果我们通过考虑 $\omega'_j = e^{-i\theta}\omega_j$ 来变换 $\omega_j \pmod{2\pi}$，那么上述的事情对 ω'_j 将同样发生，除了对可能的"边际效应"，而这种效应对大的 n 可以忽略．（更确切地说，有一个（并且只有一个）I_k 可以包含0个或者3个 ω'_j，由于 N 可能包含（或者不包含）n，1和2或者 $n-1$，n 和1．）现在

$$\left|\sum_{j\in N}\omega_j\right| = \left|\sum_{j\in N}\cos(\theta_j-\theta)\right| = \left|\sum\nolimits_1\cos(\theta_j-\theta)+\sum\nolimits_2\cos(\theta_j-\theta)\right|$$

其中第一个和通过所有的使得 $\cos(\theta_j-\theta)>0$ 的 $j\in N$，而第二个和通过所有的使得 $\cos(\theta_j-\theta)<0$ 的 $j\in N$．那也就是第一个和通过所有使得 $\omega'_j\in I_1\cup\cdots\cup I_m\cup I_{3m+1}\cup\cdots\cup I_{4m}$ 的 $j\in N$，而第二个和通过所有使得 $\omega'_j\in I_{m+1}\cup\cdots\cup I_{3m}$ 的 $j\in N$（可以忽略那些使得 $\cos(\theta_j-\theta)=0$ 的 θ_j）．不失一般性，可设 $\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2\geqslant 0$．利用对充分大的 n，和式可被积分逼近这一事实，以及 $\sum\nolimits_1$ 中的每个子区间至多包含两个 ω'_j 和 $\sum\nolimits_2$ 中的每个子区间至少包含一个 ω'_j 的事实，我们看出

$$\left|\sum_{j\in N}\omega_j\right| = \sum\nolimits_1\cos(\theta_j-\theta)+\sum\nolimits_2\cos(\theta_j-\theta)\leqslant$$

$$\left(\frac{2m}{\pi}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos\theta'\,\mathrm{d}\theta' + \left(\frac{2m}{\pi}\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta'\,\mathrm{d}\theta' + o(1) =$$

$$\frac{4m}{\pi}+o(1) = \frac{1}{3\pi}+o(1) = \frac{1}{3\pi}\sum_{j=1}^{n}|\omega_j| + o(1)$$

这就证明了 $\frac{1}{3\pi}$ 是对于复数情况的最佳常数．

（AMM E1323）

> 49．证明：$nx^n = 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$ 的根除了一个根之外，其余的根的绝对值都小于1．

证明　当 $|x|\geqslant 1$ 时

$$|1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}|\leqslant$$
$$1+|x|+|x|^2+\cdots+|x|^{n-1}\leqslant n|x|^n = |nx^n|$$

上式当且仅当 $x=1$ 时，等号成立．那样除了一个根 $x=1$ 之外，使得

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} = nx^n$$

的 x 必须满足关系式 $|x|<1$．

(AMM E1493)

50. 设 $P(x)$ 是一个整系数多项式,且 $P(1)=P(2)=0$,证明:$P(x)$ 必有一个系数小于等于 -2.

证明 设 $P(x)$ 的次数为 n,$\frac{P(x)}{x-2}=b_0x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}$.那么由于 $P(1)=0$,因此所有的 b_i 不可能都是同号的.如果 $b_{n-1}\geqslant 1$,那么 $-2b_{n-1}\leqslant -2$.否则令 $b_k\geqslant 1$,$b_j\leqslant 0$,$j>k$,那么 $b_{k+1}-2b_k\leqslant -2$.不论发生那种情况 $P(x)$ 都有一个系数小于等于 -2.

(AMM 4913)

51. 设 w 是任意正整数,a_i 是满足 $w^2\leqslant a_i<(w+1)^2$ 的所有整数.证明:所有的乘积 a_ia_j 都是不同的.

证明 我们首先证明对 $w^2\leqslant a_i<(w+1)^2$,$i=1,2,3,4$,$a_1a_2\leqslant a_3a_4$ 蕴含 $a_1+a_2\leqslant a_3+a_4$.如果 $a_i=w^2+b_i$ 并且 $a_1+a_2>a_3+a_4$,那么 $b_1+b_2-b_3-b_4\geqslant 1$,因此

$$(w^2+b_1)(w^2+b_2)\leqslant (w^2+b_3)(w^2+b_4)$$

将导致

$$(b_1+b_2-b_3-b_4)w^2\leqslant b_3b_4-b_1b_2<(b_1+b_2-b_4)b_4-b_1b_2$$

$$w^2<(b_1-b_4)(b_4-b_2)\leqslant \frac{1}{4}(b_1-b_2)^2\leqslant w^2$$

上面我们用到了 $b_1-b_2\leqslant 2w$ 和 $xy\leqslant \frac{1}{4}(x+y)^2$,因而导致矛盾.

那样,如果 $a_1a_2=a_3a_4$,就必须有 $a_1+a_2=a_3+a_4$,因此

$$a_1^2+a_3a_4=a_1(a_1+a_2)=a_1(a_3+a_4)$$

或者

$$(a_1-a_3)(a_1-a_4)=0$$

因而 $a_1=a_3$ 或者 $a_1=a_4$.这就得出所要的结果.这个结果是到边的.我们不可能用 $\leqslant$ 号代替 $<$ 号.对此可以举出反例

$$w^2\cdot(w+1)^2=(w^2+w)\cdot(w^2+w)$$

(AMM 4975)

52. 证明或否定:如果 $\mathrm{Re}(z)\geqslant 1$,那么对任意正整数 n,有

$$|z^{n+1}-1|>|z^n|\cdot|z-1|$$

解 不等式对 $\mathrm{Re}(z)>1$(或 $\mathrm{Re}(z)=1$,$z\neq 1$)成立.设 $\mathrm{Re}(z)=r\cos\theta\geqslant 1$,其中 $r>1$ 并且 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,从余弦定律我们有

$$|z^{n+1}-z^n|^2 = r^{2n+2}+r^{2n}-2r^{2n+1}\cos\theta$$

$$|z^{n+1}-1|^2 = r^{2n+2}+1-2r^{2n+1}\cos(n+1)\theta$$

我们现在说明对 $n=1,2,\cdots$

$$r^{2n-1} < 2r^{2n+1}\cos\theta - 2r^{n+1}\cos(n+1)\theta \qquad ①$$

我们首先考虑 $r=1+d$，其中 $d \geqslant \frac{2}{n(n-2)}$，$n \geqslant 3$，那么

$$r^2-1=2d+d^2 \leqslant (n-1)^2d^2=(1+nd-r)^2<(r^n-r)^2$$

因此 $2r^{2n+1}\cos\theta - 2r^{n+1}\cos(n+1)\theta \geqslant 2r^{2n+1}\cos\theta - 2r^{n+1} \geqslant$

$$2r^{2n}-2r^{n+1} > r^{2n}-1$$

其次，我们考虑 $d<\frac{2}{n(n-2)}$ 的情况。由于

$$r\cos\theta \geqslant 1, 1-\frac{2}{n(n-2)} < \cos\theta < 1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{24}$$

因此
$$\theta^4-12\theta^2+\frac{48}{n(n-2)}>0$$

并且由于 $\theta^2<6$，$\theta^2<6-6\sqrt{D}$，其中 $D=1-\frac{4}{3n(n-2)}$。当 $n\geqslant 4$ 时，我们发现 $8n^4+10n^3-87n^2-50n-16>0$ 或者 $1-\frac{6}{(n+2)^2}<\sqrt{D}$，因此

$$\theta^2 \leqslant 6-6\sqrt{D} < \frac{36}{(n+2)^2} < \frac{4\pi^2}{(n+2)^2}$$

由于 $(n+2)\theta<2\pi$，$\cos(n+1)\theta<\cos\theta$，因此最后的不等式对 $n=3$ 也成立。当 $n=1,2$ 时，与 r 无关，那样，在所有剩余的情况中，式①的右边都大于 $2r^{2n+1}\cos\theta-2r^{n+1}\cos\theta \geqslant 2r^{2n}-2r^n>r^n-1$，这就完成了证明。

(AMM 10947)

53. 设 m 是一个正整数。由等式 $(1+\mathrm{i}x)^m=f(x)+\mathrm{i}g(x)$ 定义了两个实系数多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$。证明：对任意实数 a 和 b，多项式 $af(x)+bg(x)$ 只有实根。

证明 设 $z=u+\mathrm{i}v$，$v\neq 0$，并设 z 是 $f(x)-kg(x)=0$ 的根，其中 $k=-\frac{b}{a}$，$a\neq 0$，那么

$$g(x)=\frac{(1+\mathrm{i}x)^m}{k+\mathrm{i}}$$

把上式代入 $|g(z)|=|\overline{g(\bar{z})}|$，那么由于 k 是实数，这就得出 $|1+\mathrm{i}z|=|1-\mathrm{i}z|$。而此式蕴含 $v=0$，这与假设矛盾。

(AMM E2097)

54. 设 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，其中 $1\geqslant a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$，而 λ 是 $f(x)$ 的使得 $|\lambda|\geqslant 1$ 的根. 证明：λ 必是 $f(x)$ 的单位根.

证明 λ 是 $(x-1)f(x)$ 的根，因此

$$\lambda^{n+1}=(1-a_1)\lambda^n+(a_1-a_2)\lambda^{n-1}+\cdots+(a_{n-1}-a_n)\lambda+a_n$$

由三角形不等式

$$\begin{aligned}|\lambda|^{n+1}\leqslant&(1-a_1)|\lambda|^n+(a_1-a_2)|\lambda|^{n-1}+\cdots+\\&(a_{n-1}-a_n)|\lambda|+a_n\leqslant\\&(1-a_1)|\lambda|^n+(a_1-a_2)|\lambda|^n+\cdots+\\&(a_{n-1}-a_n)|\lambda|^n+a_n|\lambda|^n=|\lambda|^n\end{aligned}$$

因此 $|\lambda|\leqslant 1$，从而 $|\lambda|=1$. 由于这意味着在三角形不等式中等号成立，因此数

$$(1-a_1)\lambda^n,(a_1-a_2)\lambda^{n-1},\cdots,(a_{n-1}-a_n)\lambda,a_n$$

都是一个复数的非负的倍数，显然这些数不可能都等于0.

如果除了一个数之外，其余的数都等于0，那么就有一个 r 使得

$$1=a_1=\cdots=a_r,a_{r+1}=\cdots=a_n=0$$

$$\lambda^n+\lambda^{n-1}+\cdots+\lambda^{n-r}=0,\lambda^r+\lambda^{r-1}+\cdots+1=0,\lambda^{r+1}=1$$

如果有两个项都不等于0，那么由除法就得出对某个 $s\geqslant 1$，$\lambda^s>0$，因此 $\lambda^s=1$.

(AMM E2519)

55. 设 P 是 n 次复系数多项式，$P(1)=0$，$P(0)=1$，证明：

$$\max\{|P(z)|\,|\,|z|\leqslant 1\}\geqslant 1+\frac{1}{n}$$

证明 设 $z_j=e^{\frac{2\pi ij}{n+1}}$，$0\leqslant j\leqslant n$，$P(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$. 由于 $P(z_0)=P(1)=0$ 以及

$$\sum_{j=0}^{n}z_j^i=(n+1)\delta_{0,i}$$

其中 $\delta_{0,i}$ 表示克罗内克(Kronecker)符号. 因此

$$\sum_{j=1}^{n}P(z_j)=\sum_{j=0}^{n}P(z_j)=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{j=0}^{n}z_j^k=n+1$$

这就得出 $|P(z)|$ 在第 $n+1$ 个单位根处的值大于等于

$$\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$$

(AMM E1919)

> 56. 设 $p(q^2-4s)=r^2$，求方程 $x^6-px^4+qx^3-rx_2+s=0$ 的根.

解 如果 $q^2-4s=0$，那么 $r=0$. 而要解的方程成为 $\left(x^3+\frac{q}{2}\right)^2=px^4$，于是可化为讨论三次方程的求解问题.

如果 $q^2-4s\neq 0$，则可设 $q^2-4s=D^2$，那样，原方程可以化为

$$\left(x^3+\frac{q}{2}\right)^2=\left(\frac{r}{D}x^2+\frac{D}{2}\right)^2$$

这又归结为三次方程的求解问题.

(AMM 10300)

> 57. 设 $P_1(z)=z-1$，$P_2(z)=z^2-z-1$，$P_n(z)=zP_{n-1}(z)-P_{n-2}(z)$，求多项式 $P_n(z)$ 的所有根.

解 注意

$$P_1\left(z+\frac{1}{z}\right)=z-1+\frac{1}{z}$$

$$P_2\left(z+\frac{1}{z}\right)=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z+\frac{1}{z}\right)-1=$$

$$z^2-z+1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}$$

因此利用所给的递推关系容易由数学归纳法得出

$$P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)=z^n-z^{n-1}+\cdots-\frac{1}{z^{n-1}}+\frac{1}{z^n}$$

那样 $P_n\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^n}(z^{2n}-z^{2n-1}+\cdots-z+1)=\frac{z^{2n+1}+1}{z^n(z+1)}$

令 $z=e^{\frac{(2k-1)\pi i}{2n+1}}$，并利用 $z^{2n+1}=-1$ 就得出

$$z+\frac{1}{z}=2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n+1},1\leqslant k\leqslant n$$

都是多项式 P_n 的根，由于 P_n 的次数是 n，因而我们就得出了 P_n 的全部根.

(AMM E2036)

> 58. 设 n 是一个固定的正整数，$x_0=\frac{1}{n}$，$x_j=\frac{1}{n-j}\sum_{i=0}^{j-1}x_i$，求和 $\sum_{j=0}^{n-1}x_j$.

解 我们用数学归纳法证明对 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 成立 $\sum_{j=0}^{k}x_j=\frac{1}{n-k}$，因此 $\sum_{j=0}^{n-1}x_j=1$. 由定义即可知 $k=0$ 的情况命题成立. 假设对 $0\leqslant k\leqslant n-2$ 成立 $\sum_{j=0}^{k}x_j=\frac{1}{n-k}$，那么

$$\sum_{j=0}^{k+1}x_j=x_{k+1}+\sum_{j=0}^{k}x_j=\sum_{j=0}^{k}\frac{x_j}{n-k-1}+\sum_{j=0}^{k}x_j$$

再由归纳法假设即得

$$\sum_{j=0}^{k+1}x_j=\frac{1}{(n-k-1)(n-k)}+\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n-k-1}$$

因此，由数学归纳法就证明了题目的结论.

（AMM E1842）

> 59. 计算：$\sum_{r=0}^{n}C_n^r\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\frac{r!}{k!}$.

解 所给的和可以写成

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{r}(-1)^kC_r^k$$

上式内部的和式中，除了 $r=0$ 之外，其余的项都是零，因此所给和式的值等于 $n!$.

（AMM E2084）

> 60. 设 n 是任意正整数，$0\leqslant k\leqslant n$. 证明：恒等式
>
> $$\sum_{i=k}^{n}C_i^k\frac{1}{n+1-i}=C_{n+1}^k\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i+1}$$

证明 当 $n=0$ 时，要证的式子显然成立. 现在假设对某个 $n>0$ 等式成立，那么

$$C_{n+2}^k\sum_{i=k}^{n+1}\frac{1}{i+1}=(C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^k)\sum_{i=k}^{n+1}\frac{1}{i+1}=$$

$$C_{n+1}^k\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i+1}+C_{n+1}^{k-1}\sum_{i=k-1}^{n}\frac{1}{i+1}=$$

$$\sum_{i=k}^{n}C_i^k\frac{1}{n+1-i}+\sum_{i=k-1}^{n}C_i^{k-1}\frac{1}{n+1-i}=$$

$$\sum_{i=k}^{n+1}C_i^k\frac{1}{n+2-i}$$

因此由数学归纳法就证明了要证的等式.

(AMM E1829)

61. 设 m 任意正整数,证明:

$$\sum_{k=m}^{2m-1} C_{2m-1}^{k} x^{k}(1-x)^{2m-1-k} = \sum_{k=m}^{2m-1} C_{k-1}^{m-1} x^{m}(1-x)^{k-m}$$

证明 两边都除以 $x^{m}(1-x)^{m-1}$ 并改变指标后,所欲证的等式就成为

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{k+m}\left(\frac{x}{1-x}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{k+m-1}^{m-1}(1-x)^{k-m+1}$$

令 $y=\frac{x}{1-x}$,则 $\frac{1}{1-x}=1+y$,于是,上式成为

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m-1}^{k+m} y^{k} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{k+m-1}^{m-1}(1+y)^{k-m+1} \qquad ①$$

上式的右边等于

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{k+m-1}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-k-1} C_{m-k-1}^{j} y^{j} = \sum_{j=0}^{m-1} y^{j} \sum_{k=0}^{m-j-1} C_{k+m-1}^{m-1} C_{m-k-1}^{j}$$

由于已知 $$\sum_{k=0}^{n} C_{a+k}^{a} C_{b+n-k}^{b} = C_{a+b+n+1}^{n}$$

因此我们有 $$\sum_{k=0}^{m-j-1} C_{k+m-1}^{m-1} C_{m-k-1}^{j} = C_{2m-1}^{m-j-1} = C_{2m-1}^{m+j}$$

由此就立刻得出式 ①.

注 实际上,成立更一般的恒等式

$$\sum_{k=m}^{r} C_{k-1}^{m-1} x^{m}(1-x)^{k-m} = \sum_{k=m}^{r} C_{r}^{k} x^{k}(1-x)^{r-k}$$

上述恒等式的一个重要的应用是用普通的二项式系数之和去计算负的二项式系数之和.通过使用 Harvard 表和 Corps 表,可以从上式右边获得

$$x=.01(.01).99,\ r=1(1)150(10)200(20)500(50)1\ 000$$

的至少 5 位有效数字.上面所说的表是:

[1]Harvard University Computation Laboratory ,Tables of Cumulative Binomial Distributions , Harvard University Press ,Cambridge ,Mass., 1955.

[2]U.S. Army Ordnance Corps . Tables of Cumulative Binomial Probabilities, Ordnance Corps Pamphlet ORDP20 - 1, September ,1952.

(AMM E1975)

62. 证明:(1) $\sum_{k=0}^{n} C_{m}^{2k} C_{m-2k}^{n-k} 2^{2k} = C_{2m}^{2n}$.

(2) $\sum_{k=0}^{n} C_{m+1}^{2k+1} C_{m-2k}^{n-k} 2^{2k+1} = C_{2m+2}^{2n+1}$.

证明 (1) 左边显然是表达式 $\sum C_m^j 2^j x^j (1+x^2)^{m-j}$，$|x|<1$ 中 x^{2n} 的系数. 我们看出由于 $(1+x^2)^{m-j}$ 只产生偶数阶的幂，因此只有指标为偶数的 j 的项才对 x^{2n} 的系数有贡献. 那样我们可以取 $j=2k$. 但是

$$\sum C_m^j 2^j x^j (1+x^2)^{m-j}, \ |x|<1$$

又是 $$(2x+(1+x^2))^m=(1+x)^{2m}$$

的二项展开式，因此 x^{2n} 的系数是 C_{2m}^{2n}，这就证明了所需的恒等式.

(2) 左边是 $\sum C_{m+1}^j 2^j x^j (1+x^2)^{m+1-j}$，$|x|<1$ 中 x^{2n+1} 的系数，与(1)类似，因此只有指标为奇数的 j 的项才对 x^{2n+1} 的系数有贡献，因此我们可取 $j=2k+1$ 并且取所需的

$$x^{2n+1-(2k+1)}=x^{2n-2k}$$

和 $$(1+x^2)^{m+1-(2k+1)}=(1+x^2)^{m-2k}$$

但是 $$\sum C_{m+1}^j 2^j x^j (1+x^2)^{m+1-j}, \ |x|<1$$

又是 $$(2x+(1+x^2))^{m+1}=(1+x)^{2m+2}$$

的二项展开式，因此 x^{2n+1} 的系数是 C_{2m+2}^{2n+1}，这就证明了所需的恒等式.

注 Hansen 指出，题目中的恒等式是已知的几何函数

$$F(a,b;c,1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

对应于 $a=-n, b=n-m, c=\frac{1}{2}$ 和 $a=-n, b=n-m, c=\frac{3}{2}$ 的特殊情况. 他同时也指出，所说的和也可从卷积 $\sum_{k=0}^{n} C_a^k C_b^{n-k}=C_{a+b}^n$ 得出.

(AMM E3258)

63. 证明：$\sum_{j=0}^{n} C_n^j 2^{n-j} C_j^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}=C_{2n+1}^n$.

证明 由于 $(1+x)\left(\frac{1}{x}+x\right)^j$ 的常数项是 $C_j^{\lfloor j/2 \rfloor}$，因此所给的和就等于

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j 2^{n-j}(1+x)\left(\frac{1}{x}+x\right)^j=(1+x)\left(2+\frac{1}{x}+x\right)^n=$$
$$(1+x)\frac{(2x+1+x^2)^n}{x^n}=$$
$$\frac{(1+x)^{2n+1}}{x^n}$$

的常数项，即 C_{2n+1}^n.

(AMM E2298)

64. 设 $\tan\frac{A}{4}$，$\tan\frac{B}{4}$，$\tan\frac{C}{4}$ 是三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ 的三个根，其中 A，B，C 是三角形的三个角．证明：$a+b=c+d$．

证明 用 r，s，t 分别表示 $\tan\frac{A}{4}$，$\tan\frac{B}{4}$，$\tan\frac{C}{4}$，那么由于 $\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}=\frac{\pi}{4}$ 以及 $\tan\frac{\pi}{4}=1$，因此由三角公式就有

$$\frac{r+s+t-rst}{1-st-rt-rs}=1$$

再由根与系数的关系有

$$r+s+t=-\frac{a}{b},st+rt+rs=\frac{c}{a},rst=-\frac{d}{a}$$

将这三式代入前面的式子即得

$$a+b=c+d$$

注 Arthur Boblett 和 C.L.Sabharwal(各自独立的) 提出了下面的推广：设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一个 n 边形的 n 个顶角，$\tan\frac{A_1}{k}$，$\tan\frac{A_2}{k}$，$\cdots$，$\tan\frac{A_n}{k}$ 是 n 次方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的 n 个根(其中 $k=4(n-2)$)，那么

$$(a_0+a_1)-(a_2+a_3)+(a_4+a_5)-\cdots=0$$

(AMM 10758)

65. 证明：当 $n>2$ 时，9^n 的各位数字之和不可能等于 9.

证明 设 k 和 N 都是正整数，$S(N)$ 表示数字 N 的各位数字之和．$\rho_k(N)$ 表示在模 (10^k-1) 下，同余于 N 的最小正整数．首先证明 $S(N)$ 和 $\rho_k(N)$ 的以下性质：

引理 (1) $S(N)\equiv N \pmod 9$；

(2) $S(m+n)\leqslant S(m)+S(n)$；

(3) $\rho_k(N)$ 可用下述方法获得：将 N 从右边开始，每 k 位数放在一个括弧内，最左边剩余的数字也放在一个括弧内，将所有括弧内的数字相加得到一个新数，如果这个数字大于 k 位数，则再重复这一算法，直至所得的数字不超过 k 位数，那么最后所得的数字就是 $\rho_k(N)$ (例如，设 $k=2$，$N=28\ 105=2(81)(05)$，则 $2+81+5=88$ 就是 $\rho_2(28\ 105)$，事实上不难验证 28 105 除以 $10^2-1=99$ 的余数恰是 88)；

(4) $S(\rho_k(N))\leqslant S(N)$；

(5) 如果 $S(N)\leqslant 9$，则 $S(\rho_k(N))=S(N)$．

引理的证明 (1) 设 $N = a_n a_{n-1} \cdots a_1$，那么

$$N = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1 = a_n(99\cdots9 + 1) + a_{n-1}(9\cdots9 + 1) + \cdots + a_2(9 + 1) + a_1 \equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \pmod 9 \equiv S(N) \pmod 9$$

(2) 设 m 和 n 的第 $i-1, i, i+1$ 位数字分别为 a_{i-1}, a_i, a_{i+1} 和 b_{i-1}, b_i, b_{i+1}，当 m 和 n 相加时，从第 $i-1$ 位向第 i 位进位数字 k，从第 i 位向第 $i+1$ 位进位数字 h，第 $i+1$ 位向第 $i+2$ 位进位数字 l（k, h, l 可以为零），那么 m 和 n 相加后的第 $i-1, i, i+1$ 位数字分别为 $a_{i-1} + b_{i-1} - 10k, a_i + b_i + k - 10h, a_{i+1} + b_{i+1} + h - 10l$，因此 $m + n$ 的第 $i-1, i, i+1$ 位数字之和为

$$a_{i-1} + b_{i-1} - 10k + a_i + b_i + k - 10h + a_{i+1} + b_{i+1} + h - 10l \leqslant a_{i-1} + b_{i-1} + a_i + b_i + a_{i+1} + b_{i+1}$$

不会大于 M 的第 $i-1, i, i+1$ 位数字之和再加上 n 第 $i-1, i, i+1$ 位数字之和. 这就说明，当 m 和 n 相加时，其各位数字之和只能减小、不会增大，这就证明了(2).

(3) 设 $N = a_n a_{n-1} \cdots a_1$，那么

$$\begin{aligned} N &= a_k a_{k-1} \cdots a_1 + a_{2k} a_{2k-1} \cdots a_{k+1} \cdot 10^k + \cdots + a_{mk} a_{mk-1} \cdots a_{(m-1)k+1} 10^{mk} + R = \\ &a_k a_{k-1} \cdots a_1 + a_{2k} a_{2k-1} \cdots a_{k+1} \cdot (10^k - 1 + 1) + \cdots + a_{mk} a_{mk-1} \cdots a_{(m-1)k+1}((10^k)^m - 1 + 1) + R \equiv \\ &a_k a_{k-1} \cdots a_1 + a_{2k} a_{2k-1} \cdots a_{k+1} + \cdots + a_{mk} a_{mk-1} + \cdots + a_{(m-1)k+1} + R \\ &(\operatorname{mod}(10^k - 1)) \equiv \cdots \equiv \\ &\rho_k(N)(\operatorname{mod}(10^k - 1)) \end{aligned}$$

反复应用以上的同余式就得到性质(3).

(4) 由性质(3) 和性质(2) 即可得

$$\begin{aligned} S(\rho_k(N)) \leqslant \cdots \leqslant &S(a_k a_{k-1} \cdots a_1 + a_{2k} a_{2k-1} \cdots a_{k+1} + R) \leqslant \\ &S(a_k a_{k-1} \cdots a_1) + S(a_{2k} a_{2k-1} \cdots a_{k+1}) + \cdots + \\ &S(R) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + \\ &(a_{k+1} + \cdots + a_{2k}) + \cdots + S(R) \leqslant S(N) \end{aligned}$$

(5) 由已证的性质可知

$$S(\rho_k(N)) \equiv S(N) \pmod 9, S(\rho_k(N)) \leqslant S(N)$$

因此如果 $S(N) \leqslant 9$ 就有 $S(\rho_k(N)) = S(N)$.

以下我们证明如果 $n > 2$，那么 $S(9^n) > 9$. 分以下三种情况：

(1) $n > 1$ 是奇数，这时 n 的末位数是9，并且位数大于或等于3，因此在 9^n 的十进表示中除了末位数至少还有一个不为零的数（例如其最高位数），因而 $S(9^n) > 9$.

(2) ⅰ $n>2$ 是偶数，则 9^n 具有形式 81^n 的形式，首先考虑 $n\equiv 1 \pmod 5$ 的情况，由于

$$81^5 \equiv 1 \pmod{100}$$

故 $$81^n = 81^{5k+1} = 81\cdot(81^5)^k \equiv 81 \pmod{100}$$

这就是说 81^n 的末两位数是 81，由于在 81^n 的十进表示中除了末两位数至少还有一个不为零的数（例如其最高位数），因而 $S(81^n)>9$.

ⅱ $n>2$ 是偶数，且 $n\not\equiv 1 \pmod 5$，那么由于

$$\{n\mid n\not\equiv 1 \pmod 5\}\subset\{n\mid n\not\equiv 1 \pmod{30}\}$$

所以只须对 $n\not\equiv 1 \pmod{30}$ 证明 $S(81^n)>9$ 即可. 这时 n 可写成 $n=30+m, m\neq 1$ 的形式，由于

$$10^5-1=9\cdot 41\cdot 271,(9,41,271)=1$$

和 $$81^{30}\equiv 1 \pmod{41\cdot 271}$$

故 $$81^{30+m}-81^m=81^m(81^{30}-1)\equiv 0 \pmod 9$$

$$81^{30+m}-81^m=81^m(81^{30}-1)\equiv 0 \pmod{41\cdot 271}$$

因而 $$81^{30+m}-81^m=81^m(81^{30}-1)\equiv 0$$

$$\pmod{9\cdot 41\cdot 271}\equiv 0 \pmod{(10^5-1)}$$

即对每个正整数 m，成立

$$81^{30+m}\equiv 81^m \pmod{(10^5-1)}$$

这也就是说，$\rho_5(81^n)$ 是周期为 30 的周期数列. 由直接计算得出对 $1\leqslant n\leqslant 30$，$\rho_5(81^n)$ 的值如下

81，6 561，31 446，47 151，19 269，60 804，25 173，39 033，
61 704，98 073，43 992，63 387，34 398，86 265，87 534，90 324，
16 317，21 690，56 907，9 513，70 560，15 417，48 789，51 948，
7 830，34 236，73 143，24 642，96 021，77 778

在上面这个表中，只有第一个数的各位数字之和等于 9，而其余的数的各位数字之和都大于 9，这就得出当 $n\not\equiv 1 \pmod{30}$ 有

$$S(81^n)\geqslant S(\rho_5(81^n))>9$$

66. 对每个正整数 n，设 $C(n)$ 表示 n 的各位数字的立方之和. 证明：对每一个 n，运算 $C(n)$ 的迭代最终将产生一个循环或周期解.

(AMM E1810)

解 设 $B=\{1,55,133,136,153,160,217,244,250,352,370,371,407,919,1\ 459\}$，那么容易证明 $C(B)=B$. 如果 $S=\{n\mid n>0$，且存在正整数 p，使得 $C^p(n)\in B\}$，那么易于验证每一个个位数都在 S 中. 如果所有的 k 位数都在 S 中，并且 n 有 $k+1$ 位数，那么 $C(n)=q+d^3$，其中 $q\in S$，而 d 是 n 的个位数，因此

$0 \leqslant d \leqslant 9$. 如果 $d=0$, 那么 $C(n) \in S$. 通过验证共126个数可以发现对每个 $1 \leqslant d \leqslant 9$ 都存在一个通向 S 的 C 的迭代. 由于 $C(B)=B$, 因此任何正整数 n 在 C 的迭代下, 最终将成为一个循环或周期解, 通过计算, 可以发现这个周期解是

$$1-55-250-133-136-244-153-160-217-352-370-371-409-919-1\ 459$$

67. 设 m 是一个固定的正整数, 对正整数 n, 设 $S_m(n)$ 表示 n 的各位数字的 m 次幂之和, 例如 $S_3(172)=1^3+7^3+2^3=352$. 从任意一个正整数 n_0 开始, 构造一个数列 $n_k=S_m(n_{k-1})$, 证明: 这个数列是最终周期的, 并且无论 n_0 如何选择, 所得的数列的周期只有有限多种. (AMM 10727)

证明 如果 $n \geqslant 10^{m+1}$, 那么 $10^p \leqslant n \leqslant 10^{p+1}$, $p \geqslant m+1$, 这时

$$S_m(n) \leqslant (p+1)9^m < 9^p + C_p^1 9^{p-1} < \sum_{j=0}^{p} C_p^j 9^{p-j} = (9+1)^p \leqslant n$$

这表明只要 $n_k \geqslant 10^{m+1}$, 就有 $n_{k+1} < n_k$.

如果 $n < 10^{m+1}$, 那么

$$S_m(n) \leqslant (m+1)9^m < \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j 9^{m+1-j} = (9+1)^{m+1} = 10^{m+1}$$

因此 n_k 最终要小于 10^{m+1}, 并且将停留在集合 $\{1,2,\cdots,10^{m+1}-1\}$ 之中, 这就证明了所需的结论.

68. 设 $f(n)$ 表示1加上 n 的所有素因数之和(每个素因数的个数连同它的重数一起算, 例如 $f(12)=8$). 证明: 如果 n 大于6, 那么迭代叙列 $n, f(n), f(f(n)), \cdots$ 必包含8, 并且因此从某个点开始必将是重复的: $8,7,8,7,\cdots$ (AMM F2356)

证明 由于当 $n>6$ 时, $f(n) \geqslant 7$, 并且 $f(7)=8$, 因此只须证明以下性质即可.

如果 $n \geqslant 9$, 那么或者 n 是一个合数, 并且 $f(n) \leqslant n-2$, 或者 n 是一个素数, 并且 $f(n)=n+1$ ($n+1$ 本身是一个合数), 因而

$$f(f(n)) \leqslant f(n)-2=n-1$$

事实上, 这一性质对 $n=9$ 正确. 现在我们假设这一性质对所有的 $9 \leqslant k < n$ 成立. 设 n 是一个合数 $n=k_1 \cdot k_2$, 那么

$$(k_1-1)(k_2-1) \geqslant 4$$

此外如果 $k_i \leqslant 6$ 或者 $k_i \geqslant 7$ 是一个素数，则 $f(k_i) \leqslant k_i + 1$，否则由归纳法假设 $f(k_i) \leqslant k_i - 2$，还有

$$f(n) = f(k_1) + f(k_2) - 1$$

因此 $$f(n) \leqslant k_1 + 1 + k_2 + 1 - 1$$

但是 $$k_1 + 1 + k_2 + 1 - 1 = n + 2 - (k_1 - 1)(k_2 - 1)$$

因此 $$f(n) \leqslant n + 2 - 4 \leqslant n - 2$$

这样，用数学归纳法就证明了这一性质.

(AMM 6439)

> 69. 设 a_n 是实数叙列，满足递推关系 $a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1}$，证明：$\{a_n\}$ 是周期为 9 的周期叙列.

证明 此叙列含有某些不正的项. 例如，如果 $a_n > 0, a_{n+1} > 0$ 并且 $a_{n+2} > 0$，那么 $a_{n+3} = -a_n < 0$. 事实上，这个叙列含有两个接连的不正的项. 由于 $a_n > 0, a_{n+1} \leqslant 0$，并且 $a_{n+2} > 0$，那么 $a_{n+5} = a_{n+1} + a_n < 0$，并且 $a_{n+6} = -a_n < 0$.

现在假设 $a_m = -a \leqslant 0$ 以及 $a_{m+1} = -b \leqslant 0$，那么从 a_m 开始，以 a_{m+10} 结尾的一段叙列是

$$-a, -b, a+b, a+2b, b, -a-b, a, 2a+b, a+b, -a, -b$$

由于 $a_{m+9} = a_m, a_{m+10} = a_{m+1}$，这就得出9是叙列的周期. 此外，由于 $a_{m+4} = -a_{m+1}, a_{m+5} = -a_{m+2}$，因此叙列的周期不可能小于 9，除非每一项都等于 0.

(AMM 10947)

> 70. 设 $m > 1$ 是正整数，$\{a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}\}$ 是一个实数的有限的单调叙列. 递归地定义一个无限叙列 $\{x_n\}$ 如下：
>
> $$x_0 = a_0, x_1 = a_1, \cdots, x_{m-1} = a_{m-1}$$
>
> $$x_{n+m} = \max\{x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m-1}, 0\} - x_n, n = 0, 1, 2, \cdots$$
>
> 证明：叙列 $\{x_n\}$ 是周期的并确定它的周期.

证明 除非所有的项都是零，叙列 $\{x_n\}$ 的周期是 $3m - 1$.

由于所给的递归关系在向前和向后的方向上都是对称的，不失一般性，我们可设

$$a_0 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{m-1}$$

又设所给的实数中有 k 个是正数. 那么由于对 $0 \leqslant i \leqslant k-1$，我们有 $x_{m+i} = \max\{x_{i+1}, 0\} - x_i \leqslant 0$，故 $x_k, \cdots, x_{k+m-1}$ 都不是正数. 设这些不正的数是 $-b_1, \cdots, -b_m$. 由于这些项都不是正的，因此下一个连续的 m 项将遍历 $b_1, b_1 + b_2, \cdots, \sum b_i$. 现在 $\sum b_i$ 是这 m 项

中的最大者，并且下一个连续的 $m-1$ 项是 $\sum_{i=2}^{n} b_i,\cdots,b_m$，其最大项 $\sum_{i=2}^{n} b_i$ 减去 $\sum_{i=1}^{n} b_i$ 得到 $-b_1$. 从类似的减法，再下一个连续的 $m-1$ 项是 $-b_2,\cdots,-b_m$，这就证明了 $\{x_n\}$ 的周期性. 从 $-b_1$ 到下一个 $-b_1$，我们看出 m 个正项后面跟随着 $2m-1$ 个不正的项. 这就证明了除非所有的项都是零，叙列 $\{x_n\}$ 的周期必为 $3m-1$.

(AMM 10369)

71. 设 $P(x)$ 是一个次数至少是 2，并且系数都是有理数的多项式. 设 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 是一个有理数的数列，对所有的 $n\geqslant 1$，满足 $P(a_{n+1})=a_n$. 证明：必存在一个 $k\geqslant 1$，使得对所有的 $n\geqslant 1$，$a_{n+k}=a_n$.

证明 首先证明 a_n 是有界的，显然 $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{P(x)}{x}\right|=\infty$. 因此存在一个常数 M 使得 $M\geqslant|a_1|$，并且当 $|x|\geqslant M$ 时，$|P(x)|\geqslant|x|$. 如果 $|a_n|>M$，那么

$$|a_{n-1}|=|P(a_n)|\geqslant|a_n|>M$$

重复这一论证，最后我们将得出 $|a_1|>M$，矛盾. 因此对所有的 n，必有 $|a_n|\leqslant M$.

下一步，我们构造一个整数 N，使得 Na_n 是整数. 设

$$P(x)=\frac{b_dx^d+b_{d-1}x^{d-1}+\cdots+b_0}{c},a_1=\frac{r}{s}$$

其中 $c,b_0,b_1,\cdots,b_d$ 和 r,s 都是整数. 显然 $Na_1=rb_d$ 是整数. 如果 Na_n 是整数，那么 $\left(\frac{cN^d}{b_d}\right)\left(P\left(\frac{x}{N}\right)-a_n\right)$ 是一个在 Na_{n+1} 处等于零的整系数多项式. 由有理零点定理（见 G. H. Hardy and E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, fifth ed., Oxford, 1979, Theorem 45, section 4.3, 41）可知 Na_{n+1} 也必是一个整数，因此由归纳法可知，对所有的 n，Na_n 是整数.

集合 $\{a_n\}$ 是有界的，并且其所有的元素都是 $\frac{1}{N}$ 的整数倍数. 因此是有限集合. 设其元素个数是 m，考虑数列 a_n 的所有由连续 $m+1$ 个项所组成的段，由于至多可以组成 m^{m+1} 个这种段，而 a_n 是无限数列，因此由抽屉原理可知必有某两个段重合. 因此必存在一个 $k\geqslant 1$，和一个 n_0 使得 $a_{n_0+k}=a_{n_0}$. 而从 $n\geqslant n_0$ 开始，数列就开始循环，即对 $n\geqslant n_0$，有 $a_{n+k}=a_n$. 特别，对每个 $n\geqslant 1$，存在一个 $j>n$，使得 $a_j=a_{j+k}$，用 P 对此式的两边反复作用就得出 $a_n=a_{n+k}$.

(AMM 10375)

72.求出循环数列

$$u_{n+2}=2(2n+3)^2u_{n+1}-4(n+1)^2(2n+1)(2n+3)u_n,n\geqslant 0$$

的所有解.

解 设 $v_n=\frac{u_n}{(2n)!}$,则

$$(n+2)v_{n+2}=(2n+3)v_{n+1}-(n+1)v_n,n\geqslant 0$$

这等价于
$$(n+2)(v_{n+2}-v_{n+1})=v_1-v_0$$

或
$$v_{n+2}=v_{n+1}+\frac{v_1-v_0}{n+2}$$

因而
$$v_n=v_0+(v_1-v_0)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

由此即可得出原循环数列的所有解.

(AMM E1889)

73.证明:任意 n 个整数的平方和总可以用无限多种方法表示成两个数的商,其中每个数都是 n 个整数的平方和.

证明 从任意一个毕达哥拉斯三角形出发,我们可以构造一连串毕达哥拉斯三角形,其中每个毕达哥拉斯三角形都有一条直角边是前一个毕达哥拉斯三角形的斜边(见 W. Sierpinski, Pythagorean Triangles, Yeshiva University, N. Y., 1962, 26).因此存在无穷多个正整数,使得它们可以表示成其他有限个正整数的平方和.现在设

$$k^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

那么
$$k^2(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_n^2$$

就有无限多个解,其中 $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$ 是原来所给的 n 个整数的平方和.

(AMM E1890)

74.设 m,n 都是大于1的正整数,证明:存在正整数 $N_1,N_2,\cdots,N_{m-1}$ 使得

$$\sqrt{m}=1+\sum_{i=1}^{m-1}(\sqrt{N_i}-\sqrt{N_i-1})^{\frac{1}{n}}$$

证明 设 i 表示 $1,2,\cdots,m-1$ 中的数,那么根据 n 是偶数还是奇数,由二项式定理有

$$(\sqrt{i+1}\pm\sqrt{i})^n=x_i\pm y_i\sqrt{i(i+1)}$$

或 $$(\sqrt{i+1}\pm\sqrt{i})^n = u_i\sqrt{i+1}\pm v_i\sqrt{i}$$

在无论哪种情况下，我们都可以获得两个方程

$$(\sqrt{i+1}+\sqrt{i})^n = \sqrt{N_i}+\sqrt{M_i}$$

和 $$(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})^n = \sqrt{N_i}-\sqrt{M_i}$$

将以上两式相乘就得出 $1 = N_i - M_i$，因此

$$\sqrt{i+1}-\sqrt{i} = (\sqrt{N_i}-\sqrt{N_{i-1}})^{\frac{1}{n}}$$

将上式对 i 求和就得出要证的等式.

(AMM E1979)

75. 众所周知可数势 a 要小于连续统势 c，对此，有人给出如下证明：

由于 $1<a$，因此 $a<a^a$，此外 $a<2^a$，因此 $a^a<(2^a)^a<2^{a\cdot a}=2^a=c$，由此就得出 $a<a^a<c$，指出此证明中的错误.

解 错误在于把有限势的性质应用到无限的势上去. 特别是对于无限的势，当 $c\neq 0$ 时，$a<b$ 并不能蕴含 $a^c<b^c$. 一个反例是如果 $a<b$ 蕴含 $a^c<b^c$，那么从 $2<c$ 就得出

$$2^a<c^a=(2^a)^a=2^{a\cdot a}=2^a$$

因此 $2^a<2^a$，这显然是一个矛盾.

(AMM E2045)

76. 设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 n 个不同的复数，使得 $\min\limits_{i\neq j}|z_i-z_j|\geqslant\max\limits_i|z_i|$，问 n 最大能是几，并举出一个使 n 达到最大的 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的集合. 对一般的欧几里得空间(Euclidean Space)我们又能有什么结论？

解 设 $|z_m|=\max\limits_i|z_i|$，那么所有的 z_i 都位于复平面上以原点为圆心，以 $R=|z_m|$ 为半径的圆内或圆周上. 显然，6 个位于圆周上的点，连同圆心使得 $n=7$. 如果 $n\geqslant 7$ 并且有某个点 $z\neq 0$ 没有位于圆周上，那么由抽屉原则和三角形中大角对大边的定理便可得知存在 i,j 使得 $|z_i-z_j|<|z_m|$，因此 n 最大只能等于 7.

圆周上的一个正六边形和圆心便是使 n 达到 7 的例子.

对一般的欧几里得空间，问题归结为求出单位超球内满足任意两点之间的距离至少为 1 的点的最大数.

(AMM 10306)

77. 求出所有使得 $x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)$ 具有因子 $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$ 的正整数 n.

解 仅当 $n=1$ 或 $n=4$ 时

$$x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)$$

才具有因子 $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$. 在这两种情况下，商式分别是 0 和 $(x-y)(x-z)(y-z)$.

当 $y=2, c=1$ 时

$$x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)=$$
$$x^n-(2^n-1)x+2^n-2=P(x)$$
$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz=x^2+3x+7=Q(x)$$

如果 $x^n(y-z)+y^n(z-x)+z^n(x-y)$ 才具有因子 $x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz$, 那么 $Q(x)$ 必是 $P(x)$ 的因子. $Q(x)$ 的两个根是 $\frac{-3\pm i\sqrt{19}}{2}$, 其绝对值为 $\sqrt{7}$. 设 α 是 $Q(x)$ 的根，当 $n\geqslant 5$ 时

$$|P(\alpha)|=|\alpha^n-(2^n-1)\alpha+2^n-2|\geqslant$$
$$|\alpha|^n-2^n(|\alpha|+1)-5>$$
$$\sqrt{7}^n-4\cdot 2^n=2^n\left(\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^n-4\right)>$$
$$2^n\left(\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^5-4\right)>2^n\left(\left(\frac{33}{25}\right)^5-4\right)>0$$

这说明当 $n\geqslant 5$ 时，α 不可能是 $P(x)$ 的根，因而 $P(x)$ 不可能以 $Q(x)$ 为因子. 当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，可直接验证 $P(\alpha)\neq 0$, 这就证明了结论.

(AMM E2450)

78. 证明：如果正整数 n 不是 5 的倍数，那么 $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$ 可被 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 整除.

证明 设 ζ 是一个 5 次单位原根，$5\nmid n$, 那么

$$\zeta^{4n}+\zeta^{3n}+\zeta^{2n}+\zeta^n+1=\frac{\zeta^{5n}-1}{\zeta^n-1}=0$$

(注意，如果 $5\mid n$, 那么上面的和将等于 5.) 一共有 4 个 5 次单位原根，其他三个可表示成 ζ^2, ζ^3 和 ζ^4. 因此由余式定理可知 $(x-\zeta)$, $(x-\zeta^2)$, $(x-\zeta^3)$, $(x-\zeta^4)$ 都是 $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+x^n+1$ 的因式. 而在多项式环中，所有的一次多项式都是不可约的，因此它们的乘积 $(x-\zeta)(x-\zeta^2)(x-\zeta^3)(x-\zeta^4)$ 也是 $x^{4n}+x^{3n}+x^{2n}+$

x^n+1 的因式，然而由直接计算即可知

$$(x-\zeta)(x-\zeta^2)(x-\zeta^3)(x-\zeta^4)=x^4+x^3+x^2+x+1$$

这就证明了结论.

注 更一般的有如果 m,n 是互素的正整数，那么 $x^{(m-1)n}+\cdots+x^{2n}+x^n+1$ 可被 $x^{m-1}+\cdots+x^2+x+1$ 整除. 事实上，我们有

$$\frac{x^{(m-1)n}+\cdots+x^{2n}+x^n+1}{x^{m-1}+\cdots+x^2+x+1}=\frac{\frac{x^{mn}-1}{x^n-1}}{\frac{x^m-1}{x-1}}=\frac{(x^{mn}-1)(x-1)}{(x^m-1)(x^n-1)}$$

$(x^m-1)(x^n-1)$ 的根是1(二重)和1的非单位的 m 次和 n 次单位根，这些根都是不同的. 但是 $(x^{mn}-1)(x-1)$ 的根有(二重)和1的非单位的 mn 次单位根. 这些根包括了1的 $m+n-2$ 个非单位的 m 次和 n 次单位根. 这就证明了所要的结论.

(AMM E2290)

79. 设 $P(x,y)$ 是 x,y 的实系数多项式，对所有的 x,y 满足关系式

$$P(x,y)=P(x+1,y+1)$$

证明：$P(x,y)$ 必具有形式 $P(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_i(x-y)^i$.

证明 令

$$x=u+v,y=u-v,f(u,v)=P(x,y)=P(u+v,u-v)$$

那么
$$f(u,v)=P(x,y)=P(x+1,y+1)=P(u+1+v,u+1-v)=f(u+1,v)$$

因而由数学归纳法可证对每一个整数 n 成立

$$f(u+n,v)=f(u,v)$$

设 (a,b) 是平面上任意一个点，$g(u)=f(u,b)-f(a,b)$，那么

$$g(a)=g(a+1)=g(a+2)=\cdots=0$$

即单变量多项式 $g(u)$ 具有无限多个零点，因此 $g(u)$ 必恒等于0(否则与代数基本定理相矛盾). 因而对所有的 u，$f(u,b)=f(a,b)$. 由于 (a,b) 的任意性，这就得出对所有的 v，成立 $f(u,v)=f(0,v)$，因此 $P(x,y)=P\left(0,\frac{x-y}{2}\right)$，这就证明了所要的结果.

(AMM E2344)

80. 用红点和蓝点组成了一个 50×50 的正方形点阵,如果在这个点阵中同一行或同一列中的两个相邻的点具有相同的颜色,那么就在这两个点之间用一条这种颜色的线段连接它们,如果相邻的两个点的颜色不同,就用一条黑色的线段连接它们.已知有1 269个红点,其中99个在边上,但是角上没有红点.有1 035条黑色的线段,问红色线段和蓝色线段各有多少条?

解 一共有4 900条线段,因此总共有 $4\ 900-1\ 035=3\ 865$ 条红色线段和蓝色线段. 从内部的每个红点发出四条线段,从边上的每个红点发出3条线段,因此从红点发出的线段的总数是

$$3\cdot 99+4\cdot 1\ 170=4\ 977$$

在这些线段中,每条红线数了两次,而每条黑线段数了一次.假设一共有 x 条红色线段,那么由此就得出

$$2x+1\ 035=4\ 977$$

由此得出共有

$$\frac{1}{2}(4\ 977-1\ 035)=1\ 971$$

条红色线段,因而蓝色线段的数目是

$$3\ 865-1\ 971=1\ 894$$

(AMM E2582)

81. 设 $\{A_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,$\{B_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$,$\{C_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 是有限集 M 的三个部分. 如果对每一对 i,j,k 都有

$$|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|A_i\cap C_k|\geqslant n$$

证明:

$$|M|\geqslant\frac{n^3}{3}$$

并且当 n 可被3整除时,上述不等式不可能再被改善.

证明 我们有

$$\sum_{i,j}|A_i\cap B_j|=\sum_{j,k}|B_j\cap C_k|=\sum_{i,k}|A_i\cap C_k|=|M|$$

由假设得出

$$\sum_{i,j,k}(|A_i\cap B_j|+|B_j\cap C_k|+|A_i\cap C_k|)\geqslant\sum_{i,j,k}n=n^4$$

那样

$$3n|M|\geqslant n^4,\ |M|\geqslant\frac{n^3}{3}$$

现在考虑

$$M=\{(i,j,k)\mid 1\leqslant i,j,k\leqslant n,i+j+k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)\}$$

并设 A_i 集合 M 中第一个坐标是 i 的点组成的集合，类似的 B_j 是由第二个坐标是 j 的点组成的集合，C_k 是由第三个坐标是 k 的点组成的集合，那么当 n 是 3 的倍数时容易验证

$$|A_i \cap B_j| = |B_j \cap C_k| = |A_i \cap C_k| = \frac{n}{3}, |M| = \frac{n^3}{3}$$

（AMM 5996）

82. 一个由 Kuratowski 提出的著名问题是关于从拓扑空间 T 的一个子集 A 通过取闭包（$^-$）、内点（^{0}）和取余集所能产生的集合的最大数目的．假设我们不允许取余集，但是可以取任意多个集合的并．证明：从 A 至多可产生 13 个集合．当 T 是带有通常拓扑的实直线时，给出一个可从 A 构造出 13 个不同集合的例子．

证明　给了集合 A，通过取闭包和内点至多可产生 6 个新的集合，我们把包括 A 在内的这些集合之间的包含关系列表如下：

$$\begin{array}{ccccc}
A^- & \supset & A^{-0-} & \supset & A^{-0} \\
\supset & & \supset & & \supset \\
A & & A^{0-} & \supset & A^{0-0} \\
& \supset & & \supset & \\
& & A^0 & &
\end{array}$$

从上面的图表看出，通过每次取两个集合的并，至多有 6 个新的集合可以产生，即

$$A \cup A^{-0-}, A \cup A^{-0}, A \cup A^{0-}, A \cup A^{0-0}$$
$$A \cup A^{0-} \cup A^{-0}, A^{0-} \cup A^{-0}$$

因此我们总共可以得到 13 个集合．

容易看出这 13 个集合中的任意两个通过取并不会再产生新的集合，并且除了 $(A \cup A^{0-})^0 = A^{0-0}$ 之外，易于看出这 13 个集合中的任意一个通过取闭包和内点不会再产生新的集合．

为了说明 $(A \cup A^{0-})^0 = A^{0-0}$，我们首先说明 $(A \cup A^{0-})^0 \subset A^{0-}$．假设不然，那么必存在 $x \in (A \cup A^{0-})^0$ 并且 $x \overline{\in} A^{0-}$．这就得出存在 x 的邻域 N_1 和 N_2 使得 $N_1 \subset A \cup A^{0-}$ 并且 $N_2 \cap A^{0-} = \varnothing$．设 $N = N_1 \cap N_2$，那么 N 是 x 的邻域并且 $N \subset A \cup A^{0-}$，$N \cap A^{0-} = \varnothing$．那样 $N \subset A$，这蕴含 $x \in A^0 \subset A^{0-}$，显然这是一个矛盾．我们现在已证明 $(A \cup A^{0-})^0 \subset A^{0-}$，那样 $(A \cup A^{0-})^0 \subset A^{0-0}$，但是 $(A \cup A^{0-})^0 \supset A \cup A^{0-0} = A^{0-0}$，因此 $(A \cup A^{0-})^0 = A^{0-0}$．

这样，我们已证明至多可以产生 13 个集合.

以下例子说明确实有 13 个集合可以被构造出来.

设 $A = D_1 \cup D_2 \cup (3,4) \cup (4,5)$，其中

$$D_1 = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1,2,3,\cdots\right\}, D_2 = \{d \mid d \text{ 是无理数}, 2 < d < 3\}$$

那么

$$A = D_1 \cup D_2 \cup (3,4) \cup (4,5),\quad A \cup A^{-0-} = D_1 \cup [2,5]$$
$$A^- = \{0\} \cup D_1 \cup [2,5],\quad A \cup A^{-0} = D_1 \cup (2,5)$$
$$A^{-0-} = [2,5],\quad A \cup A^{0-} = D_1 \cup D_2 \cup [3,5]$$
$$A^{-0} = (2,5),\quad A \cup A^{0-0} = D_1 \cup D_2 \cup (3,5)$$
$$A^{0-} = [3,5],\quad A \cup A^{0-} \cup A^{-0} = D_1 \cup (2,5]$$
$$A^{0-0} = (3,5),\quad A^{0-} \cup A^{-0} = (2,5]$$
$$A^0 = (3,4) \cup (4,5)$$

83. K 是一个去掉了一些方格的棋盘，使得

(1) 在此棋盘中不可能再放置任何一个 1×2 块；

(2) 无论在棋盘的什么位置复原一个被去掉的单个方格后，就可以在棋盘上又放置一个 1×2 块.

容易看出，对 8×8 棋盘来说，得到 K 至少需要去掉 32 个方格. 问最多可以去掉几个方格？

(AMM E2665)

解 试验建议去掉的方格的最大数是 48(看下面数表).

0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0

设 x 是留在棋盘外圈的方格的数目，y 是留在紧靠着外圈的圈中的方格的数目，然后 z 是留在从外向内数第三圈中的方格的数目，最后 u 是留在最里面一圈中的方格的数目，那么显然我们必须有

(1) $3x + y \geq 28$；　　(2) $x + 3y + z \geq 20$；

(3) $y + 3z + u \geq 12$；　　(4) $z + 3u \geq 4$.

显然 $u = 0, 1$ 或 2. 如果 $u = 0$，那么

$$4(x + y + z) = (3x + y) + (x + 3y + z) + 3z \geq$$
$$28 + 20 + 12 = 60$$

因此 $x + y + z \geq 15$. 如果 $x + y + z = 15$，那么(1)，(2)，(4) 式必

须都是等式,然而这个方程组没有整数解,因此我们必有 $x+y+z\geqslant 16$.

如果 $u=1$,那么

$$7(x+y+z)=2(3x+y)+(x+3y+z)+2(y+3z)\geqslant 2\cdot 28+20+2\cdot 11=98$$

即 $x+y+z\geqslant 14$,如果 $x+y+z=14$,那么(1),(2),(3)式必须都是等式,然而这个方程组没有整数解,因此我们必有

$$x+y+z\geqslant 15$$
$$x+y+z+u\geqslant 16$$

如果 $u=2$,那么

$$7(x+y+z)=2(3x+y)+(x+3y+z)+2(y+3z)\geqslant 2\cdot 28+20+2\cdot 10=96$$

即 $x+y+z\geqslant 14$,因此 $x+y+z+u\geqslant 16$.

这样,在任何情况下都至少需留下16个方格.

(AMM E2927*)

84.归纳地定义三个数列如下:$a_1=1,b_1=2,c_1=4$.

a_n 等于不在 $a_1,\cdots,a_{n-1},b_1,\cdots,b_{n-1},c_1,\cdots,c_{n-1}$ 之中的最小整数;

b_n 等于不在 $a_1,\cdots,a_{n-1},a_n,b_1,\cdots,b_{n-1},c_1,\cdots,c_{n-1}$ 之中的最小整数;

$$c_n=2b_n+n-a_n \qquad (*)$$

证明:对所有的 n 成立 $0<(1+\sqrt{3})n-b_n<2$.

证明 我们将证明对所有的 n 成立 $\alpha<(1+\sqrt{3})n-b_n<\beta$.其中 $\alpha=\dfrac{9-5\sqrt{3}}{3}>0.113,\beta=\dfrac{12-4\sqrt{3}}{3}<1.691$.

首先利用(*)

$$c_{n+1}-c_n=2(b_{n+1}-a_{n+1})+(a_{n+1}-b_n)-(b_n-a_n)+1$$

我们可用归纳法证明对所有的 n 成立

$$1\leqslant b_n-a_n\leqslant 2,1\leqslant a_{n+1}-b_n\leqslant 2,2\leqslant c_{n+1}-c_n\leqslant 6$$

其次,设 $\gamma_n=(1+\sqrt{3})n-b_n$,我们将用归纳法证明 $\alpha<\gamma_n<\beta$.可以验证 $\alpha<\gamma_1<\beta$.

假设对所有的 $n<m$ 成立 $\alpha<\gamma_n<\beta$,那么由前面已证的结果可知 $b_m,a_m,b_{m-1},a_{m-1},b_{m-2},a_{m-2}$ 不可能是6个相继的整数.设 c_n 是第一个在此递减数列中缺失的整数.那么 $n<m$,并且或者 Ⅰ $c_n=a_{m-j}-1,j=0$ 或1,或者 Ⅱ $c_n=b_{m-j}-1,j=0,1$ 或2.因此 $a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_m,c_1,\cdots,c_n$ 是前 b_m 个整数并且或者

i $2m+n=b_m=c_n+2+2j$，或者 ii $2m+n=b_m=c_n+1+2j$. 现在 $c_n=b_n+n+(b_n-a_n)$，因此在所有的情况中都有 $2m+n=b_m=b_n+n+k$，其中 $2\leqslant k\leqslant 7$. 如果 $j=2$，那么 $c_{n+1}-c_n=6$，并且从式(*)得出 $b_n-a_n=1$，故 k 不可能是7，所以 $2m=b_n+k,2\leqslant k\leqslant 6$.

现在

$$\gamma_m=(1+\sqrt{3})m-b_m=\frac{(1+\sqrt{3})(b_n+k)}{2}-(b_n+n+k)=\frac{(k-\gamma_n)(\sqrt{3}-1)}{2}$$

利用归纳法假设，如果 $2\leqslant k\leqslant 6$，那么

$$\gamma_m>\frac{(2-\beta)(\sqrt{3}-1)}{2}=\alpha$$

如果 $2\leqslant k\leqslant 4$，那么

$$\gamma_m<\frac{(4-\alpha)(\sqrt{3}-1)}{2}<\beta$$

如果 $k=6$，从式(*)得出

$$b_{n+1}-a_{n+1}=a_{n+1}-b_n=2$$

因此
$$b_{n+1}-b_n=4$$

现在
$$r_{n+1}-r_n=1+\sqrt{3}-(b_{n+1}-b_n)=\sqrt{3}-3$$

因此
$$\gamma_m<\frac{(6-\alpha-3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}=\beta$$

类似的，如果 $k=5$，从式(*)得出 $b_{n+1}-b_n=3$ 或4，因此

$$\gamma_{n+1}-\gamma_n\leqslant\sqrt{3}-2,\gamma_n>\alpha+2-\sqrt{3}$$

所以
$$\gamma_m<\frac{(5-\alpha-2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{2}=\beta$$

这就完成了归纳法的步骤.

注 数值结果建议这里的界可能是最好的. 例如，当 $n=17\ 135$ 时，$\gamma_n=1.690\ 588$，而当 $n=23\ 407$ 时，$\gamma_n=0.113\ 253$.

85. 设 $A=(a,a')$ 和 $B=(b,b')$ 是平面坐标系中的格点，$d(A,B)=|a-b|+|a'-b'|$，D 是在此距离定义下，所有距离原点至多为 k 的点的集合，其中 k 是一个正整数. 计算 $f(k)=\sum\limits_{A,B\in D}d(A,B)$. (AMM E2989)

解 显然 S 是关于原点对称的，因此在 S 中的水平线段和垂直线段对于总合的贡献是相等的，所以

$$f(k)=\sum_{-k\leq a<b\leq k}2N_aN_b(b-a)$$

其中对任意整数 x，N_x 表示 D 中横坐标为 x 的点的数目，即 $2k+1-2|x|$.

我们把所求的和分成以下三部分

$$\sum{}_1=\sum_{0\leq a<b}+\sum_{a<b\leq 0}=2\sum_{0\leq a<b}2N_aN_b(b-a)$$

$$\sum{}_2=\sum_{a<0<b}+\sum_{a<b=0}=2\sum_{b>0}2bN_0N_b$$

$$\sum{}_3=\sum_{0<a,b}2N_aN_b(b+a)=$$

$$2\sum_{0<a<b}2N_aN_b(b+a)+\sum_{b>0}4bN_b^2$$

所求的总和为

$$\sum=\sum{}_1+\sum{}_2+\sum{}_3=$$

$$\sum_{1}^{k}4bN_b(N_0+2N_1+\cdots+2N_{b-1}+N_b)$$

其中
$$N_b=2k+1-2b$$
$$N_0+2N_1+\cdots+2N_{b-1}+N_b=2b(2k+1-b)$$

由此就得出

$$f(k)=8(2k+1)^2S_2-24(2k+1)S_3+16S_4$$

其中
$$S_n=1^n+2^n+\cdots+k^n$$

因而根据熟知的公式即可得出

$$f(k)=\frac{2}{15}k(k+1)(2k+1)(7k^2+7k+6)$$

(AMM 10203)

86. 设 a,b,c,d 都是正整数，满足关系式
$$b^2+1=ac,c^2+1=bd$$
证明：$a=3b-c,d=3c-b$.

证明　由已知条件易证以下两个等价关系

$$a=3b-c\Leftrightarrow b^2+1=(3b-c)c$$
$$b^2+c^2+1=3bc\Leftrightarrow d=3c-b$$

因此只须证明如果 $c\mid(b^2+1)$，$b\mid(c^2+1)$，则 $b^2+c^2+1=3bc$ 即可. 我们可设 $b\leq c$，并对 $b+c$ 实行数学归纳法来证明这一结论.

如果 $b+c=2$，那么 $b=c=1$，因此结论成立. 如果 $c>1$，那么 $b\neq c$，这蕴含 $b\leq c-1$，因而 $b^2+1<c^2$ 并且 $a<c$. 等式 $b^2+1=ac$ 和 $c^2+1=bd$ 蕴含 $(b^2+1)^2=a^2(bd-1)$，因而 $1\equiv -a^2(\mathrm{mod}\ b)$，这意味着 $b\mid(a^2+1)$. 由于 $a\mid(b^2+1)$ 以及

$a+b<b+c$，因此由归纳法假设得出 $a^2+b^2+1=3ab$。

现在

$$(b^2+1)^2=a^2c^2=(3ab-b^2-1)c^2=3abc^2-(b^2+1)c^2$$

因此 $$(b^2+1)(b^2+c^2+1)=3abc^2=3bc(b^2+1)$$

这就得出 $$b^2+c^2+1=3bc$$

因此，如果结论对小于 $b+c$ 的正整数成立，则它对正整数 $b+c$ 也成立，因而由数学归纳法就证明了所需的结论.

87. 设 a,b 都是整数.

(1) 证明：如果 $ab\mid(a^2+b^2+1)$，则 $\frac{a^2+b^2+1}{ab}=3$.

(2) 求出所有使得 $ab\mid(a^2+b^2+1)$ 的整数对 (a,b).

(AMM 10316)

解 如果 $ab\mid(a^2+b^2+1)$，则显然 $a\neq0,b\neq0$. 又假如 (a,b) 是一对满足问题要求的整数，那么交换 a,b 的位置后以及取 a,b 的相反数后，我们仍然得出一对满足问题要求的整数，因此只须考虑 $a\geqslant b>0$ 的解即可，而其他的所有解都可以从这种解得出.

设 $F_1=F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ 是斐波那契数，又规定 $F_{-1}=1,F_0=0$，则 F_n 对 $n=0$ 也有意义，并且满足同样的递推规律. 由熟知的公式

$$F_{2n-1}F_{2n+1}=F_{2n}^2+1$$

(此式可用数学归纳法证明) 可以得出

$$F_{2n+1}^2+F_{2n-1}^2-2F_{2n+1}F_{2n-1}=(F_{2n+1}-F_{2n-1})^2=F_{2n}^2=F_{2n+1}F_{2n-1}-1$$

故 $$F_{2n+1}^2+F_{2n-1}^2+1=3F_{2n+1}F_{2n-1}$$

这说明 (F_{2n+1},F_{2n-1}) 是一对满足问题要求及条件 $a\geqslant b>0$ 的解.

现在证明 $(F_{2n+1},F_{2n-1}),n=0,1,2,\cdots$ 就是全部满足问题要求及条件 $a\geqslant b>0$ 的解.

如果 $a=b$，那么 $a^2\mid(2a^2+1)$，由此易得 $a=b=1$，这就是 $n=0$ 时的对 (F_{2n+1},F_{2n-1}). 因此以下不妨设 $a>b>0$，下面对 a 用归纳法证明我们的结论.

假设对小于 a 的正整数 a'，结论成立. 即如果 (a',b') 是满足问题要求及条件 $a>a'\geqslant b'>0$ 的解，则对某个 n，$(a',b')=(F_{2n+1},F_{2n-1})$.

现在设 (a,b) 是满足问题要求及条件 $a>b>0$ 的解. 于是 $ab\mid(a^2+b^2+1)$，因而可设 $a^2+b^2+1=kab$. 令 $a'=b,b'=$

$kb-a$，则由 $a^2+b^2+1=kab$ 可知 $b'=\dfrac{b^2+1}{a}$. 由直接计算可知

$$(a')^2+(b')^2+1=b^2+(kb-a)^2+1=$$
$$kb(kb-a)=ka'b'$$

同时由 $0<b<a$ 可以得出 $b^2<ab$，因此 $b^2+1\leqslant ab$ 或 $b'=\dfrac{b^2+1}{a}\leqslant b=a'$，故

$$0<b'\leqslant a'<a$$

因此由归纳法假设可知 $a'=b=F_{2n+1}$，以及 $b'=kb-a=F_{2n-1}$.

由上面已证的关于斐波那契数的等式可知必有 $k=3$，因此

$$a=kb-b'=3F_{2n+1}-F_{2n-1}=$$
$$2F_{2n+1}+F_{2n}=F_{2n+1}+F_{2n+2}=F_{2n+3}$$
$$(a,b)=(F_{2n+3},F_{2n+1})$$

因此由数学归纳法就证明了满足问题要求及条件 $0<b\leqslant a$ 的所有解就是 (F_{2n+3},F_{2n+1}).

注 由于由 $a\mid(b^2+1)$，$b\mid(a^2+1)$ 可以推出 $ab\mid(a^2+b^2+1)$，因此本题又给出了问题71的另一种解法.

（AMM 10263）

88. 设 m,n 是奇偶性相同的正整数，n^2-1 是 $\mid m^2+1-n^2\mid$ 的倍数，证明：$\mid m^2+1-n^2\mid$ 必是一个完全平方数.

证明 由假设我们有

$$n^2-1=t(m^2+1-n^2)$$

因此
$$m^2=(t+1)(m^2+1-n^2)$$

令 $k=t+1$，则 k 是非零整数，我们只须证明 k 是一个完全平方数即可.

设 S_k 是所有使得 $(x+y)^2=k(1+4xy)$ 成立的有序整数对 (x,y) 的集合. 那么由于 $\left(\dfrac{m+n}{2},\dfrac{m-n}{2}\right)\in S_k$，因此集合 S_k 是非空的. 设 $a=\min\{\mid x\mid \mid (x,y)\in S_k\}$. 如果 $a=0$，那么 a 必属于 S_k 中的某个对 (a,b). 由于 $k\neq 0$，于是 $b\neq 0$，因而根据 S_k 的定义和 $(a,b)\in S_k$ 可知 $k=b^2$，即 k 是一个完全平方数，于是我们只须证明 $a=0$ 即可.

a 所在的对的另一个元素是二次方程 $(x+a)^2=k(1+4ax)$ 的解，因此这个二次方程的两个根 b_1,b_2 都必须是整数，而且其绝对值至少是 a. 由根与系数的关系可知 $b_1+b_2=4ak-2a$ 以及

$b_1b_2=a^2-k$. 由直接计算得出

$$(a+b_1)(a+b_2)=(4a^2-1)k$$

如果 $k<0$,那么由上面的式子得出 $b_1b_2>0$ 和 $b_1+b_2\leqslant 0$,因此 b_1 和 b_2 都是负数. 由于 $a<|b_i|$,因而 $a+b_i<0$,由此又得出$(4a^2-1)k>0$. 这一条件再加上 $k<0$ 就得出 $a=0$,但是 $a=0$ 蕴含 k 是一个完全平方. 因此我们只须讨论 $k>0$ 的情况.

如果 $k>0$ 并且 $a>0$,那么 $b_1+b_2>0$ 并且$(a+b_1)(a+b_2)>0$,因而 b_1 或 b_2 是正的,由 a 的定义可知 $a^2\leqslant b_1b_2$,但是 $k>0$ 蕴含 $b_1b_2=a^2-k<a^2$,矛盾. 这说明必有 $a=0$,因而 k 是一个完全平方.

注　我们的证明说明 m^2+1-n^2 本身就是一个完全平方数,并且必有 $m^2\geqslant n^2$.

> 89. 设 k,n 都是正整数,证明:
>
> (1) 当 $n=2$ 时,对任意 k,不存在不同的正整数 a,b 使得$k^2<a,b<(k+1)^2$,而 ab 是完全平方数.
>
> (2) 当 $n\geqslant 2$时,对充分大的 k,必存在 n 个不同的正整数 $a_i,i=1,2,\cdots,n$ 使得$k^n<a_i<(k+1)^n$,而 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个完全 n 次方.

证明　(1) 假设存在 $k^2<a<b<(k+1)^2$,使得 ab 是完全平方数,又设 m 是a 的非平方部分,则 $a=ms^2$,其中 m 不含平方因子. 由于 ab 是完全平方数,故 b 的非平方部分也是m,因此可设 $b=mt^2$,由于 $a<b$,因此 $t\geqslant s+1$. 这样

$$\frac{(k+1)^2}{k^2}>\frac{b}{a}=\frac{t^2}{s^2}\geqslant\left(1+\frac{1}{s}\right)^2$$

因而 $s>k$,这说明

$$b=mt^2\geqslant m(s+1)^2>(k+1)^2$$

与 $k^2<a<b<(k+1)^2$ 的假设矛盾.

(2) 首先证明以下引理:

引理　设 $C>0,n\geqslant 2$,那么对充分大的 k,或更确切地说,对 $k\geqslant C^{n-1}$,成立

$$(k+1)^{n}>(k^{\frac{n}{n-1}}+C)^{n-1}$$

引理的证明　设 $k=C^{n-1}t,t\geqslant 1$,则

$$(k+1)^{n-1}=(C^{n-1}t+1)^{n-1}\geqslant\left(C^{n-1}t+\frac{1}{t^{\frac{1}{n-1}}}\right)^{n-1}=$$

$$\frac{1}{t}(C^{n-1}t^{\frac{n}{n-1}}+1)^{n-1}$$

因此 $(k+1)^n=(C^{n-1}t+1)^n=$

$$\left(C^{n-1}+\frac{1}{t}\right)\cdot t\cdot(C^{n-1}t+1)^{n-1}>$$

$$C^{n-1}(C^{n-1}t^{\frac{n}{n-1}}+1)^{n-1}=$$

$$(C^n t^{\frac{n}{n-1}}+C)^{n-1}=(k^{\frac{n}{n-1}}+C)^{n-1}$$

以下分两种情况进行讨论：

(1) n 是奇数. 设 a 是大于 $k^{\frac{n}{n-1}}$ 的最小整数, $b=a+1$, 那么

$$a^{n-1},a^{n-2}b,\cdots,ab^{n-2},b^{n-1}$$

这 n 个整数是两两不同的, 而其乘积是整数 $(ab)^{\frac{n-1}{2}}$ 的 n 次方, 因而是一个完全 n 次方数. 他们之中的最小者 a^{n-1} 大于 k^n, 按照 a 的定义有 $a<k^{\frac{n}{n-1}}+1$, 因而 $b=a+1<k^{\frac{n}{n-1}}+2$, 故他们之中的最大者 b^{n-1} 至多为 $(k^{\frac{n}{n-1}}+2)^{n-1}$. 因此由引理可知当 $n\geqslant 2^{n-1}$ 时

$$b^{n-1}<(k^{\frac{n}{n-1}}+2)^{n-1}<(k+1)^n$$

也就是上述 n 个整数都是位于 k^n 和 $(k+1)^n$ 之间的, 这就证明了结论.

(2) n 是偶数. 仍设 a 是大于 $k^{\frac{n}{n-1}}$ 的最小整数, $b=a+1$, $c=a+2$. 对 $1\leqslant i<n$, 设 $x_i=a^{n-i}b^{i-1}$, $y_i=c^{n-i}b^{i-1}$, 那么由引理可知, 当 $k\geqslant 3^{n-1}$ 时

$$k^n<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<y_{n-1}<\cdots<$$

$$y_2<y_1<(k^{\frac{n}{n-1}}+3)^{n-1}<(k+1)^n$$

因此 $x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<y_{n-1}<\cdots<y_2<y_1$ 这 $2n-2$ 个整数是两两不同的, 并且都是位于 k^n 和 $(k+1)^n$ 之间的.

如果 n 可被 4 整除, 比如说 $n=4m$, 那么我们从上述 $2n-2$ 个整数中可选 $x_1,x_3,x_5,\cdots,x_{4m-1},y_1,y_3,y_5,\cdots,y_{4m-1}$, 这 n 个数作为 a_i, 他们的乘积是 $a^m b^{2m-1}c^m$ 的 n 次幂.

如果 $n=8m+2$, $m>0$, 那么我们可选 $x_2,x_3,x_4,\cdots,x_{4m+2},y_2,y_3,y_4,\cdots,y_{4m+2}$ 这 n 个数作为 a_i, 他们的乘积是 $a^{3m}b^{2m+1}c^{3m+2}$ 的 n 次幂.

如果 $n=8m+6$, $m>0$, 那么我们可选 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{4m+3},y_1,y_2,y_3,\cdots,y_{4m+3}$ 这 n 个数作为 a_i. 他们的乘积是 $a^{3m+2}b^{2m+1}c^{3m+2}$ 的 n 次幂.

这样, 综合以上几种情况, 我们就证明了(2).

第 2 章　几何问题

> 1. 在等腰△ABC 中，$AB = AC$. 顶角 $\angle A = 20°$，在 AB 边上取一点 D，使 $AD = BC$. 求 $\angle BDC$ 的度数.

解　如图 1，作直线 AM 使得 $AM \perp BC$，那么由于△ABC 是等腰三角形，故 M 是 BC 边的中点，因此 $BM = CM$. 又做直线 AE，使得 $\angle CAE = 10°$，那么由已知条件可知 $\angle BAE = 30°$. 再做 $CE \perp AE$，$DF \perp AE$. 那么易证 Rt△ACE 和 Rt△ABM 全等，因此 $CE = BM = CM$. 又在 Rt△ADF 中，$DF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC = CM = BM = CE$，并且由于 DF 和 CE 都与 AE 垂直，因此 $DF \parallel CE$，$DF = CE$. 这就说明四边形 $DFEC$ 是平行四边形，因而 $DC \parallel EF$，由此即可得出 $\angle BDC = \angle BAE = 30°$.

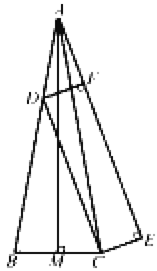


图 1

（AMM E2930）

> 2. 求出可嵌入某个面积为 1 的三角形的最大正方形的面积.

解　如果把正方形中的一个点对每一个边做反射，那么放射后所得的像将构成一个四边形的顶点，这个四边形各边的中点就是原来的正方形的顶点，并且其面积是正方形面积的两倍.（无须说话证明，只须在图 1 中看出相应的全等三角形即可）

任意包含正方形的半平面至少要含有 3 个正方形顶点的反射像点. 因此任何 3 个那种平面的交集将至少含有一个像点. 特别，嵌入了正方形的三角形将至少含有一个像点. 因此，如果把三角形在正方形之外的区域通过正方形的边做反射，那么正方形中的每个点将至少被覆盖一次. 那样，三角形在正方形之外的区域的面积至少同正方形的面积一样大，这就是说，嵌入三角形的正方形的面积至多是三角形面积的一半.

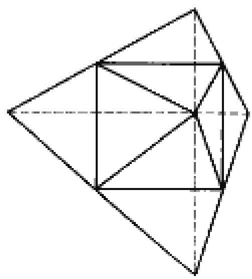


图 1

(AMM E1476)

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，D 是 BC 的中点，E 是从 D 向 AC 所引的垂线的垂足，F 是 DE 的中点. 证明：$AF \perp BE$.

证明　设 H 是从 B 向 AC 所引的垂线的垂足，那么 BE 和 AF 分别是相似直角三角形 CBH 和 DAE 的对应的中线. 由于这两个三角形的对应边是互相垂直的，因此 $AF \perp BE$.

(AMM E2639)

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 40°$，$\angle B = 60°$. D 和 E 分别是 AC 边和 AB 边上使得 $\angle CBD = 40°$ 和 $\angle BCE = 70°$ 的点，F 是直线 BD 和 CE 的交点. 证明：$AF \perp BC$.

证明　由

$$BA\cos 60° = \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}BC\frac{\sin 80°}{\sin 40°} = BC\cos 40° = BF\cos 40°$$

即可得出结论.

(AMM 10810)

5. 如图 1，设凸四边形 $ABCD$ 中没有平行边. 在它的每条边上，例如 AB 边上，按下述方法选一点 T：从 A 和 B 分别引一条和 AB 的对边平行的直线，设这两条平行线分别交过点 A 和点 B 的四边形的另两条边于 A' 和 B'，而 T 是 AB 和 $A'B'$ 的交点. 证明：用这种方法所选出的四个点构成一个平行四边形.

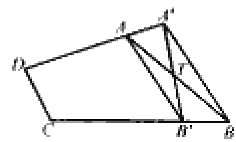


图 1

证明　如图 2，类似于 T 的构造，从 B 和 C 分别引一条和 AD 平行的直线. 设 C' 和 B'' 分别是这两条平行线和 CD 和 AB 的交点，S 是 BC 和 $B''C'$ 的交点. 我们证 $ST \parallel AC$.

延长 DA 和 CB，设它们相交于点 X，延长 AB 和 CD，设它们相交于点 Y，那么

$\triangle B'BA$ 相似于 $\triangle CBY$，因此 $\dfrac{B'B}{CB} = \dfrac{BA}{BY}$，同理

$\triangle B''BC$ 相似于 $\triangle ABX$，因此，$\dfrac{B''B}{AB} = \dfrac{BC}{BX}$，从而

$$B'B \cdot BY = B''B \cdot BX = AB \cdot BC$$

故

$$\frac{B'B}{BX} = \frac{B''B}{BY}$$

这说明在 $\triangle BXY$ 中 $B'B'' \parallel XY$，而因此有

$$\frac{XB'}{XB} = \frac{YB''}{YB}$$

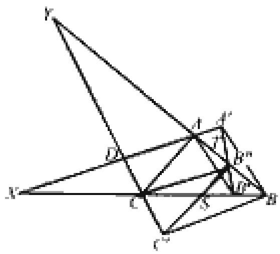


图 2

又 $\triangle XB'A$ 相似于 $\triangle XBA'$，因此 $\frac{XB'}{XB}=\frac{B'A}{BA'}$；

$\triangle YB''C$ 相似于 $\triangle YBC'$，因此 $\frac{YB''}{YB}=\frac{B''C}{BC'}$；

$\triangle B'AT$ 相似于 $\triangle A'BT$，因此 $\frac{B'A}{A'B}=\frac{AT}{BT}$；

$\triangle B''CS$ 相似于 $\triangle C'BS$，因此 $\frac{B''C}{C'B}=\frac{CS}{BS}$.

这样就得出

$$\frac{AT}{TB}=\frac{B'A}{A'B}=\frac{XB'}{XB}=\frac{YB''}{YB}=\frac{B''C}{BC'}=\frac{CS}{BS}$$

$\frac{AT}{TB}=\frac{CS}{BS}$ 说明在 $\triangle ABC$ 中 $TS\parallel AC$. 对其余的点进行类似的推理说明这四个点构成的四边形的两对对边分别平行于 AC 和 BD，因而是一个平行四边形.

(AMM 10749)

6. 设 $\triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle A=30°$，$\angle B=90°$. 一个弹子从点 A 出发，顺次在 BC 边处的点 P，AC 边处的点 Q，AB 边处的点 R，AC 边处的点 S 反射，最后到达点 B.

(1) 证明：AP，QR 和 SB 交于一点 X.

(2) 证明：AP，QR 和 SB 在点 X 处构成 6 个 $60°$ 的角.

(3) 证明：$AX=XP+PQ+QX=XR+RS+SX=2XB$.

证明 如图 1，以 BC 边为反射轴将 $\triangle ABC$ 反射为三角形 $\triangle A'BC$，以 $A'C$ 边为反射轴将 $\triangle A'BC$ 反射为 $\triangle A'CB'$，以 $A'B'$ 边为反射轴将 $\triangle A'CB'$ 反射为 $\triangle A'B'C'$，最后再以 $A'B'$ 边为反射轴将 $\triangle A'B'C'$ 反射为 $\triangle A'C'B''$. 设点 A,B,C,P,Q,X,R,S 在各个反射所得的三角形中的对应点为 A',B',C',P',Q',X',R',S' 和 B'',P'',X''.

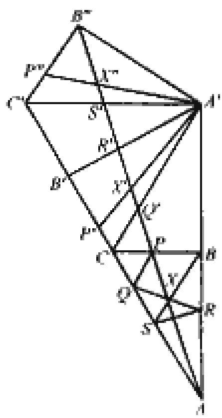


图 1

那么直线 AB'' 就对应于弹子的路线 $APQRSB$. X' 是 $A'P'$ 和 $Q'R'$ 的交点，X'' 是 $A'P''$ 和 $S'B''$ 的交点. X' 对应于 AP 和 QR 的交点，X'' 对应于 AP 和 SB 的交点. 因此 $\triangle A'R'X'$ 的 $\angle A'$ 和 $\angle R'$ 分别和 $\triangle AR'A'$ 的 $\angle A$ 和 $\angle R'$ 重合，因此这两个三角形是相似的，因而它们对应的第三个角也相等，即 $\angle R'X'A'=\angle AA'R'=60°$. 同理，$\triangle A'X''B''$ 的 $\angle A'$ 和 $\angle B''$ 分别和 $\triangle AA'B''$ 的 $\angle A$ 和 $\angle B''$ 重合，因此 $\angle B''X''A'=\angle AA'B''=120°$. 而 $\triangle AX''X'$ 中有两个角都等于 $60°$，因此成立等式

$$A'X'=A'X''=X'R'+R'S'+S'X'' \quad ①$$

由于 $A'X'=A'X''$，点 X' 和 X'' 都对应于 X. 这就证明了(1). 同样，我们有

$$\angle A'X'R'=\angle A'X''S'=60°, \angle AXR=\angle AXS=60°$$

因此在点 X 处的 6 个角都等于 $60°$，这就证明了(2)。由于 $\angle SXX' = 120°$ 及 $\angle P'X'X = 60°$，直线 $P'X'$ 平行于直线 SX，那样 $\triangle ASB$ 相似于 $\triangle AP'A'$。但是 $AA' = 2AB$，因此 $X'A' = 2XB$，$AX' = 2AX$，并且

$$AX = XX' = XP + PQ' + Q'X' \qquad ②$$

联合式 ① 和式 ②，并在适当的地方去掉撇号就得到(3)。

注 如果反射路线的终点位于 AB 边上的任意点 T 处，那么除了(3)中最后一个等号外，以上结果仍然成立。

(AMM 10824)

7. 设 P 是 $\triangle ABC$ 内部的一个点，$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = 30°$。证明：$\triangle ABC$ 是等边三角形。

证明 如图1，从点 P 分别向 BC，CA，AB 边引垂线 PD，PE，PF。设

$$BC = a, AC = b, AB = c$$
$$PD = x, PE = y, PF = z$$

那么由已知条件和 PD，PE，PF 的意义可知

$$PC = 2y, PA = 2z, PB = 2x$$

因此在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中有 $BD = \sqrt{3}x$，因而 $CD = a - \sqrt{3}x$。在 $\text{Rt}\triangle PDC$ 中有 $PD^2 + CD^2 = PC^2$，因而有

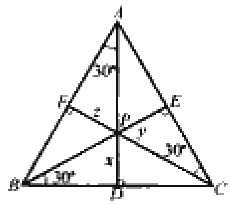


图 1

$$x^2 + (a - \sqrt{3}x)^2 = (2y)^2$$

或
$$a^2 - 2\sqrt{3}ax + 4x^2 = 4y^2$$

同理可得
$$b^2 - 2\sqrt{3}by + 4y^2 = 4z^2$$
$$c^2 - 2\sqrt{3}cz + 4z^2 = 4x^2$$

把以上三式相加得

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\sqrt{3}(ax + by + cz)$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 Δ，那么由 PD，PE，PF 的意义可知

$$\frac{1}{2}(ax + by + cz) = \Delta$$

联合上面两个式子和海伦公式可得

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ 表示 $\triangle ABC$ 的半周长。

将上式两边平方，化简后即得

$$a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2c^2 = 0$$

上式等价于

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 = 0$$

由此即可得出 $$a^2 = b^2 = c^2$$
因而 $$a = b = c$$
这就证明了 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

(AMM E2128)

8. 设 M 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的任意一点,证明:
$$(AM - AC) \cdot BC \leqslant (AB - AC) \cdot MC$$

证法 1 把 AM 和 BC 看成退化四边形 $ABMC$ 的对角线,那么对此四边形应用托勒密定理即得
$$AM \cdot BC \leqslant MC \cdot AB + AC(BC - MC)$$
或者 $$(AM - AC) \cdot BC \leqslant (AB - AC) \cdot MC$$
等号在 A,B,M,C 共圆时,即 M 和 B 或 C 重合时成立.

证法 2 设 $CM = hCB$,那么
$$0 \leqslant h \leqslant 1, AM = hAB + (1 - h)AC$$
那样
$$|BC|\{h|AB| + (1 - h)|AC|\} \geqslant |BC||AM|$$
因此
$$h|BC|\{|AB| - |AC|\} \geqslant |BC| \cdot |AM| - |BC| \cdot |AC|$$
由此即可得出所需的不等式.

(AMM E1836)

9. 设锐角 $\triangle ABC$ 的 b,c 边上的中线互相垂直,证明:$\cot B + \cot C \geqslant \frac{2}{3}$.

证明 如图 1,设在 $\triangle ABC$ 中,b,c 边上的中线交于 G,延长 AG 交 BC 边于 D,则 AD 是 BC 边上的中线,因此 $BD = CD$. 又从点 A 向 BC 边做垂线并交 BC 边于点 K,那么
$$\cot B + \cot C = \frac{BK}{AK} + \frac{CK}{AK} = \frac{BK + CK}{AK} = \frac{BC}{AK}$$
由于在 $\triangle ABC$ 中,b,c 边上的中线互相垂直,因此 GD 是 Rt$\triangle BGC$ 的斜边 BC 上的中线,故 $BD = GD = CD$. 由此即可得出
$$\cot B + \cot C = \frac{BC}{AK} \geqslant \frac{BC}{AG} = \frac{2GD}{3GD} = \frac{2}{3}$$

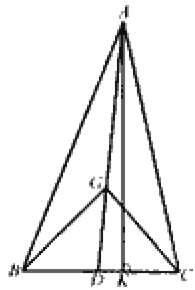


图 1

10. 给定一个边长为 $a,b,c,a\leqslant b\leqslant c$ 的三角形,定义它的倾斜度(skewness)为

$$S=\max\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right)\min\left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right)$$

求出倾斜度的最大值和最小值并指出三角形在什么情况下达到这些值.

(AMM 1705)

解 对于等腰三角形而言,$S=1$.现在假设 $a<b<c$,那么 S 是 $\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{b}$ 和 $\left(\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{b}{a}$ 中的较小者.因此对一个不等边三角形,$S>1$.给定 a,c 让 S 达到最大的 b 必须使得 $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$.因此 $a<b<c$ 构成一个几何级数并因而可重写成 a,ar,ar^2,$r>1$,那样 $S=r^2r^{-1}=r$.三角不等式要求 $1+r>r^2$ 或 $r^2-r-1<0$,因此 $r<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.对 S 来说就是 $1\leqslant S<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.当三角形成为等腰三角形时,$S$ 达到最小值,S 没有最大值,但是可以无限地逼近其上界.

11. 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,h_a,h_b,h_c 分别是三边上的高,s 是 $\triangle ABC$ 的半周长.证明:$\sqrt{3}\max\{h_a,h_b,h_c\}\geqslant s$.

证明 不失一般性,可设 $h_a\leqslant h_b\leqslant h_c=1$,因此 $a\geqslant b\geqslant c$.那样,可把锐角三角形放置在平面坐标系中使得 $A=(-x,0)$,$B=(y,0)$ 以及 $C=(0,1)$,其中 $y\geqslant x\geqslant 0$.又设 $O=(0,0)$,$P=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 和 $Q=(0,1)$.

$\triangle ABC$ 的半周长可表示成一个二元函数

$$s(x,y)=\frac{1}{2}(x+\sqrt{1+x^2}+y+\sqrt{1+y^2})$$

此函数在区域 OPQ 中是严格凸的,因此其最大值必然在顶点处达到.计算表明 $s(x,y)$ 的最大值在 P 处达到,并且最大值是 $s_{\max}=\sqrt{3}$.这就证明了所要的不等式,并且等号仅在 $\triangle ABC$ 是等边三角形时成立.

注 上面的证明中使用了二元函数及凸性的概念.基本上不是一个几何的证明.下面再给出一个基本上是几何的证明,但其中也使用了初等的微积分.

首先证明此结果对锐角等腰三角形成立:

如图1，设$\triangle ADC$是锐角等腰三角形，其中$AD=AC$，DC边上的高h最大，那么

$$s=AC+\frac{CD}{2},CD=2AC\sin\frac{A}{2},h=AC\sin A$$

因此要证的不等式就等价于

$$\sqrt{3}\sin A\geqslant 1+\sin\frac{A}{2}$$

令
$$f(A)=\sqrt{3}\sin A-1-\sin\frac{A}{2}$$

那么
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0,f\left(\frac{A}{3}\right)>0$$

这说明对等边三角形，要证的不等式取等号并且$f(A)=0$在$\frac{\pi}{3}<A\leqslant\frac{\pi}{2}$中没有根。设$x=\sin\frac{A}{2}$，则可把$f(A)=0$化为

$$12x^4-11x^2+2x+1=0$$

或
$$(x+1)(2x-1)(6x^2-3x-1)=0$$

他的全部的根是$x=-1$，$x=\frac{1}{2}$和$x=\frac{3\pm\sqrt{33}}{12}$，其所对应的$A$都不在$\frac{\pi}{3}<A\leqslant\frac{\pi}{2}$之中。这就说明对于锐角等腰三角形，成立不等式

$$f(A)=\sqrt{3}\sin A-1-\sin\frac{A}{2}>0$$

这就证明了我们的结论。不过$x=\frac{3+\sqrt{33}}{12}$对应于$A\approx\frac{\pi}{2}+0.062$，因此等号对于一个几乎是直角的钝角三角形也成立。

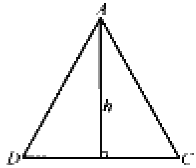


图1

如图2，现在设$\triangle ABC$是任意锐角三角形。

设$\angle A\geqslant\angle B\geqslant\angle C$，则$\angle A>\frac{\pi}{3}$，$h_c\geqslant h_b\geqslant h_a$，设$h=h_c=\max\{h_a,h_b,h_c\}$。注意$h$也是$\triangle ADC$的最大高。延长最短边$AB$至$D$使$AD=AC$。当$\angle A>\angle B=\angle C$时，$B$，$D$重合。现在应用我们上面对等腰三角形已证的结果就有

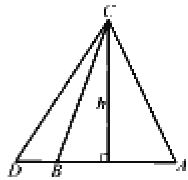


图2

$$\sqrt{3}h\geqslant s_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}(AD+CD+AC)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}(AB+BC+AC)=s_{\triangle ABC}=s$$

(AMM E2037)

12. 设p_a，p_b，p_c分别是从锐角$\triangle ABC$的定点B，C，A向中线m_a，m_b，m_c所引的垂线长，那么$p_a+p_b+p_c$不小于$\triangle ABC$的具有最小周长的内接三角形的边长之和。

证明　我们所需证明的式子为

$$\sum p_a=\frac{2\triangle}{3}\sum\frac{1}{AG}\geqslant\frac{2\triangle}{R}$$

右边表示$\triangle ABC$的垂足三角形的周长。这等价于R不小于AG，BG

和 CG 的调和平均.对关系式

$$AG^2+BG^2+CG^2+OG^2=3R^2$$

应用二次的算术 - 几何 - 调和平均不等式就得出

$$R^2 \geqslant \frac{AG^2+BG^2+CG^2}{3} \geqslant \left(\frac{AG+BG+CG}{3}\right)^2 \geqslant (\sqrt[3]{AG\cdot BG\cdot CG})^2$$

从上面的不等式就可以得出 R 不小于 AG,BG 和 CG 的调和平均.

13.设 P 是一个锐角 $\triangle ABC$ 的内点,那么 $PA+PB+PC\geqslant 2\sqrt{3}$ 倍的 $\triangle ABC$ 的垂足三角形的周长.

证明 已知 $PA+PB+PC\geqslant 6r$ 以及圆的具有最大周长的内接三角形是等边的.因此,如果 D,E,F 是所说的三角形的内切圆的切点,我们就有

$$PA+PB+PC\geqslant 6r=\frac{2}{\sqrt{3}}(3r\sqrt{3})\geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}(DE+EF+FD)$$

等号当且仅当三角形是等边的并且 P 是三角形的中心时成立.

这个不等式要比题目中要证的不等式更强,由于 $\triangle ABC$ 的垂足三角形是具有最小周长的内接三角形.

(AMM E2501)

14.在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C>\angle B\geqslant\angle A$.$O$ 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心.证明:当且仅当 $BC:CA:AB=3:4:5$ 时,$\triangle BIO$ 是一个直角三角形.

证明 我们证明一个引理如下:如图1,在任意三角形中,当且仅当 $b=\frac{1}{2}(a+c)$ 时,$\overrightarrow{IO}\perp\overrightarrow{BI}$.(规定零向量和任意向量垂直)

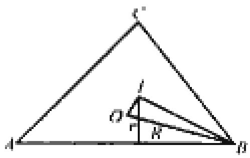


图1

利用熟知的一些结果,我们有

$$BO=R,BI=\frac{r}{\sin\frac{1}{2}B}$$

$$r=4R\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}C,IO^2=R^2-2Rr$$

由此得出以下等价关系

$$\overrightarrow{IO}\perp\overrightarrow{BI}\Leftrightarrow BI^2+IO^2=BO^2\Leftrightarrow r=2R\sin^2\frac{1}{2}B\Leftrightarrow$$

$$2\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}C = \sin\frac{1}{2}B \Leftrightarrow$$
$$\cos\frac{1}{2}(A - C) - \cos\frac{1}{2}(A + C) = \sin\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\cos\frac{1}{2}(A - C) = 2\sin\frac{1}{2}B \Leftrightarrow$$
$$2\sin\frac{1}{2}(A + C)\cos\frac{1}{2}(A - C) = 4\cos\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}B \Leftrightarrow$$
$$\sin A + \sin C = 2\sin B \Leftrightarrow a + c = 2b$$

现在回到原来的问题，设 $C = \frac{\pi}{2}$. 在 $\triangle BIO$ 中，$\angle IBO$ 不可能是直角，显然当且仅当 $\triangle ABC$ 是一个等腰直角三角形时 $\angle IOB$ 是一个直角. 最后根据引理，当且仅当 $b = \frac{1}{2}(a + c)$ 时，$\angle BIO$ 是一个直角. 设 $c = b + d, a = b - d$，就得出 $(a,b,c) = (3d,4d,5d)$.

(AMM E3071)

15. 设在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = \alpha$，$\angle B = \beta$，$\angle C = \gamma$，$\gamma > \beta > \alpha$，那么 I 必位于 $\triangle OBH$ 之中. 其中 O, I, H 分别表示 $\triangle ABC$ 的外心、内心和垂心.

证明　由于 $AH \perp BC$，$BH \perp AC$，故
$$\angle CAH = \angle CBH = \left|\frac{\pi}{2} - \gamma\right|$$
又由于 $\triangle ABO$ 是等腰的，故
$$\angle BAO = \angle ABO = \left|\frac{1}{2}(\pi - 2\gamma)\right| = \left|\frac{\pi}{2} - \gamma\right|$$
因此 AI 同时是 $\angle CAB$ 和 $\angle HAO$ 的平分线，同理 BI 同时是 $\angle CBA$ 和 $\angle HBO$ 的平分线.

设 AI 交 OH 于点 P，BI 交 OH 于点 Q. 显然 $OA = OB$，并且由于 $\alpha < \beta$，因而 $AH > BH$. 由角平分线对于对边的比例分配定理得
$$AH : AO = PH : PO, BH : BO = QH : QO$$
因此
$$PH > QH$$
这就是说，点 O, P, Q, H 就按照现在所写的次序排列在线段 OH 上，因此 I 必位于 $\triangle OBH$ 之中.

(AMM E1779)

16. 设 h_i 和 r_i 是三角形的高和旁切圆半径，证明
$$\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} \geqslant 3$$

证明　由于 $\frac{2}{h_i} = \frac{1}{r_j} + \frac{1}{r_k}$，其中 i, j, k 是 1,2,3 的一个轮换

(见 R.A.Johnson, Modern Geometry,189),由此立即得出(由于 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$)

$$\sum\frac{r_i}{h_i}=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{r_i}{r_j}\geqslant\frac{1}{2}\cdot 6=3$$

以及等号仅在 $r_1=r_2=r_3$ 时,即三角形是等边三角形时成立.

17.设 $ABCDE$ 是内接于单位圆的五边形,以 AE 为直径.又设 $AB=a,BC=b,CD=c,DE=d$,那么

$$a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd<4$$

(AMM E1877)

证明 延长 AC 和 CE 并设 $\angle CEA=\theta$,那么 $\angle CAE=90^\circ-\theta$,$\angle CBA=180^\circ-\theta$,$\angle CDE=180^\circ-(90^\circ-\theta)=90^\circ+\theta$.由余弦定理有

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^\circ-\theta)=a^2+b^2+2ab\cos\theta$$

$$CE^2=c^2+d^2-2cd\cos(90^\circ-\theta)=c^2+d^2+2cd\sin\theta$$

又在 Rt$\triangle ACE$ 中有 $AC^2+CE^2=AE^2=4$,还有 $AC=2\sin\theta>b$ 和 $CE=2\cos\theta>c$(由于钝角),把这些式子代入上面的式子,并将其相加就得出

$$4>a^2+b^2+c^2+d^2+abc+bcd$$

18.设在 $\triangle ABC$ 中成立

$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\sqrt{3}$$

证明:在 $\triangle ABC$ 中至少有一个角是 60°.

(AMM E1936)

证明 容易证明:如果 $P+Q+R=0$,那么

$$\sin P+\sin Q+\sin R=-4\sin\frac{P}{2}\sin\frac{Q}{2}\sin\frac{R}{2}$$

由于 $\sqrt{3}=\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}$,因此所给的关系式可以写成

$$\sum(\sin A\cos 60^\circ-\sin 60^\circ\cos A)=\sum\sin(A-60^\circ)=0$$

由一开始所提到的结果,上式就是

$$\sin\frac{1}{2}(A-60^\circ)\sin\frac{1}{2}(B-60^\circ)\sin\frac{1}{2}(C-60^\circ)=0$$

这就得出至少要有一个角要等于 60°.

(AMM E2035)

19. 非等腰三角形的欧拉线是否能通过这个三角形的费马点?

解 不能.

在 $\triangle ABC$ 的 BC 边和 AC 边各向外做等边三角形 BDC 和 AEC. 那么 AD 和 BE 的交点 F 就是这个三角形的费马点. 如果 F 位于连接外心和垂心的直线 OH 上, 那么 $\triangle ODF$ 和 $\triangle HAF$ 是相似三角形, 因此

$$\frac{OF}{FH}=\frac{OD}{AH}=\frac{R\cos A+R\sqrt{3}\sin A}{2R\cos A}=\frac{1+\sqrt{3}\tan A}{2}$$

同理 $\triangle BHF$ 和 $\triangle EOF$ 相似, 有

$$\frac{OF}{FH}=\frac{OE}{BH}=\frac{R\cos B+R\sqrt{3}\sin B}{2R\cos B}=\frac{1+\sqrt{3}\tan B}{2}$$

因此当且仅当 $\tan A=\tan B$, 或 $BC=AC$ 时, F 位于欧拉线上.

注 可以证明, 三角形的外心、重心和垂心一定位于一条直线上, 这条直线就称为三角形的欧拉线.

又三角形中对各顶点都构成 120° 角的点就称为这个三角形的费马点.

(AMM E1311)

20. 设单位正方形可被 3 个直径为 d 的集合覆盖, 那么 d 的最小值是什么?

证明 用一个 $\frac{1}{8}\times 1$ 矩形和两个 $\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}$ 矩形显然可以正好将一个单位正方形覆盖, 因此用 3 个直径为 $d=\frac{\sqrt{65}}{8}$ 的集合可覆盖一个单位正方形.

下面我们证明, 用三个直径小于 d 的集合无法覆盖单位正方形. 假设不然, 设以 $(0,0),(0,1),(1,1),(1,0)$ 为顶点的单位正方形被三个直径 $d_i<d$ 的集合 $S_i, i=1,2,3$ 所覆盖. 那么某个集合必须覆盖两个顶点. 不失一般性, 不妨设 S_1 覆盖了 $(0,0)$ 和 $(0,1)$. 以 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 为中心, d_1 为半径作圆可以看出 S_1 不可能覆盖 $\left(\frac{1}{8},0\right),\left(\frac{1}{8},1\right)$ 和 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 这三个点. 因此 S_2 或 S_3 中的某一个, 比如说 S_2 必须覆盖上述三个点中的两个点. 由于 $d_2<\frac{\sqrt{65}}{8}$, 因此这两个点只能是 $\left(\frac{1}{8},0\right)$ 和 $\left(\frac{1}{8},1\right)$, 再以这两个点为中心 d_2 为半径

作圆可以看出 S_2 不可能覆盖点 $\left(\frac{1}{4},0\right)$ 和(1,1),因此 S_3 必须覆盖这两个点,而这与 S_3 的直径 $d_3 < \frac{\sqrt{65}}{8}$ 相矛盾,所得的矛盾就说明 $d_{\min} = \frac{\sqrt{65}}{8}$.

(AMM E1374)

21. 设单位正方形可被5个直径为 d 的集合覆盖,那么 d 的最小值是什么?

解 通过尺度变换,我们一开始可以考虑任意边长的正方形.

考虑一个顶点位于 $A_1(-16,16)$,$A_2(16,16)$,$A_3(16,-16)$,$A_4(-16,-16)$ 的边长为32的正方形,又设

$$B_1(-16,3),B_2(0,16),B_3(16,3),B_4(8,-16)$$

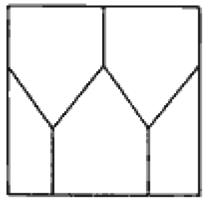
$$B_5(-8,-16),B_6(-8,-3),B_7(0,3),B_8(8,-3)$$

是正方形内部的8个点,那么集合

$$S_1 = A_1B_2B_7B_6B_1,S_2 = B_2A_2B_3B_8B_7$$

$$S_3 = B_3A_3B_4B_8,S_4 = B_6B_5A_4B_1$$

和集合 $S_5 = B_7B_8B_4B_5B_2$ 是5个直径都是 $\sqrt{425}$ 的集合,它们覆盖了边长为32的正方形,如图1所示.


图1

这说明对边长为32的正方形,$d \leqslant \sqrt{425}$.

下面我们证明用五个直径小于 d 的集合无法覆盖单位正方形.

由于正方形有四个顶点,所以每一个直径小于 d 的集合都无法同时覆盖两个顶点,因此为覆盖正方形的四个顶点,就必须用四个集合 S_1,S_2,S_3,S_4.以每个顶点为中心,d 为半径画圆可以看出,这四个集合之中的任何一个都不可能完全覆盖四个角部的四分之一圆,因此某个边上必有一个点 P 无法被 $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ 覆盖,此外(0,3),(3,0),(0,-3),(-3,0)也不能被 Σ 覆盖.由于对称性,不妨设 P 在底边,这时(0,3),(3,0),(0,-3),(-3,0)这四个点由某一个点成为 B_7.由于 $PB_7 \geqslant 19 > d$,因此 S_5 也不可能覆盖这两个点,这就说明用五个直径小于 d 的集合无法覆盖单位正方形.

这就得出对于单位正方形 $d_{\min} = \frac{\sqrt{425}}{32} = \frac{5\sqrt{17}}{32}$.

22. 证明:任意凸的闭曲线内部都存在一个中心对称的内接六边形,并且此中心对称的内接六边形的面积和凸闭曲线的面积之比至少是$\frac{2}{3}$.

(AMM E1170)

证明 用 G 表示凸闭曲线. 如图 1 所示,任意给定一条直线 g,考虑 G 中平行于 g 的最大弦 AB. 设 $0 < s < AB$,并在 AB 的两侧在 G 内做两条平行于 AB,长度为 s 的弦 P_1P_2 和 P_4P_5. 通过 P_2,P_4 分别作平行于 P_1P_4 和 P_2P_5 的平行线,并设它们交于 P_3,通过 P_1,P_5 分别作平行于 P_1P_4 和 P_2P_5 的平行线,并设它们交于 P_6. 于是我们得到一个中心对称的六边形 $P(S) = P_1P_2P_3P_4P_5P_6$.

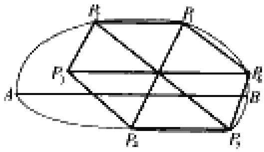


图 1

当 s 很小时,P_3 和 P_6 都位于 G 内,而当 s 接近于 AB 时,P_3 和 P_6 都在 G 外. 因此由 P_3 和 P_6 的位置关于 s 的连续性可知必将存在一个介于 0 和 AB 之间的 s,使得 P_3 和 P_6 之中,一个位于 G 的边界上,而另一个在 G 外. 又用这种方法确定的六边形是连续的依赖于 g 的,因此当我们按反时针方向旋转 g 时,P_6 也将按反时针方向旋转,最后当我们把 g 旋转 $180°$ 后,P_3 和 P_6 将交换位置,因而由六边形对于 g 的连续性可知,对某个 g,P_6 必将也位于 G 的边界上,这样我们就得出了一个 G 的内接的中心对称六边形.

为了说明六边形 P 和 G 的面积(仍用表示)满足关系 $\frac{P}{G} \geqslant \frac{2}{3}$,考虑图 2. 用 $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ 表示六边形和 G 之间所夹的六个

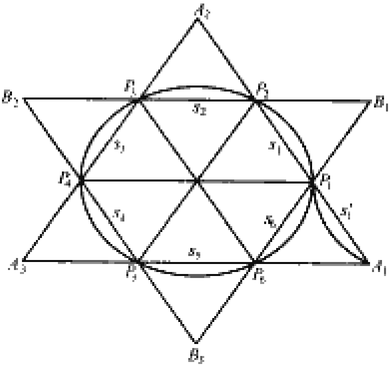


图 2

小弧形区域,并延长六边形的边构成两个三角形 $A = A_1A_2A_3$ 和 $B = B_1B_2B_3$,如果我们以 P_1 为中心反射 s_1,那么由于 G 的凸性和 $\triangle A_1P_1P_6$ 是由 $\triangle B_1P_1P_2$ 反射而得,因此就在 $\triangle A_1P_1P_6$ 内部

得到与 s_1 全等的区域 s'_1. 这就得出 $s_6 + s'_1 = s_6 + s_1$ 小于或等于 $\triangle A_1P_1P_6$ 的面积. 在 P_3 和 P_5 处实行同样的反射就得出 $G \leqslant A = \frac{3P}{2}$. 等号当且仅当 G 恒同于三角形 A 或 B 成立.

(AMM E1581)

23. 设 m_1, m_2, m_3 分别是一个等边三角形的三条边的斜率, 又设它们都是有限的并且全不为零. 证明:

(1) $m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1 = -3$.

(2) $(m_1 + m_2 + m_3)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) = 9$.

证明 用 m 代表 m_1 或 m_2 或 m_3, 那么这个三角形的三条边和 x 轴正向之间的夹角就分别是 $\arctan m$, $120° + \arctan m$ 和 $240° + \arctan m$. 设 $p = m_1m_2m_3$, 那么

$$p = m \cdot \frac{m - \sqrt{3}}{1 + m\sqrt{3}} \cdot \frac{m + \sqrt{3}}{1 - m\sqrt{3}} = \frac{m(m^2 - 3)}{1 - 3m^2}$$

由此得出 m_1, m_2, m_3 是三次方程

$$m^3 + 3pm^2 - 3m - p = 0$$

的根. 这就立即得出

$$m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1 = -3$$

和 $(m_1 + m_2 + m_3)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3}\right) = (-3p)\left(-\frac{3}{p}\right) = 9$

(AMM E3299)

24. 设 $ABCD$ 是平面四边形, 没有任何两边平行. E 是 AB 和 CD 的交点, F 是 AD 和 BC 的交点. M, N, P 分别是 AC、BD、EF 的中点. 又设 $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF} = b\overrightarrow{AD}$, 其中 a, b 是非零实数, 证明: $\overrightarrow{MP} = ab\overrightarrow{MN}$.

证明 适当选择一个仿射坐标系后, 我们可设 $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (x,y)$, $D = (0,1)$. 那样 $M = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $N = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $E = (a,0)$, $F = (0,b)$, $P = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$. 由于 D, C, E 共线, B, C, F 共线. 因此 x, y 可以用 a, b 表出, 即

$$x = \frac{a(1-b)}{1-ab}, y = \frac{b(1-a)}{1-ab}$$

因此 $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(1 - x, 1 - y) = \frac{1}{2(1 - ab)}(1 - a, 1 - b)$

$$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}(a-x,b-y)=\frac{ab}{2(1-ab)}(1-a,1-b)=ab\overrightarrow{MN}$$

(AMM 10308)

25. 设 p_1,p_2,p_3,q_1,q_2,q_3 是平面上的6个点，又 p_i 和 q_j 之间的距离是 $i+j$. 证明：这6个点是共线的.

证明 设 p_i,q_j 的坐标分别是 $(x_i,y_i),(a_j,b_j)$. 不失一般性，可设 $(x_2,y_2)=(2,0),(a_2,b_2)=(-2,0)$，那么由已知条件可列出方程

$$(x_i-a_j)^2+(y_i-b_j)^2=(i+j)^2 \qquad (E_{ij})$$

由表达式 $E_{11}-(E_{12}+E_{21}),E_{33}-(E_{32}+E_{23}),E_{13}-(E_{12}+E_{23})$ 和 $E_{31}-(E_{32}+E_{21})$ 就得出

$$(x_1-2)(a_1+2)+y_1b_1+1=0$$

$$(x_3-2)(a_3+2)+y_3b_3+1=0$$

$$(x_1-2)(a_3+2)+y_1b_3-1=0$$

$$(x_3-2)(a_1+2)+y_3b_1-1=0$$

因此 $(1+y_1b_1)(1+y_3b_3)=$

$$(x_1-2)(a_1+2)(x_3-2)(a_3+2)=(1-y_1b_3)(1-y_3b_1)$$

由此可以得出 $(y_1+y_3)(b_1+b_3)=0$

假设 $y_1+y_3=0$（$b_1+b_3=0$ 的情况类似），那么把上面列出的方程中第一个和第四个方程相加就得出

$$(x_1+x_3-4)(a_1+2)=0$$

如果 $a_1+2=0$，那么由方程 (E_{21}) 将得出 $b_1^2=-7$，矛盾. 因此只能有 $x_1+x_3=4$. 这时由 $E_{32}-E_{12}$ 得出 $8(x_3-x_1)=16$，因此 $x_1=1,x_3=3$. 而那样由 (E_{12})、(E_{32}) 就得出 $y_1=y_3=0$，这就得出 $a_1=-1,a_3=-3,b_1=b_3=0$. 这说明所有的6个点都在 x 轴上，因而是共线的.

(AMM E3397)

26. 设 $\triangle ABC$ 的外周被三个点 P,Q,R 分成了三个相等的部分. 证明

$$S(PQR)\geqslant\frac{2}{9}S(ABC)$$

其中 $S(ABC)$ 和 $S(PQR)$ 分别表示三角形 ABC 和 PQR 的面积，并且常数 $\frac{2}{9}$ 是最好的.

证明 我们将证明更强的结果

$$S(PQR) \geqslant \frac{2}{9}\left(1+\frac{F^2}{abcs}\right)F$$

其中 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的边长，s 是半周长，$F=S(ABC)$. 在取得极值的情况下，P,Q,R 中任何两个点不可能是 $\triangle ABC$ 的同一条边的内点. 由于沿着适当的方向平移一个常数距离后，$\triangle PQR$ 的高将变小，因而面积也将减小. 因此我们可设 P,Q,R 分别位于 BC,CA,AB 边上.

设 $p=\frac{s-a}{3}$，$q=\frac{s-b}{3}$，$r=\frac{s-c}{3}$，那么 p,q,r 都是非负的，并且 $a=3q+3r$，$b=3r+3p$，$c=3p+3q$. P,Q,R 的位置现在可被参数表示如下

$$BP=q+2r+x,CQ=r+2p+x,AR=p+2q+x$$

再设 $H(x)=1-\frac{S(PQR)}{S(ABC)}$，那么

$$\frac{S(ARQ)}{S(ABC)}=\frac{\frac{1}{2}AR\cdot AQ\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}=\frac{AR\cdot AQ}{bc}=$$

$$\frac{(p+2q+x)(p+2r-x)}{9(p+q)(p+r)}$$

对 BPR 和 CQP 有类似的表达式，因此

$$H(x)=\frac{1}{9}\left(\frac{(q+2r+x)(q+2p-x)}{(q+r)(q+p)}+\frac{(r+2p+x)(r+2q-x)}{(r+p)(r+q)}+\frac{(p+2q+x)(p+2r-x)}{(p+q)(p+r)}\right)$$

这是一个 x 的二次函数，其中 x 的系数是0，而 x^2 的系数是非负的，因此其极值在 $x=0$ 处取得. 把 $x=0$ 代入上式，我们得出

$$H(0)=\frac{7}{9}-\frac{2pqr}{9(p+q)(q+r)(r+p)}$$

我们看出当 q 和 r 固定，p 趋于0时，$H(0)$ 趋近于 $\frac{7}{9}$. 换句话说，很"平"的三角形可能具有最好的常数. 为了得出更强的结果，我们可用边长、半周长和 $\triangle ABC$ 的面积来表出 $H(0)$

$$H(0)=\frac{7}{9}-\frac{2F^2}{9abcs}$$

这就导出我们对面积比例所说的下界.

（AMM E1844）

27. 在平面上是否存在三个点 A,B,C 使得对平面上任意一点 P，距离 PA,PB,PC 都不是有理数.

解 存在.

设 $A=(0,0)$，$B=(\sqrt{2},0)$，$C=(\pi,0)$，$P=(x,y)$，如果距离 PA,PB,PC 都是有理数，那么

$$\frac{1}{2}(PA^2-PB^2+2)=\sqrt{2}x$$

和

$$PA^2-PC^2=2\pi x-\pi^2$$

也都是无理数，由此可以推出 π 是代数数，矛盾. 因此 A,B,C 就是满足要求的三个点.

注 (1) 如果把上面证明中有理数都换成代数数，那么证明仍然成立，因此结论可加强为平面上存在三个点 A,B,C，使得对平面上任意一点 P，距离 PA,PB,PC 不可能都是代数数.

(2) 不仅在平面中，在一般的 Hilbert 空间中，这一结论仍然成立. 设 A 和 B 是两个固定点，C 是它们的中点，P 是任意一点，那么由平行四边形定律可知

$$AB^2=2PA^2+2PB^2-4PC^2$$

取 $AB=\sqrt[4]{2}$，那么 PA,PB,PC 不可能都是有理数.

（AMM 4619）

28. 设 L_i，$i=1,2,3,4,5$ 是空间中的 5 条直线. 用 (ij) 表示 L_i 和 L_j 之间的夹角，证明：行列式

$$\left|\sin^2\frac{(ij)}{2}\right|=0,\ i,j=1,2,\cdots,5$$

证明 $\sin^2\dfrac{(ij)}{2}=\dfrac{1-\cos(ij)}{2}=\dfrac{1}{2}(1-x_ix_j-y_iy_j-z_iz_j)$

其中 x_i,y_i,z_i 是 L_i 的方向余弦. 那样

$$|A|=\left|\sin^2\frac{(ij)}{2}\right|=\frac{1}{32}|1-x_ix_j-y_iy_j-z_iz_j|=$$

$$\frac{1}{32}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1 & 0\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & 0\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 & 0\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 & 0\\ 1 & x_5 & y_5 & z_5 & 0\end{vmatrix}\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & -y_4 & -y_5 \\ -z_1 & -z_2 & -z_3 & -z_4 & -z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(AMM E1912)

29. 证明：毕达哥拉斯(Pythagorean)定理的推广．设 P 是 $\mathbf{R}^n$ 中由 k 个向量 $V_1, V_2, \cdots, V_k, k \leqslant n$ 生成的平行多面体，即向量 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 的线性组合 $a_1V_1 + \cdots + a_kV_k, 0 \leqslant a_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, k$．又设 $\{P_i\}, i = 1, 2, \cdots, C_n^k$ 是 P 向 $\mathbf{R}^n$ 的 k 维坐标平面所作的投影，V_k 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 k 维体积，那么

$$V_k^2(P) = \sum_{i=1}^{C_n^k} V_k^2(P_i)$$

证明 已知由向量 $v_1, \cdots, v_k$ 生成的平行多面体的体积 $V_k(P)$ 是一个 Gramian 行列式的平方根，即

$$V_k^2(P) = \begin{vmatrix} (v_1 \cdot v_1) & \cdots & (v_1 \cdot v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ (v_k \cdot v_1) & \cdots & (v_k \cdot v_k) \end{vmatrix}$$

又设 v_i 到第 j 个 k 维坐标平面上的投影是 $v_{ij}, j = 1, 2, \cdots, C_n^k$，在 $\mathbf{R}^n$ 的标准正交基下，v_{ij} 构成一个有 k 个分量的列向量，因此 $M_j = (v_{1j}, \cdots, v_{kj})$ 是一个 $k \times k$ 矩阵．

$$V_k^2(P) = \sum_{i=1}^{C_n^k} \det{}^2(M_j)$$

(见 Shilov, Introduction to the Theory of Linear Spaces, Prentice - Hall, 1961, 170)．因此

$$\det{}^2(M_j) = \det(M_j^{\mathrm{T}} M_j) = \begin{vmatrix} (v_{1j} \cdot v_{1j}) & \cdots & (v_{1j} \cdot v_{kj}) \\ \vdots & & \vdots \\ (v_{kj} \cdot v_{1j}) & \cdots & (v_{kj} \cdot v_{kj}) \end{vmatrix}$$

由于这是对于平行多面体 P_j 的 Gramian 行列式，$\det^2(M_j) = V_k^2(P_j)$．由此即可得出所要的等式．

30. 给定两个边长为 a 和 b 的等腰三角形，说明如何用直线把它们切成不多于 6 块的小块，然后再把这些小块重新拼成一个等腰三角形，证明：当长边和短边之比 $\frac{a}{b} \geqslant \sqrt{3}$ 时，5 块就够了，当 $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ 时，4 块就够了．

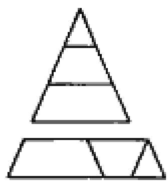


图 1

解 当$\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$时，如图1所示，把一个三角形分成两个梯形和一个三角形，然后再把它们拼成一个梯形，最后把另一个三角形放在这个梯形之上即可.

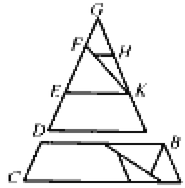


图2

当$0<\frac{a}{b}<\frac{4}{3}$时，如图2那样分割，拼接即可. 设

$$AC=\sqrt{a^2+b^2}-a$$

再令 $DE=AC$，$EF=FC$，$GH=AC$，$HK=KL$.

（AMM 4908）

> 31. 任给一个$\triangle ABC$，在三角形的三条边上各任取一个点，并将这三个点连接起来，因此$\triangle ABC$被分成了4个较小的三角形. 其中一个$\triangle DEF$内接于$\triangle ABC$，而其余三个三角形都位于$\triangle DEF$的边上. 证明：$\triangle DEF$的面积不可能是这四个小三角形中的最小的，除非它的顶点是$\triangle ABC$的边的中点.

证明 设$0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$是角上的三个小三角形的面积，$\delta$是中间的三角形的面积. 那么我们将证明$\delta\geqslant\sqrt{\alpha\beta}$，等号当且仅当$def$的顶点是$abc$的边的中点时成立. 这个结果比我们所要证的结果稍微更强一点.

设D,E,F是$\triangle DEF$的顶点，BC,CA,AB分别是D,E,F所在的边. 并设D,E,F分别把这三条边分成比例$x:x'$，$y:y'$和$z:z'$，其中$x+x'=y+y'=z+z'=1$. 又设abc的面积为1，那么角上的三角形的面积分别是$y'z$，$z'x$，$x'y$，并且

$$\delta=1-(y'z+z'x+x'y)=xyz+x'y'z'$$

如果$\gamma<\frac{1}{4}$，那么$\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$和$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1$蕴含$\delta\geqslant\sqrt{\alpha\beta}$；如果$\gamma\geqslant\frac{1}{4}$，那么

$$\delta=xyz+x'y'z'\geqslant2\sqrt{xyzx'y'z'}=2\sqrt{\alpha\beta\gamma}\geqslant\sqrt{\alpha\beta}$$

从这个证明的方法就得出当且仅当$xyz=x'y'z'$和$\gamma=\frac{1}{4}$时等号成立，这就等价于当且仅当$\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{4}$和$x=y=z=\frac{1}{2}$时等号成立.

（AMM E1507）

> 32. 如果一个正方形被分成了n个凸多边形，证明：图中所出现的边的总数至多是$3n+1$.

证明 对每个顶点 v，设 m_v 表示汇聚在 v 点的边数. 除了正方形的四个顶点之外，$m_v \geqslant 3$，故 $m_v \leqslant 3(m_v-2)$，因此

$$\sum_v m_v \leqslant 3\sum_v{}'(m_v-2)+2+2+2+2$$

现在由于所有的边都数了两次，因此 $\sum_v m_v = 2E$，而前面的不等式给出 $2E \leqslant 6E-6V+8$ 或 $E \leqslant 3(E-V)+4$. 但是由欧拉定理可知 $E-V=n-1$，这就完成了证明.

为了看出 $3n+1$ 条边是可能达到的，只要简单地把正方形的一半用顶点连线再分成两块，而另一半用水平条分成 $n-1$ 块. 同时通过此证明，我们又偶然地顺便得出了 $V \leqslant 2(n+1)$.

(AMM E1726)

33. 证明或否定：每个由凸形状的国家组成的平面地图可以用三种颜色染色.

解 这一命题是不成立的. 图1、图2所示的地图中的国家的形状都是凸的，然而这个地图需用四种颜色染色.

注 图2表明，如果把国家的形状都是凸的条件换成国家的形状都是三角形的，这个命题仍然不成立.

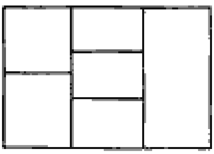


图1

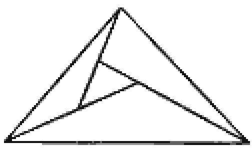


图2

(AMM E2100)

34. 证明：下列6个关系式中的任意5个关系式蕴含第6个关系式

$$\frac{x-a_1}{a_1-a_2}=\frac{a-b}{b-c},\ \frac{x-b_1}{b_1-b_2}=\frac{b-c}{c-a},\ \frac{x-c_1}{c_1-c_2}=\frac{c-a}{a-b}$$

$$x+a=b_2+c_1,\ x+b=c_2+a_1,\ x+c=a_2+b_1$$

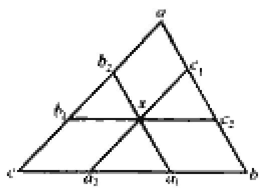


图1

证明 如图1，任取一个三角形，设其顶点为 a,b,c，在三角形内任取一点 x，过 x 做三条平行于三角形边的直线，设这三条直线与三角形的边的交点是 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2，那么所说的6个关系式都成立. 如果从这6个点中去掉一个，比如说 c_2，那么 x 就成

为 a_2c_1 和 b_2a_1 的交点，而 c_2 可以作为 b_1x 和 ab 的交点被确定，这就对应于由某5个关系式确定了第6个关系式.

(AMM E2101)

35. ABC 是一个三角形，设 P_a 表示和 AB，AC 边分别切于 B，C 的抛物线，类似可定义抛物线 P_b，P_c. 设这些抛物线在 ABC 内交于点 A'，B'，C'. 分别用 Δ，Δ_0，Δ'_a，Δ'_b，Δ'_c，Δ''_a，Δ''_b，Δ''_c 表示曲线三角形 ABC，$A'B'C'$，$AB'C'$，$BC'A'$，$CA'B'$，$A'BC$，$B'CA$，$C'AB$ 的面积，证明：

(1) $\Delta'_a=\Delta'_b=\Delta'_c=\Delta_1$，$\Delta''_a=\Delta''_b=\Delta''_c=\Delta_2$.

(2) $\Delta_0:\Delta_1:\Delta_2:\Delta=15:17:5:81$.

证明 在平行投影下，圆锥曲线的性质，相切，线段和面积的比例都是不变的，并且任意三角形可以变换成一个等边三角形. 因此(1)已得证.

为了证明(2)，设 $\triangle ABC$ 是坐标平面上的等边三角形，其顶点的坐标分别为 $A=(1,\sqrt{3})$，$B=(0,0)$，$C=(2,0)$，那么抛物线 P_a 和 P_c 的方程为

$$P_a: y=\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sqrt{3}$$

$$P_c: \sqrt{3}x^2+6xy+3\sqrt{3}y^2-16y=0$$

从上面的式子我们得出

$$\Delta_0+2\Delta_1+\Delta_2=\sqrt{3}\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{2}{3}\Delta$$

$$y=\frac{8\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{9}\sqrt{4-3x}, 0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$$

因此我们求出

$$\Delta_2=2\int_0^1 y\,\mathrm{d}x=\frac{5\sqrt{3}}{81}=\frac{5}{81}\Delta$$

以及
$$\Delta_0+3\Delta_1+3\Delta_2=\Delta$$

解关于 Δ_0，Δ_1 和 Δ_2 的方程组即可得出(2).

(AMM E2145)

36. 在任意四边形 $ABCD$ 中，做 CE 平行于 DA，并设 CE 交 AB 于点 E，做 CF 平行于 BA，并设 CF 交 AD 于点 F. 又设 BF 和 ED 交于点 K. 证明：四边形 $AEKF$ 和四边形 $KBCD$ 有相同的有向面积.

证明 $AECF$ 是平行四边形，设其面积为 $2z$. 作直线 KA，KC，

EF.已知对任意点 K,AEK 和 KCF 的有向面积之和是 z.同样 ECK 和 KFA 的有向面积之和也是 z.现在

$$ECK + KFA = z = ECF = ECD = ECK + KCD$$

因此 $KFA = KCD$,类似的

$$AEK + KCF = z = FEC = FBC = BCK + KCF$$

因此 $AEK = BCK$,这样就得出

$$AEKF = AEK + KFA = BCK + KCD = BCDK$$

(AMM E2213)

37.如果一个平面多边形的所有顶点和周长的平分点的连线都是共点的,则称此多边形具有 Nagel 性质.已知所有的三角形都具有 Nagel 性质,但并不是所有的四边形都具有 Nagel 性质.确定一个简单的非退化的具有 Nagel 性质的四边形.

解 设 $ABCD$ 是一个具有 Nagel 性质的四边形.设 AA',BB',CC',DD' 平分周长并且交于 Nagel 点 N.又设 $AB = a$,$BC = b$,$CD = c$,$DA = d$.我们可设 $a + b \geqslant c + d$ 以及 $b + c \geqslant a + d$.由此得出 C' 位于线段 AB 上,B' 位于线段 CD 上以及 A' 和 D' 都位于线段 BC 上,如图 1 所示.设 $BD' = u$,$A'C = v$,$CB' = w$ 以及 $a + b + c + d = 2s$.由于 $BC + CB' = s = D'C + CD$,因而 $DB' = u$.类似的,$AC' = v$,$BC' = w$ 以及 $D'A' = d$.以下分三种情况进行讨论.

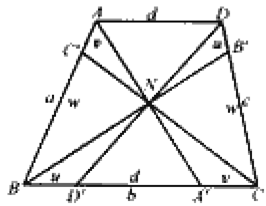


图 1

(1) $u \neq 0$,$v \neq 0$.由于 AA' 和 DD' 交于点 N,通过对被直线 CNC' 所割的 $\triangle ABA'$ 应用梅涅劳斯(Menelaus)定理我们看出 CC' 通过点 N 的充分必要条件是

$$\frac{v}{w} \cdot \frac{b}{-v} \cdot \frac{A'N}{NA} = -1$$

类似的对被直线 BNB' 所割的 $\triangle DD'C$ 应用梅涅劳斯定理我们看出当且仅当

$$\frac{-u}{b} \cdot \frac{w}{u} \cdot \frac{DN}{ND'} = -1$$

时,BB' 通过点 N.那样

$$\frac{DN}{ND'} = \frac{b}{w} = \frac{AN}{NA'}$$

因此 AD 平行于 $D'A'$,并且由于这些线段也是相等的,这就得出 $ADA'D'$ 是一个平行四边形.这个平行四边形的对角线 AA' 和 DD' 互相平分,因此 $AN = NA'$ 并且 $b = w$.但是 $b + w = s$,因此 $2w = a - b + c + d = 2b$,由此我们得出

$$b = \frac{a + c + d}{3}$$

这就得出 $ABCD$ 是一个梯形，这个梯形的较长的底边是其他三边的算术平均. 重复这一段的论述可以说明每个那种梯形都具有 Nagel 性质. 例如顶点为(0,0)，(19,0)，(6,24)，(0,24) 的梯形有 Nagel 中心 $N=(7,12)$.

(2) $u=v=0$，那么 $a+b=c+d=s$，并且 $a+d=b+c=s$，因此 $2a+b+d=2c+b+d$. 由此得出 $a=c$，$b=d$，从而 $ABCD$ 是平行四边形. 反过来，显然每个平行四边形都具有 Nagel 性质.

(3) $u=0$ 而 $v\neq 0$(或者反过来). 设 AC 和 BD 交于 M，如图 2 所示.

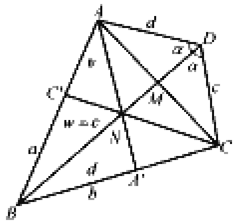


图 2

现在 $a+d=b+c=s$，因此

$$d+v+w=C'B+BC=CD+DA+AC'=c+d+v$$

故 $c=w$. 对被直线 CNC' 所割的 $\triangle ABA'$ 和被直线 BNM 所割的 $\triangle AA'C$ 应用梅涅劳斯定理，我们得到

$$\frac{b}{-v}\cdot\frac{A'N}{NA}\cdot\frac{v}{c}=-1$$

因此 $$\frac{A'N}{NA}=\frac{c}{b},\frac{AN}{NA'}\cdot\frac{-d}{b}\cdot\frac{CM}{MA}=-1$$

因此 $$\frac{CM}{MA}=\frac{b}{d}\cdot\frac{A'N}{NA}=\frac{b}{d}\cdot\frac{c}{b}=\frac{c}{d}$$

由于 M 把 $\triangle DAC$ 的边 CA 分成相邻边的比 $\frac{c}{d}$，因此 DM 平分 $\angle D$，即 $\angle ADM=\angle MDC=\alpha$. 对三角形 ABD 和 CBD 应用余弦定理并设 $BD=f$，我们有

$$a^2=d^2+f^2-2df\cos\alpha$$
$$b^2=c^2+f^2-2cf\cos\alpha$$

因而 $$a^2-b^2=d^2-c^2-2f(d-c)\cos\alpha$$

假设 $d\geqslant c$，并设 $d=c+e$. 因此 $b=c+v+e$ 以及 $a=c+v$. 现在

$$a^2-(a+e)^2=(c+e)^2-c^2-2ef\cos\alpha$$

化简后得 $$ef\cos\alpha=ce+ae+e^2$$

如果 $e\neq 0$，那么 $\cos\alpha=\frac{c+a+e}{f}=\frac{c+b}{f}$，由于 $c+b>f$，因此此式不可能成立，因此必有 $e=0$，因而 $c=d$ 以及 $a=b$. 这图形因而是一个风筝，由对称性，每个风筝都具有 Nagel 性质.

(AMM E2215)

38. 求具有最小面积 K 的包含了三个半径为 $1,b,b$ 的圆的四边形的形状.

解 K 是 b 的函数，其依赖于 b 的公式如下：

(1) 当 $0 \leqslant b \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 时, $K = 4$;

(2) 当 $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \leqslant b \leqslant 0.415$ 时, $K = \frac{(1+b)^2}{(1-b)\sqrt{b}}$;

(3) 当 $0.415 \leqslant b \leqslant 0.926$ 时

$$K = (1+b+\sqrt{1+2b})\left((1+b+\sqrt{1+2b})\cot A + 2\cot\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)\right)$$

其中 $A = B + C, B = \arcsin\frac{1-b}{1+b}, C = \arccos\frac{b}{1+b}$

(4) 当 $0.926 \leqslant b \leqslant 1$ 时, $K = (d+b+1)\tan\theta + bc\tan\theta$, 其中

$$d = \sqrt{5b^2 + 8b\sqrt{b} + 2b + 1}, \theta = 45^\circ + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1-b}{d}$$

(5) 当 $1 \leqslant b \leqslant 2\sqrt{2}-1$ 时

$$K = 2b(3b + 2\sqrt{b} + \sqrt{b(2-b)})$$

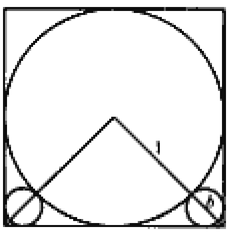
(6) 当 $2\sqrt{2}-1 \leqslant b \leqslant 3.783$ 时

$$K = b\left(6b + 4\sqrt{b} + \frac{2(2-b)}{b-1}\sqrt{b} + \frac{b(b-1)}{2\sqrt{b}}\right)$$

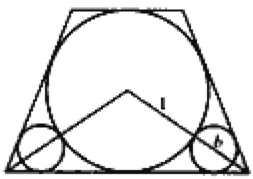
(7) 当 $3.783 \leqslant b \leqslant 4$ 时, $K = 4b(b+2\sqrt{b})$;

(8) 当 $4 \leqslant b$ 时, $K = 8b^2$.

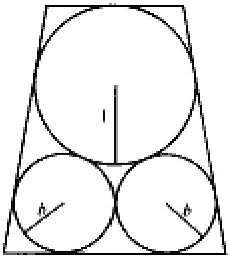
对应的图形如下:



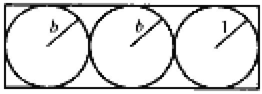
(1)



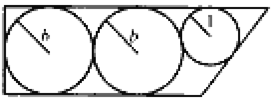
(2)



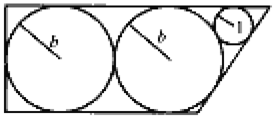
(3)



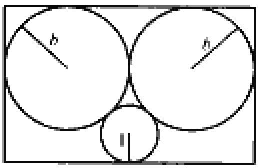
(4)



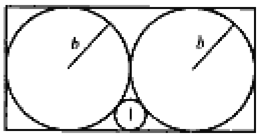
(5)



(6)



(7)



(8)

39. 平面上的凸体是一个有非空内点的凸集. 一个凸体的宽度是所有两条支持直线之间的最小可能的距离. 设 K 是平面上的凸体,其宽度为 w,面积为 A,那么 K 包含一个$\frac{\sqrt{A}}{4} \times \frac{w}{2}$ 矩形.

证明　设 l_1 和 l_2 是 K 的两条具有最小距离的 w 的平行的支持直线,而 m_1 和 m_2 是和它们垂直的两条平行的支持直线,m_1 和 m_2 之间的距离为 h. 由于 $A \leqslant hw \leqslant h^2$,因此显然 $h \geqslant \sqrt{A}$. K 在 l_1 和 l_2 上有两个切点 X 和 Y,因此 $XY \perp l_1$(由类似于 Yaglom and Boltyanskii ,Convex Figure ,Holt ,Rinehart and Winston 1961 117 中所给出的论述),如图 1 所示. 设 P 和 Q 是两个都以 XY 为边的矩形的对角线的交点. 那么四边形 $XPYQ$ 位于 K 内. $PQ \perp XY$, $XY = w$ 并且 $PQ = \frac{h}{2}$. 那么由 $XPYQ$ 各边的中点构成的矩形位于 K 内. 这

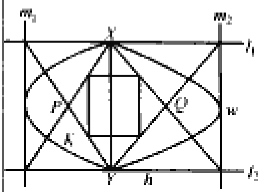


图 1

个矩形的两边的边长是 $\frac{w}{2}$ 和 $\frac{h}{4}$. 注意它的面积 $T=\frac{wh}{8}\geqslant\frac{A}{8}$，那样 K 肯定包含有一个更小的边长为 $\frac{w}{2}$ 和 $\frac{\sqrt{A}}{4}$ 的矩形. 此外，可选择长度为 $\frac{w}{2}$ 的边平行于直线 l_1.

40. 证明：一个等腰三角形可以分成7个关于其主中线(即两个相等的腰所夹的角的角平分线)对称的锐角等腰三角形，除非顶角 $\angle A$ 是 $90°$，$120°$ 或 $135°\leqslant\angle A\leqslant 144°$.

(AMM E2918)

证明 设所说的三角形是 $ABB'(B=B')$. 如果 $\angle A<90°$，则所说的三角形可以先分成如图1所示的4个与原三角形相似的全等三角形. 再把上面那个三角形同样再分成4个三角形，就得出了7个关于其主中线对称的锐角等腰三角形，它们都与原三角形相似，因而都是锐角三角形.

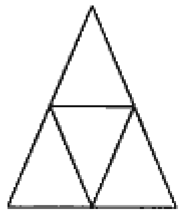


图1

如果 $A\geqslant 90°$，如图2所示. 设 H 是分划唯一的内点. 如果 H 与它的对称点 H' 都不在对称轴上(图2(a))，画出三角形 AHH' 和 MHH'，那么由对称性，我们将得出偶数个三角形. 如果 H 与 H' 都在对称轴上(图2(b))，画出三角形 AHP，AHP' 和 $MH'M'$，那么多边形 $BMH'HP$ 不可能被分成两个三角形.

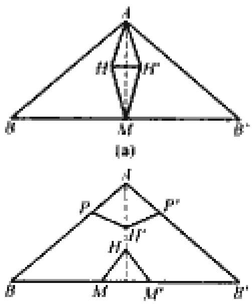


图2

现在设 P，P' 是 AB，AB' 边上的顶点，M，M' 是 BB' 边上的顶点(必然如此)，那么三角形 BPM，$BP'M'$ 的"主"顶点是 B 和 B'(由于 $B=B'<45°$). $\triangle HMM'$ 的"主"顶点是 H(由于对称性). 对三角形 AHP，PHM(或者 AHP'，$P'HM'$)，我们必须考虑9对主顶点，如图3所示.

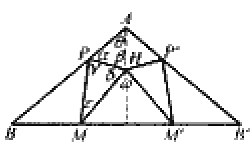


图3

$$\angle BPM=\angle MBP=\frac{\pi+\angle A}{4},\angle PMB=\frac{\pi-\angle A}{2}$$

(1) θ，γ 是主顶点，这时 $\omega=\frac{\pi+2\angle A}{4}>90°$，不可能；

(2) θ，δ 是主顶点，这时 $\delta=90°$，这不可能；

(3) θ，ε 是主顶点，这时 $\varepsilon=90°$，这不可能；

(4) α，γ 是主顶点，这时 $\omega=\frac{3\pi-\angle A}{4}>90°$，这不可能；

(5) β，γ 是主顶点，这时 $\beta=\pi-\angle A<90°$ 以及 $\omega=\frac{5\angle A-\pi}{4}<90°$ 蕴含 $\angle A<108°$，因此 $90°<\angle A<108°$；

(6) β，δ 是主顶点，这时 $\beta=\pi-\angle A<90°$ 以及 $\delta=\frac{3\angle A-\pi}{4}<90°$ 蕴含 $\angle A<120°$，因此 $90°<\angle A<120°$；

(7) β，ε 是主顶点，这时 $\beta=\pi-\angle A<90°$ 以及 $\omega=$

$\frac{7\angle A-3\pi}{4}<90°$ 蕴含 $\angle A<102.857\cdots°$，因此 $90°<\angle A<102.857\cdots°$；

(8) α,δ 是主顶点，这时 $\delta=\frac{3\pi-3\angle A}{2}<90°$ 蕴含 $\angle A>120°$ 以及 $\omega=2\angle A-\pi<90°$ 蕴含 $\angle A<135°$，因此 $120°<\angle A<135°$；

(9) α,ε 是主顶点，这时 $\omega=\frac{5\pi-5\angle A}{2}<90°$ 蕴含 $\angle A>144°$，因此 $\angle A>144°$.

41. 众所周知，用三条弦可以至多把一个圆分成七块，问这七块是否能有相同的面积？

(AMM E2391)

解 答案是不能. 假设那种解存在，易证它必须是对称的，即所有的弦都要相交成 60° 并且离圆心的距离都相等，如图 1 所示.

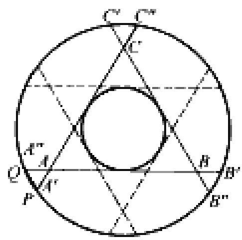


图 1

设 s 表每条弦到圆心的距离. 中心的等边三角形的面积是 $3s^2\sqrt{3}$，在单位圆中有 $3s^2\sqrt{3}=\frac{\pi}{7}$ 或 $s=\sqrt{\frac{\pi}{21\sqrt{3}}}$，这应该也是边上的一块"类三角形"图形(图 1 中的 $AA'A''$)的面积. 延长 AA' 和 AA'' 并且做一条圆的切线，使得所作的三条线构成一个等边三角形(图 1 中的 $\triangle APQ$). 这个等边三角形包含一个"类三角形"，因此其面积将大于 $\frac{\pi}{7}$，然而它的高是 $1-2s$，因而其面积是 $\frac{(1-2s)^2}{\sqrt{3}}$，把 $s=\sqrt{\frac{\pi}{21\sqrt{3}}}$ 代入此式得出其面积小于 $\frac{\pi}{7}$，因而所说的分法不可能存在.

注 问题中的圆可以换成任意凸区域. 见 R. C. Buck and E. F. Buck，Equipartition of convex sets，Math. Mag.，22(1949)，195-198，其中证明了至多六块区域可以有相同的面积，并且这六块必须是外周的块.

(AMM E2514)

42. 设 P 是一个凸多边形，其顶点是 $X_0, X_1, \cdots, X_{n-1}$，循环的在 P 的每两个相邻顶点之间取一个点，使得这个点把所在的边分成 $p:q$ 的比例，其中 $p+q=1$，这样就形成了一个新的凸多边形 K. 又设由 P 的各边的中点形成的凸多边形是 M. 证明

$$|M| = (p-q)^2|P| + 4pq|K|$$

其中 $|M|$ 表示 M 的面积，其余类似.

解 考虑一个 $\triangle ABC$，又设 D 在 A, B 之间，E 在 A, C 之间，使得 $CE : EA = p : q$，$AD : DB = p : q$，那么

$$|ADE| = p|ABE| = pq|ABC|$$

设 $Y_0Y_1\cdots Y_{n-1}$ 是多项式 M，使得 Y_i 在 X_i 和 X_{i+1} 之间（下标对 n 取模），并且 $X_iY_i : Y_iX_{i+1} = p : q$. 由一开始的说明，我们得到

$$|Y_iX_{i+1}Y_{i+1}| = pq|X_iX_{i+1}X_{i+2}|$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}|Y_iX_{i+1}Y_{i+1}| = pq\sum_{i=1}^{n}|X_iX_{i+1}X_{i+2}| = |P| - |M|$$

在上式中令 $p = q = \frac{1}{2}$ 就得出

$$\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}|X_iX_{i+1}X_{i+2}| = |P| - |K|$$

那样 $$4pq(|P| - |K|) = |P| - |M|$$

由于 $p+q=1$，因此 $1-4pq=(p-q)^2$，这就得出

$$|M| = (1-4pq)|P| + 4pq|K| = (p-q)^2|P| + 4pq|K|$$

(AMM E2682)

43. 设 E 是平面上的椭圆，其面积为 $A \geqslant 1$. 证明：E 上整点的数目 n 满足 $n < 6A^{\frac{1}{3}}$.

证明 把 E 的中心放在坐标平面的原点，并设 C 是圆 $x^2 + y^2 = \frac{A}{\pi} = r^2$. 设 u 是平面上使得 $u(C) = E$，$\det(u) = 1$ 的线性变换（由于 C 和 E 的面积相等，因此所说的线性变换存在）. 设 k 是一个整数，$k > 2(\pi^2 A)^{\frac{1}{3}}$. 由于 $A \geqslant 1$，因此 $k \geqslant 5$. 设 P 是内接于 C 的正 k 边形，其顶点是 $p_s = re^{\frac{2\pi is}{k}}$，$s \in \mathbf{Z}$. 这里我们按照通常的方式使得复平面和坐标平面重合.

设 $v_s = \overrightarrow{p_sp_{s+1}}$，那么

$$|v_s| < \frac{2\pi r}{k} = \frac{2}{k}(\pi A)^{\frac{1}{2}}$$

由于 v_s 和 v_{s+1} 之间的夹角为$\frac{2\pi}{k}$,我们有

$$|v_s \times v_{s+1}| = |v_s|^2 \sin\frac{2\pi}{k} < \frac{8\pi^2}{k^3}A < 1$$

由于 u 是保面积的,因此由上式得出 $|u(v_s)\times u(v_{s+1})|<1$.假如在 E 上存在三个位于 $u(p_s)$ 和 $u(p_{s+2})$ 之间的整点 a,b,c,那么 $|(b-a)\times(c-b)|$ 是一个非零整数,因此

$$|(b-a)\times(c-b)|\geqslant 1$$

那样
$$|u^{-1}(b-a)\times u^{-1}(c-b)|\geqslant 1$$

由于 $u^{-1}(a),u^{-1}(b),u^{-1}(c)$ 都位于 p_s 和 p_{s+2} 之间,而在这段弧上,邻接的弦向量的外积的绝对值最大值是 $|v_s\times v_{s+1}|$,因此这不可能.这就说明在 E 的每段弧$(u(p_s),u(p_{s+1}))$所包围的区域中上至多有两个整点.这就得出 E 上至多有 k 个整点.设 k 是满足 $k>2(\pi A)^{\frac{1}{3}}$ 的最小整数,则 $k<6A^{\frac{1}{3}}$.

44.(1)证明:不可能存在一个连续的保距映射 f,把球面上所有的点都映射到平面中去(即不可能把球面整体地展开成平面的一部分).

(2)证明:球面的任何一部分 Σ 都不可能连续地保距地映射到平面上(即也不可能把球面局部地展开成平面的一部分).(P. L. Robinson, The Sphere Is Not Flat, AMM Vol. 113(2006), No 2:171-173)

证明 不失一般性,以下均设球面的半径为 1.

(1)如图 1 所示,设球心在坐标系的原点,易于验证

$$P=(1,0,0),Q=(0,1,0),N=(0,0,1),T=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

是球面上的 4 个点.(P,Q,N 显然都在球面上,而由于

$$\|OT\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+0^2}=1$$

所以 T 也在球面上.)

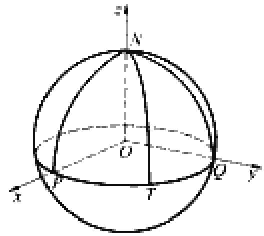


图 1

T 位于联结 P,Q 的赤道的小弧的中点,由它们所对的圆心角可知这 4 个点之间的球面距离为

$$PN=QN=PQ=NT=\frac{\pi}{2}=2L$$

$$PT=QT=\frac{\pi}{4}=L$$

假定所说的球面到平面的连续保距映射存在,那么 $f(P)$,$f(Q)$,$f(N)$ 应该构成一个长为 $2L$ 的正三角形,而 $f(T)$ 应是 $f(P)$,$f(Q)$ 所连线段的中点,如图 2 所示.

因此 $f(N)f(T)=\sqrt{3}L$，由 f 的保距性得 $NT=\sqrt{3}L$，这与 $NT=2L$ 矛盾，因此所说的连续保距映射不可能存在.

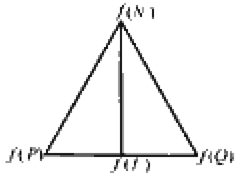


图 2

(2) 首先证明以下两个引理：

引理 1 当 θ 充分小时，$\cos 2\theta<\cos\theta\cos\sqrt{3}\theta$.

引理 1 的证明 令 $f(\theta)=\cos 2\theta-\cos\theta\cos\sqrt{3}\theta$，那么

$f'(\theta)=-2\sin 2\theta+\sin\theta\cos\sqrt{3}\theta+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\theta\cos\theta$

$f''(\theta)=-4\cos 2\theta+4\cos\theta\cos\sqrt{3}\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\sin\sqrt{3}\theta$

$f'''(\theta)=8\sin 2\theta-10\sin\theta\cos\sqrt{3}\theta-6\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\theta\cos\theta$

$f^{(\mathrm{IV})}(\theta)=16\cos 2\theta-28\cos\theta\cos\sqrt{3}\theta+16\sqrt{3}\sin\sqrt{3}\theta\sin\theta$

因此 $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0),f^{(\mathrm{IV})}(0)=-12<0$

故由 $f(\theta)$ 的泰勒展开式可知当 θ 充分小时 $f(\theta)$ 是单调递减的，因此 $f(0)>f(\theta)$，故

$$0>\cos 2\theta-\cos\theta\cos\sqrt{3}\theta$$

$$\cos 2\theta<\cos\theta\cos\sqrt{3}\theta$$

一般可证：如果 $f(\theta)=\cos\theta-\cos a\theta\cos b\theta, a^2+b^2=1$，则

$f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0,f^{(\mathrm{IV})}(0)=-4a^2b^2$

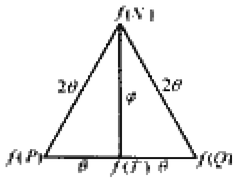


图 3

在这个一般的结果中令 $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得当 θ 充分小时 $f(0)>f(2\theta)$，这又回到我们已证的结果.

引理 2 设 $\cos\varphi=\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$，那么当 θ 充分小时就有 $\varphi>\sqrt{3}\theta$.

引理 2 的证明 由引理 1 可知当 θ 充分小时

$$\cos\varphi=\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}<\cos\sqrt{3}\theta$$

因此 $$\varphi>\sqrt{3}\theta$$

现在我们证明(2). 在 Σ 上任取一点 N，不妨设 N 位于 $(0,0,1)$ 点. 在 N 附近离 N 充分近处取两点 P 和 Q，使得 P,Q,N 构成球面上的一个等边三角形，并设其边长为 2θ. 由于在单位球面上，两点间的球面距离就是在过这两点和球心 O 的大圆上，这两点之间的弧所对的圆心角，也就是这两点的位置向量间的夹角，故可知 $OP,OQ;OQ,ON;ON,OP$ 之间所夹的角均为 2θ.

又设过 P,Q 的大圆上，PQ 弧(小弧)的中点为 T，并设 OT，ON 之间的夹角为 φ，因此 N,T 之间的球面距离为 φ.

设 P,Q,N,T 的位置向量为 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}$. 由于 O,P,Q 确定了大圆所在的平面，而 T 是 PQ 弧的中点，因此 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{t}$ 三个向量位于同一平面上，且 $\boldsymbol{t}$ 位于 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$ 所夹的角的平分线方向，故

$$\boldsymbol{t}\parallel\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$$

$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|}$$

因为
$$\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|^2=\|\boldsymbol{p}\|^2+2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}+\|\boldsymbol{q}\|^2=$$
$$1+2\cos 2\theta+1=$$
$$2(1+\cos 2\theta)=4\cos^2\theta$$
所以
$$\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|=2\cos\theta$$
$$\cos\varphi=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|}=$$
$$\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|}=$$
$$\frac{\cos 2\theta+\cos 2\theta}{2\cos\theta}=\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$
由引理 2 可知 θ 充分小时，$\varphi>\sqrt{3}\theta$. 因此如果存在把 T 连续保距地映入平面的映射 f，则必有
$$f(P)f(Q)=2\theta$$
$$f(P)f(N)=2\theta$$
$$f(Q)f(N)=2\theta$$
$$f(P)f(T)=f(Q)f(N)=\theta$$
而
$$f(N)f(T)=\varphi>\sqrt{3}\theta$$
而这与 $\varphi=\sqrt{3}\theta$ 矛盾，这一矛盾说明所说的映射不可能存在.

第3章　高等代数问题

(AMM 5393)

> 1. 是否存在奇异的 $n \times n$ 正整数矩阵，其元素是 $a_{ij} = (i, j)$，其中 (i, j) 表示正整数 i 和 j 的最大公因数？

解　不可能存在.

设 X_n 是所给的矩阵，定义两个 $n \times n$ 矩阵 $B = [b_{ij}]$，$C = [c_{ij}]$ 如下：

$$b_{ij} = \begin{cases} \varphi(i), & 如果 j = i \\ 0, & 其他情况 \end{cases}, \quad c_{ij} = \begin{cases} 1, & j \mid i \\ 0, & 其他情况 \end{cases}$$

其中 $\varphi(n)$ 是欧拉函数. 又 C' 表示 C 的转置，那么由于 CBC' 的第 i 行第 j 列处的元素为

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik} b_{kk} c'_{kj} = \sum_{k \mid (i,j)} \varphi(k) = (i, j)$$

因此，$X_n = CBC'$. 易证 $\det C = \det C' = 1$，因此

$$D_n = \det X_n = \det B = \varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$$

这就说明 X_n 不可能是奇异的.

注　我们顺便得出迭代关系 $\dfrac{D_n}{D_{n-1}} = \varphi(n)$.

(AMM E1605)

> 2. 证明：如果一个 3×3 对合矩阵 $(A^2 = I)$ 没有 0 元素，那么 A 的迹必为 1 或 -1.

证明　由于 A 不可能是 I 或者 $-I$（因为在这两种情况中，A 有零元素），因此 A 的极小多项式必须是 $x^2 - 1$，因而其特征多项式或者是 $(x+1)^2(x-1)$ 或者是 $(x+1)(x-1)^2$. 由于 A 的迹是特征多项式的根的和的相反数，由根与系数的关系即可得出结论.

实际上，除了 I 和 $-I$ 之外，这个结果对所有的 3×3 对合阵成立. 一个带有零元素的那种矩阵的例子是 $\operatorname{diag}(1, -1, 1)$.

(AMM E2559)

3. 确定下面的矩阵是奇异的还是非异的：

$$\begin{pmatrix} 51\,237 & 79\,922 & 55\,538 & 39\,177 \\ 46\,152 & 16\,596 & 37\,189 & 82\,561 \\ 71\,489 & 23\,165 & 26\,563 & 61\,372 \\ 44\,350 & 42\,391 & 91\,185 & 64\,809 \end{pmatrix}$$

解　所说的矩阵在模 5 下同余于矩阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

其行列式同余于 1(mod 5)，因此原矩阵是非异的.

(AMM 5448)

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是个 $n\times n$ 对合矩阵，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$，并且 $\boldsymbol{A}\neq\pm\boldsymbol{I}$，证明

(1) $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{A}\equiv n\pmod 2$.

(2) $|\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{A}|\leqslant n-2$.

证明　设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征向量 $\boldsymbol{u}$ 的特征值，那么我们有

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\lambda\boldsymbol{u}=\lambda^2\boldsymbol{u}$$

因此 $\lambda=\pm 1$. 假设 $\boldsymbol{A}$ 有 m 个等于 -1 的特征值，那么

$$|\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{A}|=\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right|=|(n-m)-m|=|n-2m|\equiv 2\pmod 2$$

又由于 $\boldsymbol{A}\neq\pm\boldsymbol{I}$，因此

$$|\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{A}|=|n-2m|\leqslant n-2$$

(AMM E1380)

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times n$ 非异矩阵，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=k\boldsymbol{E}$，其中 k 是数量，$\boldsymbol{E}$ 是所有元素都是 1 的矩阵. $S(\boldsymbol{C})$ 表 $\boldsymbol{C}$ 的所有元素之和，证明

$$(1-kS(\boldsymbol{A}^{-1}))(1-kS(\boldsymbol{B}^{-1}))=1$$

证明　首先注意 $\boldsymbol{ECE}=S(\boldsymbol{C})\boldsymbol{E}$，因此我们有

$$(1-kS(\boldsymbol{A}^{-1}))\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{I}-k\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{E}$$

因而

$$(1-kS(\boldsymbol{A}^{-1}))(1-kS(\boldsymbol{B}^{-1}))\boldsymbol{E}=(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})(1-kS(\boldsymbol{B}^{-1}))\boldsymbol{E}=(-\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1})(-\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$$

由此立即可以得出结论.

(AMM E1444)

6. 设 A, B 是两个 $n\times n$ 矩阵，并且 A 和 $AB-BA$ 可交换，那么对任意 $k>n$ 成立

$$n(A^kB-BA^k)=k(A^nB-bA^n)A^{k-n}$$

证明 我们首先证明对任意正整数 k 成立

$$A^kB-BA^k=k(AB-BA)A^{k-1}$$

对 $k=1$ 上式显然成立. 现在假设上式对正整数 k 成立，那么

$$\begin{aligned}A^{k+1}B-BA^{k+1}&=A(A^kB-BA^k)+(AB-BA)A^k=\\&kA(AB-BA)A^{k-1}+(AB-BA)A^k=\\&(k+1)(AB-BA)A^k\end{aligned}$$

现在，如果 $k>n>0$，那么由上式就得出

$$\begin{aligned}k(A^nB-BA^n)A^{k-n}&=kn(AB-BA)A^{k-1}=\\&n(A^kB-BA^k)\end{aligned}$$

而不管 n 是否是矩阵的阶.

(AMM 1389)

7. 计算 $n\times n$ 行列式 A_n，其中 A_n 的第 (i,j) 个位置上的元素是 $a^{|i-j|}$.

解 按第一行展开行列式或从第一行减去第二行的 a 倍都可得出 $A_n=(1-a^2)A_{n-1}$，由于 $A_1=1$，因此 $A_n=(1-a^2)^{n-1}$.

(AMM E1494)

8. 求矩阵 $[a_{ij}]=[a^{|i-j|}]$，$a\neq 0,\pm 1$ 的逆矩阵.

解 逆矩阵 $[b_{ij}]$ 是三对角的.

$$b_{11}=b_{nn}=\frac{1}{1-a^2},b_{ii}=\frac{1+a^2}{1-a^2},i=2,\cdots,n-1$$

$$b_{i+1,i}=b_{i,i+1}=-\frac{a}{1-a^2},i=1,2,\cdots,n-1$$

确实，对 $j\neq 1,n$，我们有

$$-a\cdot a^{|i-j+1|}+(1+a^2)-a\cdot a^{|i-j-1|}=\begin{cases}0,i\geqslant j+1\\1-a^2,i=j\\0,i\leqslant j-1\end{cases}$$

排除的情况 $j=1,n$ 是容易检验的.

(AMM E2046)

9. 集合 $S=\{112,518,322\}$ 中的每个数字都可被 14 整除，把 S 中的数字排列成 3 行，然后把都在同一位数上的数字看成一列，得出一个 3×3 行列式如下

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

因此看出这个行列式也可以被 14 整除. 证明：这一性质可以推广到任意 n 个 n 位数用类似方法构成的矩阵上去.

证明 设 S 中的数字是 b_i，$i=1,2,\cdots,n$，并且设 $b_i=a_{i1}10^{n-1}+a_{i2}10^{n-2}+\cdots+a_{in}$. 线性方程组

$$a_{i1}x_n+a_{i2}x_{n-1}+\cdots+a_{in}x_1=b_i,\ i=1,2,\cdots,n$$

显然有解 $x_j=10^{n-j}$，$j=1,2,\cdots,n$

因此用克莱姆(Cramer) 法则去解上述方程组就得到

$$1=x_n=\frac{\det(a_{i1},a_{i2},\cdots,b_i)}{\det(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})}$$

$$\det(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=\det(a_{i1},a_{i2},\cdots,b_i)$$

如果 $d\mid b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，那么从上式看出 $d\mid\det(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$. 这就证明了所要证的性质.

注 一些读者指出 S 中的 n 个数可以是在任意的基底文下的数字而且也不一定要有同样的位数. Langford 注意到如果把上述证明修改一下，则可以允许行列式中每一列中的数字的位数 $k\geqslant 1$. 例如对 $N_1=1\ 120$，$N_2=518$，$N_3=28$ 以及让每一列中的数字各为 1，2，1 位，我们就得出下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 0 \\ 0 & 51 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

(AMM E2064)

10. 设 A_n 是一个由 1 到 n^2 组成的按对角线排列的 $n\times n$ 行列式，例如

$$A_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 11 \\ 6 & 9 & 12 & 14 \\ 10 & 13 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

证明：当 $n=2k$ 时，$A_n=\pm k(k+1)$；当 $n=2k+1$ 时，$A_n=\pm(2k^2+2k+1)$.

证明 通过排列，我们有

$$A_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} \ddots & \ddots & 4 & 2 & 1 \\ & \ddots & \ddots & 5 & 3 \\ & & \ddots & \ddots & 6 \\ n^2 & & & \ddots & \end{vmatrix}$$

从第 n 行减去第 $n-1$ 行，从第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行，…，最后从第2行减去第1行，再从第 n 列减去第 $n-1$ 列，从第 $n-1$ 列减去第 $n-2$ 列，…，最后从第2列减去第1列就得到

$$A_n=\varepsilon\begin{vmatrix} a & -u \\ v & B \end{vmatrix}$$

其中

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},a=\frac{n^2-n}{2}+1,u=(n-1,n-2,\cdots,3,2,1)$$

$$v=\begin{bmatrix} n \\ n-1 \\ \vdots \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

由此可以得出

$$A_n=\varepsilon[a\det B+u(\mathrm{cof}\ B)v]$$

当 $n=2k$ 时，$\varepsilon=(-1)^k$，并且由于 B 是一个奇数阶的反对称阵，因此 $\det B=0$，由计算可得

$$\mathrm{cof}\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

因此 $$u(\mathrm{cof}\ B)=k(1,-1,1,-1,\cdots)$$

而 $$u(\mathrm{cof}\ B)v=k(k+1)$$

因此 $$A_{2k}=(-1)^k k(k+1)$$

当 $n=2k+1$ 时，$\varepsilon=(-1)^k$，$a=2k^2+k+1$，并且 $\det B=1$，而

$$\mathrm{cof}\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & -1 & \cdots \\ & & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

因此 $$u(\mathrm{cof}\ B)=(-k,k+1,-k,k+1,\cdots)=$$
$$-k(1,-1,1-1,\cdots)$$

而 $$u(\operatorname{cof} \boldsymbol{B})v = -k^2 + k(k+1) = k$$
因此 $$A_{2k+1} = (-1)^k(2k^2+2k+1)$$

11. 设 A,B,C 都是 n 阶行列式，其中 C 的 (i,j) 处的元素是在 A 中用 B 的第 j 列元素代替 A 的第 i 列元素所得的行列式，证明：$C=A^{n-1}B$.

(AMM E1285)

证明 用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 分别代表对应于行列式 A,B,C 的矩阵. A_{ij} 表示 $\boldsymbol{a}$ 的 (i,j) 处元素的余子式，$adj\ \boldsymbol{a}$ 表示 (i,j) 处元素为 A_{ji} 的矩阵，那么 $\boldsymbol{c}=(adj\ \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$. 在此式两边取行列式并注意柯西的 $adj\ \boldsymbol{a}$ 的行列式就是 A^{n-1} 的结果，就得到所要证的式子.

这一结果可以推广为如果以所有可能的方式用 B 的 k 个不同的列去代替 A 的 k 个不同的列，并字典式的排列所得的行列式以形成 C，那么就有 $C=A^{C_{n-1}^{k}}B^{C_{n-1}^{k-1}}$.

这一结果和一些其他的类似结果可在 Aitken, Determinants and Matrices (1956), 101-103 中找到.

12. 设在 3 阶行列式中

(1) $a_{11}=(A+B)DE-(D+E)AB$, $a_{12}=AB-DE$, $a_{13}=A+B-D-E$;

$a_{21}=(B+C)EF-(E+F)BC$, $a_{22}=BC-EF$, $a_{23}=B+C-E-F$;

$a_{31}=(C+D)FA-(F+A)CD$, $a_{32}=CD-FA$, $a_{33}=C+D-F-A$.

(2) $a_{11}=\sin(A+B)\cos(D-E)-\sin(D+E)\cos(A-B)$;

$a_{12}=\cos(A+B)\cos(D-E)-\cos(D+E)\cos(A-B)$;

$a_{13}=\cos(A+B+D+E)$;

$a_{21}=\sin(B+C)\cos(E-F)-\sin(E+F)\cos(B-C)$;

$a_{22}=\cos(B+C)\cos(E-F)-\cos(E+F)\cos(B-C)$;

$a_{23}=\cos(B+C+E+F)$;

$a_{31}=\sin(C+D)\cos(F-A)-\sin(F+A)\cos(C-D)$;

$a_{32}=\cos(C+D)\cos(F-A)-\cos(F+A)\cos(C-D)$;

$a_{33}=\cos(C+D+F+A)$.

则此三阶行列式恒等于 0.

证明 (1) 考虑抛物线 $y=x^2$ 上的 6 个点：

$$P_1(A^2,A),P_2(B^2,B),P_3(C^2,C)$$

$$P_4(D^2,D),P_5(E^2,E),P_6(F^2,F)$$

直线 P_1P_2 和 P_4P_5 的交点为

$$\left(\frac{(A+B)DE-(D+E)AB}{D+E-A-B},\frac{DE-AB}{D+E-A-B}\right)$$

类似的,可以求出直线 P_2P_3 和 P_5P_6 以及直线 P_3P_4 和 P_6P_1 的交点.由帕斯卡(Pascal)定理得出三点共线的条件就得出条件(1).

类似于(1),在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上选$(\cos 2A,\sin 2A)$,$(\cos 2B,\sin 2B)$,$\cdots$ 等6个点.然后按照同样的办法得出条件(2)中的三角关系,除了第3列应该是

$$a_{13}=\sin(A+B-D-E),a_{23}=\sin(B+C-E-F)$$

$$a_{33}=\sin(C+D-F-A)$$

(AMM E1993)

13.证明:当 $n=1,2,\cdots$ 时,$(n+1)\times(n+1)$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2C_{2n-1}^1 & 2^2C_{2n-1}^2 & \cdots & 2^nC_{2n-1}^n \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \cdots & C_{n+1}^n \\ 0 & 1 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & C_{n+1}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & C_{n+1}^1 \end{vmatrix}$$

恒等于0.

证明 对 $k=0,1,2,\cdots,n$,用 $(-1)^kC_{2n-k}^{n-k}$ 乘第 $k+1$ 行,并把他们和最后一行相加,那么所需的结果就可从下面两个已知的恒等式立即得出

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^kC_{n+1}^kC_{n+r-k}^{r-k}=0$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k2^kC_{2n-1}^kC_{2n-k}^{n-k}=0$$

(AMM 4937)

14.证明:两个三阶幻方构成的矩阵的乘积是一个双对称矩阵.所谓幻方是一个由 n^2 整数构成的 $n\times n$ 方阵,其各行、各列以及两条对角线上的元素的和都是相等的,所谓双对称矩阵是指矩阵的元素关于两条对角线都是对称的.

证明 设三阶幻方各行、各列以及两条对角线之和为 $3s$,那么任何一个3阶幻方都可写成

$$M=\begin{pmatrix} s+a+b & s-2a & s+a-b \\ s-2b & s & s+2b \\ s-a+b & s+2a & s-a-b \end{pmatrix}$$

的形式. 令 $x=(1,1,1)$, $y=(1,0,-1)$, $z=(1,-2,1)$, 那么

$$M=sx x'+ay'z+bz'y$$

这里的撇号表示转置. 于是另一个幻方矩阵可以写成

$$M_1=s_1x x'+a_1y'z+b_1z'y$$

易于算出　$MM_1=3ss_1x'x+6ab_1y'y+2a_1bz'z$

由于上式中每一项都是双对称的, 因此 MM_1 也是双对称的.

15. 证明: 如果 $ax^2+by^2+cz^2+2fxy+2gzx+2hyz+2rx+2sy+2tz+d=0$ 表示两个不同的平面, 则矩阵

$$E=\begin{bmatrix} a & f & g & r \\ f & b & h & s \\ g & h & c & t \\ r & s & t & d \end{bmatrix}$$

不可能是任何矩阵的伴随矩阵.

证明　对 4 阶矩阵成立西尔威斯特(Sylvester) 维数定理

$$R(E)+R(F)-4\leqslant R(FE)$$

和伴随阵的关系式

$$F(adj\,F)=(\det(adj\,F))^{\frac{1}{3}}I$$

又已知对任何退化二次曲面有 $R(E)=2$ 或 3. (见 Murdoch, Linear Algebra for Undergraduates, 1957). 假设存在矩阵 F 使得 $E=adj\,F$, 那么利用上述结果可以得出 $R(FE)=0$. 因而又得出 $R(F)\leqslant 2$, 然而这说明 F 的所有 3×3 余因子都是 0, 因此 E 是一个 0 矩阵, 这显然是一个矛盾, 所得的矛盾就证明了所要的结果. 由于我们是对一般的二次曲线证明的, 因此可把题目条件中的平面换成实的或虚的锥面、圆柱面、椭球面、双曲面或抛物面.

(AMM 10339)

16. 设 A, B 都是 $n\times n$ 复矩阵, $AB^2-B^2A=B$. 证明: B 是幂零阵.

证明　由已知条件可知, 当 $k=1$ 时, $2^{k-1}B^{2^k-1}=AB^{2^k}-B^{2^k}A$ 成立, 假设对正整数 k 此式成立, 那么在此式两边左乘和右乘 B^{2^k} 后得

$$2^{k-1}B^{2^{k+1}-1}=B^{2^k}AB^{2^k}-B^{2^{k+1}}A$$

$$2^{k-1}B^{2^{k+1}-1} = AB^{2^{k+1}} - B^{2^k}AB^{2^k}$$

把上面两式相加就得出 $2^{k-1}B^{2^k-1} = AB^{2^k} - B^{2^k}A$，对 $k+1$ 成立，因此由数学归纳法就证明了对任意正整数此等式成立．因而根据矩阵的模的性质可知

$$2^{k-1}\|B^{2^k-1}\| \leqslant 2\|A\| \cdot \|B^{2^k-1}\| \cdot \|B\|$$

如果 B 不是幂零的，那么对任何 k 将有 $\|B^{2^k-1}\| > 0$，那样在上式两边消去 $\|B^{2^k-1}\|$ 后就有 $2^{k-2} \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$，当 k 充分大时，这将导致矛盾，因此 B 是幂零的．

(AMM 10519)

17．设 A 是 $n \times n$ 复矩阵，A^* 是 A 的共轭转置．如果 $A^2 = A$，证明：当且仅当 $R(A) = R(A^*)$ 时，$A = A^*$．

证明　如果 $A = A^*$，那么显然 $R(A) = R(A^*)$．反过来 $A^2 = A$ 蕴含 $(A^*)^2 = A^*$，而 $R(A) = R(A^*)$ 蕴含存在 $n \times n$ 矩阵 B 使得 $A = A^*B$，因此

$$A^*A = A^*(A^*B) = A^*B = A$$

而

$$A^* = (A^*A)^* = A^*A = A$$

(AMM 11040)

18．设 A，B 都是 $n \times n$ 复矩阵，$A = A^2 = A^*$，$B = B^2 = B^*$，即 A，B 都是幂等阵和埃尔米特阵．证明

$$R[(AB)^2 - (BA)^2] = R(ABA - BAB) = R(AB - BA)$$

证明　设 $C = A + B - I$ 和 $D = A - B$，那么

$$AB - BA = DC, ABA - BAB = DC^2$$

$$(AB)^2 - (BA)^2 = DC^3$$

由于 A，B 都是自共轭的，故 C 也是自共轭的，因此 C 的特征根都是实数，并且存在一组基，使得在这组基下，C 为对角阵，且其对角线上的元素就是他的特征根，此外任意一个实数和他的三次方同号，由此易证

$$R(DC^3) \subset R(DC^2) \subset R(DC) \subset R(DC^3)$$

这就证明了所要的结论．

(AMM 5552)

19．证明：任意 $n \times n$ 矩阵 A 的特征向量也是它的伴随矩阵 $adj\ A$ 的特征向量．

证法 1 我们有

$$A(adj\ A) = (adj\ A)A = |A|I$$

设 $Ax = \lambda x$,($x \neq 0$),如果 $\lambda \neq 0$,那么

$$(adj\ A)x = \frac{1}{\lambda}(adj\ A)Ax = \frac{|A|}{\lambda}x$$

如果 $\lambda = 0$,那么 $Ax = 0(x \neq 0)$,因而 $|A| = 0$.

当秩 $A \leqslant n-2$ 时,$adj\ A = 0$,因此$(adj\ A)x = (0)x = 0 \cdot x$;当秩 $A = n-1$ 时,设 $S = \{y \mid Ay = 0\} = \text{Ker}\ A$,那么 $\dim S = \dim \text{Ker}\ A = n - R(A) = n-(n-1) = 1$.由于 $x \in S$ 并且 $x \neq 0$,因此$\{x\}$是 S 的基.由于

$$A((adj\ A)x) = |A| \cdot x = 0 \cdot x = 0, (adj\ A)x \in S$$

因此存在 μ 使得$(adj\ A)x = \mu x$.

证法 2 设 $n \times n$ 矩阵 A 定义在域 F 上($n > 1$),A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Gantmacher, The Theory of Matrices ,Vol.1, 85 给出了 $adj(\lambda I - A)$ 的表达式,在 0 处计算这个表达式,我们得出

$$adj\ A = (-1)^{n-1} adj(-A) = (-1)^{n-1}[A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I]$$

如果 $Ax = \mu x$,其中 $\mu \in F$ 并且 $x \neq 0$ 是域 F 上的 $n \times 1$ 矩阵,那么

$$(adj\ A)x = (-1)^{n-1}[A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2A + a_1I]x = (-1)^{n-1}[\mu^{n-1} + a_{n-1}\mu^{n-2} + \cdots + a_2\mu + a_1]x$$

因而 x 是 $adj\ A$ 的特征向量.

(AMM E2945)

20. 设 A 和 B 都是 $n \times n$ 矩阵,并且特征根都是正的,问 AB 是否能有负的特征值?如果 A,B 都是埃尔米特(Hermite)阵,结果会受什么影响?

解 对一般的矩阵 A,B,AB 可以只有负的特征根.如果 A,B 都是埃尔米特阵,那么 AB 只能有正的特征根.

对一般的矩阵 A,B,仅在 $n = 2$ 时就可以举出无限多个反例.设 r 和 s 是任意正实数并且选 x 是任意使得 $x^2 \geqslant (r+s)^2$ 成立的实数.现在设

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 \\ x & s \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} r & -x \\ 0 & s \end{pmatrix}$$

那么 A,B 的特征根都是正的,而 AB 的特征根是负的.

设 C 是任意埃尔米特阵,那么 C 有以下性质(见 G . Strang ,

Linear Algebra and its Application, 212-213):

(1) 如果 $x \in C^n$，那么 $x^H Cx$ 是实的；

(2) C 的特征值都是实的；

(3) C 有 n 个正交的特征向量；

我们可以归纳地证明下面的：

(4) 如果 C 有正的特征值，那么对任意 $x \in C^n \setminus \{0\}$，有 $x^H Cx > 0$.

证明：设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分别是 C 的属于特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的正交向量，$x \in C^n \setminus \{0\}$，那么有不全为零的复数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得 $x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$，那样

$$x^H Cx = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i x_i^H\right) C\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_i c_j \lambda_i x_i^H x_j = \sum_{i=1}^{n} \| c_i \|^2 \lambda_i > 0$$

现在设 λ 是 AB 的复特征值，x 是属于 λ 的非零的特征向量. 由于 B 是可逆的，Bx 是非零的. 因此 $(Bx)^H A(Bx)$ 是正的，故 $\lambda x^H B^H x = \lambda x^H Bx$ 是正的. 但是 $x^H Bx$ 是正的，这就蕴含 λ 是正的.

(AMM 10234)

21. 设 A, B 是非负的埃尔米特矩阵，$A - B$ 也是非负矩阵. 证明：$\operatorname{tr} A^2 \geqslant \operatorname{tr} B^2$.

证明 把 A 和 B 都看成是希尔伯特空间 $H = C^n$ 中的自共轭算子. 由于 $A + B$ 是半正定埃尔米特矩阵，因此我们可选出由 $A + B$ 的特征向量 e_i，$1 \leqslant i \leqslant n$ 构成正交基，设 λ_i 是属于 e_i 的特征值，那么 λ_i 都是非负的，并且

$$\langle e_i, (A - B)(A + B)e_i \rangle = \lambda_i \langle e_i, (A - B)e_i \rangle \geqslant 0$$

由于 $A - B$ 是半正定的，$(A - B)(A + B)$ 的迹就是上述这些项之和，因此也是非负的. 但是

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2 + AB - BA, \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$$

这就得出 $\operatorname{tr} A^2 - \operatorname{tr} B^2 = \operatorname{tr}(A^2 - B^2 + AB - BA) =$

$$\operatorname{tr}(A - B)(A + B) \geqslant 0$$

22. 设 A，B 和 C 都是非负的埃尔米特矩阵，$A\leqslant C$，$B\leqslant C$，问是否一定有

$$(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2}C$$

(Takayuki Furuta, A Counterexample to a Conjectured Hermitian Matrix Inequality, AMM Vol. 94(1987), No 3: 271-272)

解　不一定. 反例如下：

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$C=A+B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

显然 A，B 和 C 都满足问题的假设，然而计算表明

$$D=\sqrt{2}C-(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}=\begin{pmatrix}1.250\,757\cdots&-0.699\,400\cdots\\-0.699\,400\cdots&0.193\,951\cdots\end{pmatrix}$$

由于 D 有负的特征根，因此不等式 $(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2}C$ 不成立.

(AMM 6095)

23. 设 P，Q，B 分别是 $m\times m$，$n\times n$，$n\times m$ 复矩阵，其中 P，Q 是正定的. 证明：当且仅当 $Q-BP^{-1}B^*$ 是正定矩阵时，$P-B^*Q^{-1}B$ 是正定矩阵.

证明　题目中所给出的两个条件都等价于矩阵

$$R=\begin{pmatrix}P&B^*\\B&Q\end{pmatrix}$$

是正定的. 事实上，如果

$$S=\begin{pmatrix}I_m&0\\-Q^{-1}B&I_n\end{pmatrix},T=\begin{pmatrix}I_m&-P^{-1}B^*\\0&I_n\end{pmatrix}$$

那么 $S^*RS=\begin{pmatrix}P-B^*Q^{-1}B&0\\0&Q\end{pmatrix}$，$T^*RT=\begin{pmatrix}P&0\\0&BP^{-1}B^*\end{pmatrix}$

(AMM 5425)

24. 设 A，B 都是实对称的正定矩阵，证明

$$C=2A(A+B)^{-1}A+2B(A+B)^{-1}B-(A+B)$$

是半正定矩阵.

证法1　由于 $A+B>0$，故 $A+B=(T'T)^{-1}$，因而

$$C=2AT'TA+2BT'TB-(T'T)^{-1}=$$
$$T^{-1}(2P^2+2Q^2-I)(T')^{-1}$$

其中 $P=TAT'$，$Q=TBT'$. 因此 $P+Q=I$，那样

$$TCT' = 2P^2 + 2(I - P)^2 - I = (2P - I)^2$$

是半正定的，因此 C 也是半正定的.

证法 2

$$\begin{aligned} C &= 2A(A+B)^{-1}A + 2B(A+B)^{-1}B - (A+B) = \\ &2A(A+B)^{-1}A + 2B(A+B)^{-1}B - \\ &(A+B)(A+B)^{-1}(A+B) = \\ &A(A+B)^{-1}A - A(A+B)^{-1}B - \\ &B(A+B)^{-1}A + B(A+B)^{-1}B = \\ &(A-B)(A+B)^{-1}(A-B) \end{aligned}$$

由于 $A - B$ 是实对称阵，因此 C 是半正定的. 由此还可以得出，如果 $A - B$ 是非异的，那么 C 就是正定的.

25. 设 k 是正整数，B 是任意 $n \times n$ 复矩阵，证明：存在唯一的 $n \times n$ 复矩阵 A，使得 (AMM E3362)

$$A(A^*A)^k = B$$

其中 A^* 表示 A 的共轭转置矩阵.

证明 设 $B = UH$，其中 U 是 U 矩阵，H 是正半定矩阵. 设 P 是 H 的唯一的正半定 $2k+1$ 次方根，那么 $B = UP^{2k+1}$. 设 $A = UP$，那么 $A^*A = P^2$，因此就满足问题的要求.

如果

$$B = A(A^*A)^k = C(C^*C)^k$$

那么
$$B^*B = (A^*A)^{2k+1} = (C^*C)^{2k+1}$$

由于 B^*B 是正半定的，这就得出 $A^*A = C^*C$. 那就是说 A 和 C 的 0 空间 A^*A 和 C^*C 是相同的，因此 A 和 C 在 A^*A 的任何化零向量处的值是相同的. 如果 λ 是 $A^*A = C^*C$ 的对应于向量 v 的非零特征值，那么 $Bv = \lambda^k Av = \lambda^k Cv$，因此 $Av = Cv$. 那样 A 和 C 在 A^*A 的任何特征向量处的值是相同的. 由于 A^*A 的特征向量是一组基，因此 $A = C$.

26. 设 A 和 B 分别是有单位元的交换环 R 上的 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵，那么

(1) $t^m\det(tI_n-AB)=t^n\det(tI_m-BA)$.

(2) 如果 $AB=I_n,BA=I_m$，那么 $m=n$.

其中 I_m 和 I_n 分别是 m 阶和 n 阶的单位矩阵. (Josef Schmid, A Remark on Characteristic Polynomials, AMM Vol. 77(1970), No.9:998)

证明 (1) 考虑两个 $m+n$ 阶的分块矩阵

$$C=\begin{pmatrix} tI_n & A\\ B & I_m\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} I_n & 0\\ -B & tI_m\end{pmatrix}$$

那么 $t^m\det(tI_n-AB)=\det\begin{pmatrix} tI_n-AB & tA\\ 0 & tI_m\end{pmatrix}=\det CD=$

$$\det DC=\det\begin{pmatrix} tI_n & A\\ 0 & tI_m-BA\end{pmatrix}=$$

$$t^n\det(tI_m-BA)$$

(2) 如果 $AB=I_n,BA=I_m$，那么由(1)已证的结果就得出

$$t^m(t-1)^n=t^n(t-1)^m$$

由上式显然即可得出 $m=n$.

(AMM 10978)

27. 设 $P_n(x)=x^{n^2+n-1}-3x^{n^2}+x^{n^2-1}+x^{n^2-n}+x^{2n-1}+x^n-3x^{n-1}+1$，证明：对任意正整数 $n\geqslant 2$ 和实数 $x\geqslant 0$，$P_n(x)\geqslant 0$.

证明 注意 $P_n(1)=P'_n(1)=P''_n(1)=P'''_n(1)=0$，因此 $P_n(x)$ 在 $x=1$ 处有一个四重根. 另一方面 $P_n(x)$ 的系数有四个变号，因此由笛卡尔(Descartes)符号法则可知 $P_n(x)$ 算上重数，至多有四个正实根，因而 $P_n(x)$ 除了 $x=1$ 之外，不可能再有其他正实根. 这就得出当 $x\geqslant 0$ 时必有 $P_n(x)\geqslant 0$.

(AMM E1283)

28. 如果实系数多项式 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 有三个连续的非零系数都相等，那么 $P(x)$ 的根不可能都是实根.

证法1 不失一般性，我们假定 $P(0)\neq 0$. 如果实系数多项式 $P(x)$ 有至少3个非零的连续的系数相等，那么 $Q(x)=(x-1)P(x)$ 至少有两个连续的系数都是零. 而笛卡尔符号法则表明 $Q(x)$ 和 $Q(-x)$ 的系数都总共有不超过 $n-1$ 个变号，因而 $Q(x)$

的实零点数不超过 $n-1$，而 $P(x)$ 的实零点数不超过 $n-2$ 个.

证法 2 Oliver D. Kellogg, Annals of Mathematics, ser. 2, vol. 9(1908), 97, 证明了如果

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

的所有系数都是实的，并且 $f(x)$ 的所有零点也是实的，那么对 $k < j < n$，所有的行列式

$$D_j = \begin{vmatrix} c_{j-1} & c_j \\ c_j & c_{j+1} \end{vmatrix}$$

都是负的，其中 c_k 是 $f(x)$ 的第一个非零系数.

本题是以上结果的直接推论. 由于有一个 $D_j = 0$，所以 $f(x)$ 必有虚根.

29. 设 $f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 是一个 n 阶多项式，其中 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 是不同的实数. 设 $\delta(f) = \min\limits_i (a_{i+1} - a_i)$，又设 k 是一个任意实数，证明：多项式 $f' - kf$ 的根也都是实的并且是不同的，此外还有

$$\delta(f' - kf) > \delta(f)$$

(Peter Walker, Separation of the Zeros of Polynomials, AMM Vol. 100(1993), No. 3: 272-273, Razvan Gelca, A short Proof of a Result on Polynomials, AMM Vol 100(1993), No. 10: 936-937)

证明 设

$$d = \delta(f), g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}$$

考虑函数 $g(x)$ 的图形，它的分子共有 $n-1$ 个零点，分母共有 n 个零点，且分子的每个零点都在分母的两个相邻的零点之中. 因此当 $x < 0$，绝对值充分大，以及当 $x > 0$，绝对值充分大时，$g(x)$ 不变号，且分别以 $y = 0, x = a_1$ 和 $y = 0, x = a_n$ 为渐近线，但是一支在 x 轴之上，一支在 x 轴之下. 而其余的 $n-1$ 个分支均是在 $f(x)$ 的两个相邻的零点之中的单调函数，且函数值充满了从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的中间值. 因此，当 $k \neq 0$ 时，直线 $y = k$ 或是在上半平面与 $g(x)$ 的 n 个分支相交，或是在下半平面与 $g(x)$ 的 n 个分支相交. 这些交点的横坐标除了最左边的或最右边的外，都处于 $f(x)$ 的两个相邻的零点之中. 它们就是 $f' - kf$ 的零点. 由于 $f' - kf$ 最多只能有 n 个零点，这就证明了 $f' - kf$ 的零点都是不同的实数，且被 $f(x)$ 的零点所分离. 当 $k = 0$ 时，由罗尔(Roll)定理可知，

在每个区间(a_i, a_{i+1})中，恰有一个f'的零点，因此结论同样成立。

下面我们先证明一个引理。

引理 如果对某个j，b和c满足$b < a_j < c \leqslant b + d$，那么$b$和$c$不是$f$的零点，并且$g(b) < g(c)$。

引理的证明 假设缊含对所有的i，$c - b \leqslant d \leqslant a_{i+1} - a_i$。因此对$1 \leqslant i \leqslant j-1$，我们有$b - a_i \geqslant c - a_{i+1} > 0$，因而$\frac{1}{b - a_i} \leqslant \frac{1}{c - a_{i+1}}$；类似的，对$j \leqslant i \leqslant n-1$，我们有$c - a_{i+1} \leqslant b - a_i < 0$，因而仍然有$\frac{1}{b - a_i} \leqslant \frac{1}{c - a_{i+1}}$。最后$b - a_n < 0 < c - a_1$，因此$\frac{1}{b - a_n} < 0 < \frac{1}{c - a_1}$。把这些不等式相加即可得出引理。

推论 $\delta(f' - kf) > \delta(f)$。

前面已证如果b和c是$f' - kf$的零点，并且$b < c$，那么他们被f的零点所分隔并且满足$g(b) = g(c) = k$。因此由引理可知我们不可能有$c \leqslant b + d$，因而$c - b > d$，这就是所要证的。

注 由罗尔定理可知，在每个区间(a_i, a_{i+1})中，恰有一个f'的零点，因而我们直观地感到f'的零点要比f的零点分布的更平均。本题的结果对这一感觉给出了数量上的刻画。

(AMM E3115)

30. (1) 设$z_j(j = 1,2,\cdots,n)$是复系数多项式
$$P_n(z) = z^n + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$
的根，证明
$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \geqslant 2|a_2|$$
等号当且仅当$z_j(j = 1,2,\cdots,n)$都位于复平面上一条通过原点的直线上时成立。

(2) 设$w_j(j = 1,2,\cdots,n)$是复系数多项式$P'_n(z)$的根，证明
$$\sum_{j=1}^{n-1} |w_j|^2 \leqslant \frac{n-2}{n}\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$$
等号当且仅当$z_j(j = 1,2,\cdots,n)$都位于复平面上一条通过原点的直线上时成立。

证明 (1) 我们有
$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$$
$$z_1 z_2 + \cdots + z_{n-1} z_n = \sum_{i<j} z_i z_j = a_2$$

因此 $$0=(z_1+z_2+\cdots+z_n)^2=z_1^2+\cdots+z_n^2+2z_1z_2+\cdots+2z_{n-1}z_n=z_1^2+\cdots+z_n^2+2a_2$$

故 $$|z_1^2+\cdots+z_n^2|=2|a_2|$$

另一方面又有

$$|z_1^2+\cdots+z_n^2|\leqslant|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2$$

所以 $$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\geqslant 2|a_2|$$

现在假设 $$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=2|a_2|$$

那么由上面的式子可知

$$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2=|z_1^2+\cdots+z_n^2|=2|a_2|$$

或者 $$|\xi_1|+\cdots+|\xi_n|=|\xi_1+\cdots+\xi_n|$$

其中 $\xi_k=z_k^2$.这就意味着 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 位于一条通过原点的直线上.由于 $\arg z_n=\frac{1}{2}\arg\xi_n$ 或 $\pi+\frac{1}{2}\arg\xi_n$,故 $z_1,\cdots,z_n$ 也都位于一条通过原点的直线上.

(2) 可类似证明.当 $z_1,\cdots,z_n$ 都位于一条通过原点的直线上时,$w_1,\cdots,w_{n-1}$ 也都位于同一条通过原点的直线上,因此

$$|w_1|^2+\cdots+|w_{n-1}|^2=2\frac{n-2}{n}|a_1|=\frac{n-2}{n}(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)$$

31. $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=\lambda$ 的根的重数最大是几?

解 最大重数是2.

由于多项式 $p(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ 的所有的根都是实的并且是两两不同的,因此 $p'(x)$ 的所有的根也都是实的并且是两两不同的.设 $p(x)-\lambda$ 有一个 m 重根,那么 $p'(x)$ 就有一个 $m-1$ 重根.因此 $p(x)=\lambda$ 的根的重数不可能超过2.$p(x)=\lambda$ 可以有二重根,由于如果 z 是$p'(x)$的根,$\lambda=p(z)$,那么 z 便是$p(x)-\lambda$ 的二重根,因此$p(x)=\lambda$ 的根的重数可以是2.

(AMM E1467)

32. 写出$(x+1)^n$ 被$(x-1)^3$ 除所得的余式.

解 由带余式除法可知

$$(x+1)^n=Q(x)(x-1)^3+Ax^2+Bx+C$$

将上式微分两次并以 $x=1$ 代入即可得出

$$A=2^{n-3}n(n-1),B=2^{n-2}n(3-n)$$
$$C=2^{n-3}(n^2-5n+8)$$

(AMM E3078)

33. 使得方程 $(1+z)^n=1+z^n$ 的所有非零解都位于单位圆上的最大的 n 是几?

解 设 $p_{n-1}(z)=(1+z)^n-z^n-1$,则导数
$$p'_{n-1}(z)=n((z+1)^{n-1}-z^{n-1})$$
有一个根是
$$z=\frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{n-1}}-1}$$
由于当 $n\geqslant 8$ 时,$|z|=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{\pi}{n-1}}>1$,故由高斯-卢卡斯(Gauss-Lucas)定理可知 $p_{n-1}(z)$ 的所有非零解不可能都位于单位圆上,以及由于 $p_6(z)=7z(z+1)(z^2+z+1)^2$ 的所有非零解都位于单位圆上,所以,使得方程 $(1+z)^n=1+z^n$ 的所有非零解都位于单位圆上的最大的 n 等于7.

(AMM 6441)

34. 设 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 是不同的正整数,证明:有理函数
$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x^{a_j}-x^{a_i}}{x^j-x^i}$$
实际上是一个多项式.

证明 只须证明分母的每个零点也是分子的零点(重数至少和分母相同)就够了.显然0是分子的一个零点,其重数为
$$a_1(n-1)+a_2(n-2)+\cdots+2a_{n-2}+a_{n-1}$$
由于对 $i=1,2,\cdots,n-1,a_i\geqslant i$,所以分母的零点0的重数至多等于分子的重数.除0之外,分母中的所有其他零点都是单位根.对 $r=1,2,\cdots,n-1$,设 z_r 是 r 次的单位原根.那么当且仅当 $a_j\equiv a_i\pmod r$ 时,z_r 是 $x^{a_j}-x^{a_i}$ 的零点.假设,对 $s=1,2,\cdots,n-1$,数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 k_s 个数属于模 r 的和 s 同余的剩余类.那么使得 $a_j\equiv a_i\pmod r,1\leqslant i<j\leqslant n$ 的数对 (i,j) 的个数就等于
$$\sum_{s=1}^{r}C_{k_s}^2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r}k_s^2-\frac{n}{2}$$
而这就是分子的零点 z_r 的重数.作为 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 的函数,由于对 $1\leqslant s\leqslant n-r\left[\frac{n}{r}\right]$ 时,$k_s=\left[\frac{n}{r}\right]+1$,在其他情况下,$k_s=\left[\frac{n}{r}\right]$.

上面的表达式当 $|k_s-k_t|\leqslant 1,1\leqslant s<t\leqslant r$ 时在 $a_i=i$ 处取得极小值.

(AMM E2998)

35. 设 x,y 是两个复数,使得对于 n 的4个连续的正整数值,$\frac{x^n-y^n}{x-y}$ 都是整数.证明:对所有的正整数 n,$\frac{x^n-y^n}{x-y}$ 都是整数.

证明 设 $t_n=\frac{x^n-y^n}{x-y}$,那么 t_n 是差分方程

$$t_{n+2}+bt_{n+1}+ct_n=0,n\geqslant 0$$

的唯一解,其特征方程是

$$\lambda^2+b\lambda+c=(\lambda-x)(\lambda-y)$$

初条件为 $t_0=0,t_1=1$.因此只要证明 b 和 c 都是整数就够了.假设对 $n=m,m+1,m+2,m+3$,t_n 都是整数.那么对 $n=m$ 和 $n=m+1$,$c^n=(xy)^n=t_{n+1}^2-t_{n+2}t_n$ 是整数.因此 c^{n+1} 是整数,因而 c 是有理数,从这又得出 c 必须是整数.至于 b,由于对 $n=m$ 和 $n=m+1$,$t_{n+2}+bt_{n+1}+ct_n=0$,故由克拉姆法则知

$$b=\frac{t_mt_{m+3}-t_{m+1}t_{m+2}}{c^m}$$

这说明 b 是有理数.另一方面,由于 c 是整数,故 t_{m+1} 是整数.容易用对 n 的归纳法证明对某个 $n-1$ 次的整系数一元多项式 $f_n(x)$,$t_n=f_n(b)$,因此 b 作为一个有理的代数整数也是一个整数.

(AMM E2993)

36. 设对任意正整数 m,复数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 使得 $a_1^m+a_2^m+\cdots+a_n^m$ 都是整数,证明:$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ 一定是整系数多项式.

证明 设 a_i 是 $f(x)$ 中 x^{n-i} 的系数,那么

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n}(1-a_ix)=1+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

设 $h(x)$ 是幂和 $s_k=\sum_{i=1}^{n}a_i^k$ 的生成函数,那么

$$h(x)=\sum_{k=1}^{\infty}s_kx^{k-1}$$

那样

$$h(x)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln g(x)$$

或者

$$g'(x)+h(x)g(x)=0$$

比较上式两边 x 的同次幂得出

$$ma_m+s_1a_{m-1}+\cdots+s_m=0,1\leqslant m\leqslant n$$

由于 s_k 都是整数,因此由对 m 的数学归纳法即可得出,对所有的

m，$m!a_m$ 都是整数，因而 $n!a_m$ 是整数，由此又得出对所有的 i，$n!a_i$ 是代数整数．然而，由于对所有的 k，s_k 都是整数，因此当把 a_i 换成 a_i^k 时，以上的证明仍然适用．这就得出对所有的 k，$n!a_i^k$ 都是代数整数．那就是说，a_i 本身是一个代数整数．因此 a_m 是 a_i 的有理系数多项式的系数，因而对所有的 m，a_m 是整数．

37．设 σ_i 是 n 个正数的第 i 个对称函数．

（1）证明：$3(\sigma_{i-1}\sigma_{i+2}+\sigma_i\sigma_{i+1})^2 \geqslant 4(\sigma_{i-1}\sigma_{i+1}^3+\sigma_{i-1}^2\sigma_{i+2}^2+\sigma_i^3\sigma_{i+2})$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$．

（2）是否成立 $\sigma_{i-1}\sigma_{i+2}^2+\sigma_i^2\sigma_{i+3}+\sigma_{i+1}^3 > \sigma_{i+1}(\sigma_{i-1}\sigma_{i+3}+2\sigma_i\sigma_{i+2})$，$1 \leqslant i \leqslant n$．

（3）是否成立 $\sigma_i^2(\sigma_i^2-\sigma_{i-1}\sigma_{i+1}) > \sigma_{i-1}^2(\sigma_{i+1}^2-\sigma_i\sigma_{i+2})$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$．

（AMM 6629）

解　根据 Malo and Schur 的一个定理（见 M．Marden，Geometry of Polynomials，Amer．Math．Soc．，Providence，1966，16 或 N．Obreschkoff，Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome，VEBDV，Berlin 1963）如果多项式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 和多项式 $b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ 的零点都是实的并且其中之一的零点的符号都相同，那么多项式 $a_0b_0+a_1b_1x+\cdots+a_nb_nx^n$ 的零点就也都是实的．设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是问题中的 n 个正数．并对多项式

$$(1+x)^n = 1+C_n^{n-1}x+\cdots+C_n^1x^{n-1}+x^n$$

和多项式

$$\prod_{k=1}^{n}(x+r_k) = \sigma_n+\sigma_{n-1}x+\cdots+\sigma_1x^{n-1}+x^n$$

应用上面所说的定理，就得出多项式

$$P(x) = \sigma_n+C_n^{n-1}\sigma_{n-1}x+\cdots+C_n^1\sigma_1x^{n-1}+x^n$$

的根都是实的．现在 $Q(x,y)=y^nP\left(\frac{x}{y}\right)$ 是 n 次齐次的．$Q(x,y)$ 的小于或等于 $n-1$ 的任意阶偏导数都将有零点 $\frac{x}{y}$，它们都是实的（通过反复应用罗尔定理）．$Q(x,y)$ 的 $n-3$ 阶的各个偏导数，除了差一个常数因子之外都具有形式

$$\sigma_{i-1}x^3+3\sigma_ix^2y+3\sigma_{i+1}xy^2+\sigma_{i+2}y^3，1 \leqslant i \leqslant n-2$$

由于 $i=n-1$ 的情况（所提的问题）可立即得出，问题的结果可从计算这个三次多项式的判别式得出，这个判别式必须是非负的（注意由添加和减去 $a_0^2a_3^2$ 的适当倍数

$$a_0x^3+3a_1x^2+3a_2x+a_3$$

的判别式可写成

$$27[(3a_1^2a_2^2+6a_0a_1a_2a_3+3a_0^2a_3^2)-4(a_0a_2^3+a_0^2a_3^2+a_1^3a_3)]$$

38. 设 $P_n(x)=\sum\limits_{\substack{1\le j\le n\\(j,n)=1}} x^{j-1}$，例如 $P_1(x)=P_2(x)=1$，$P_3(x)=1+x$，$P_4(x)=1+x^2$，$P_5(x)=1+x+x^2+x^3$，$P_6(x)=1+x^4$. 证明：当 $n\geqslant 7$ 时，$P_n(x)$ 在有理数域上是可约的.

(AMM 10423)

证明 我们用数学归纳法证明，当 $n>2$ 时，$P_n(x)$ 有一个形如 $1+x^r$ 的因子，而当 $n\geqslant 7$ 时，这些因子是真因子.

对 $n=3,4,5,6$，这一结论是显然的. 现在假设对小于 n 的正整数结论为真. 以下分四种情况讨论.

(1) $n=p\geqslant 5$ 是一个素数. 这时

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{p-2}x^i=(1+x)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{p-3})$$

由于 $n=p\geqslant 5$，因此 $1+x$ 是 $P_n(x)$ 的真因子.

(2) $n=2p$，其中 $p\geqslant 5$ 是一个奇素数. 这时

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{p-1}x^{2i}-x^{p-1}=(1+x^{p+1})(1+x^2+x^4+\cdots+x^{p-3})$$

由于 $p\geqslant 5$，因此 $1+x^{p+1}$ 是 $P_n(x)$ 的真因子.

以下设 $A_n=\{j\mid 1\leqslant j\leqslant n,(j,n)=1\}$.

(3) $n=2^a$，$a\geqslant 3$，或 $n=2^{a_0}p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_s^{a_s}$，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_s$ 都是奇素数，且存在某个 $1\leqslant i\leqslant s$，使得 $a_i\geqslant 2$. 这时 $n=2m$，$2\mid m$，$m\geqslant 4$ 或者 $n=mp$，$p\mid m$，$m\geqslant 3$，$p\geqslant 3$，这里，p 是一个奇素数. 总之，n 可以表示成 $n=mp$ 的形式，其中 $p\mid m$，且当 $p=2$ 时，$m\geqslant 4$，当 $p\geqslant 3$ 时，$m\geqslant 3$. 那么 A_n 是 A_m 乘以 m 后的不相交并集的一个平移，而

$$P_n(x)=\left(\sum_{i=0}^{p-1}x^{im}\right)P_m(x)$$

由归纳法假设可知，$P_m(x)$ 存在一个形如 $1+x^r$ 的因子，而由 p、m 所满足的条件可知，这一因子是真因子.

(4) $n=2p_1p_2\cdots p_s$，$s\geqslant 2$ 或 $n=p_1p_2\cdots p_s$，$s\geqslant 2$. 这时 $n=mp$，$p\nmid m$，$m\geqslant 3$，p 是一个奇素数，那么

$$A_n=\{j\mid (j,m)=1\}\setminus\{j\mid (j,mp)=p\}$$

这个集合是从 A_m 中去掉了形如 $j=kp$，$(k,m)=1$ 的项之后所构成的集合的一个平移. 由于 $x^{kp-1}=x^{p-1}(x^p)^{k-1}$，故

$$P_n(x) = \left(\sum_{i=0}^{p-1} x^{im}\right)P_m(x) - x^{p-1}P_m(x^p)$$

由归纳法假设可知，$P_m(x)$ 存在一个形如 $1+x^r$ 的因子. 由于 p 是奇素数，因此 $1+x^r$ 也是 $1+x^{pr}$ 的因子. 而$(1+x^{pr}) \mid P_m(x^p)$，故上面的等式就说明 $1+x^r$ 是 $P_n(x)$ 的因子，显然他是 $P_n(x)$ 的真因子.

(AMM E2689)

> 39. 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + pa_n$ 是一个整系数多项式，$a_0a_n \neq 0$，$(a_0, a_1, \cdots, pa_n) = 1$，其中 p 是一个使得 $p > \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||a_n|^{n-1-k}$ 的素数，那么 $f(x)$ 在整数环中不可约.

证明 设 $\alpha \in C$ 是$f(x)$ 的根，我们断言 $|\alpha| > |a_n|$，否则 $f(\alpha) = 0$ 蕴含

$$|pa_n| = |a_0\alpha^n + \cdots + a_{n-1}\alpha| \leqslant$$
$$|a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||a_n|^{n-1-k} < |a_n||p|$$

得出矛盾. 假如 $f(x)$ 在整数环中可约，则

$$f(x) = (b_0x^r + \cdots + b_rp)(c_0x^s + \cdots + c_s), 1 \leqslant s \leqslant n-1$$

并且 $b_0c_0 = a_0$，$b_rc_s = a_n$. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 是上式中第二个因式的根，则我们有

$$\prod_{i=1}^{s} \alpha_i = \pm \frac{c_s}{c_0}$$

因此 $$|a_n| \geqslant \frac{|c_s|}{|c_0|} = \prod_{i=1}^{s} |\alpha_i| > |a_n|^s$$

这是不可能的，这就证明了 $f(x)$ 在整数环中是不可约的.

(AMM E3008)

> 40. 设 $n \geqslant 2$，证明：多项式 $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1$ 在有理数域中是不可约的.

证明 设

$$P_n(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1$$
$$Q_n(x) = (x-1)P_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

对 $n = 2, 3$，容易用有理根的性质验证命题成立. 因此不妨设 $n \geqslant 4$. 由笛卡尔符号法则可知 $P_n(x)$ 恰有一个正根 r. 由于易于验证 $P_n(\sqrt{3}) < 0$，因此 $r > \sqrt{3}$.

如果 $P_n(\alpha) = 0$，$|\alpha| > 1$，则

$$Q_n(\alpha) = \alpha^{n+1} - 2\alpha^n + 1 = 0$$

因此
$$|\alpha|^n |\alpha - 2| = 1$$

这时我们有

$$2 \leqslant |\alpha - 2| + |\alpha| = |\alpha|^{-n} + |\alpha|$$

故 $Q_n(|\alpha|) \geqslant 0$. 由于当 $1 < x < r$ 时, $Q_n(x) < 0$, 因此必有 $|\alpha| \geqslant r$. 另一方面, 如果 $P_n(\beta) = 0$, $|\beta| < 1$, 那么

$$1 = |\beta - 2||\beta|^n \leqslant 3|\beta|^n$$

这说明 $P_n(x)$ 的所有使得 $|x| < 1$ 的根的乘积的绝对值至少是 $\frac{1}{3}$. 因此 r 是 $P_n(x)$ 的唯一的绝对值超过 1 的根. (因为如果有两个那样的根, 那么它们的积的绝对值将至少是 $r^2 > 3$, 因而 $|P_n(0)| > 1$. 同理也可证 r 不是 $P_n(x)$ 的重根.)

现在设 $P_n(x) = A(x)B(x)$, 其中 $A(x)$ 和 $B(x)$ 都是整系数多项式, 并且 $B(r) = 0$, 那么如果 $A(x)$ 的次数是正的, 则 $A(x)$ 的根的绝对值必都小于 1, 因而 $|A(0)| < 1$, 但是这与 $A(x)$ 的常数项只能是 ± 1 矛盾.

(AMM F2810)

41. (1) 设 $T(z)$ 是一个和 $P(z) = z^n - 1$ 有公共根的整系数多项式. 假设对 $P(z)$ 的每个根 α_i, 我们有 $|T(\alpha_i)| \leqslant 1$, 证明: $T(z)$ 可被 $z^n - 1$ 整除.

(2) 设 $T(z)$ 是一个非常数的整系数多项式, $T(0) \neq 0$. 如果对 $P(z)$ 的每个根 α_i, 我们有 $|T(\alpha_i)| \leqslant 1$, 证明: 存在一个唯一的整数 $k(0 \leqslant k < n)$, 使得 $T(z) + z^k$ 或 $T(z) - z^k$ 可被 $z^n - 1$ 整除, 其中 $P(z) = z^n - 1$.

(3) 设 $T(z)$ 是一个和 $Q(z) = z^n + 1$ 有公共根的整系数多项式. 假设对 $Q(z)$ 的每个根 β_i, 我们有 $|T(\beta_i)| \leqslant 1$, 证明: $T(z)$ 可被 $z^n + 1$ 整除.

(4) 设 $T(z)$ 是一个非常数的整系数多项式, $T(0) \neq 0$. 如果对 $Q(z) = z^n + 1$ 的每个根 β_i, 我们有 $T(\beta_i) = 1$, 证明: 存在一个唯一的整数 $k(0 \leqslant k < n)$, 使得 $T(z) + z^k$ 或 $T(z) - z^k$ 可被 $z^n + 1$ 整除.

证明 所有四个问题都可立即从以下性质得出.

性质 设 $T(z)$ 是一个使得对 $P(z)$ 的每个根 α_i, $|T(\alpha_i)| \leqslant 1$ 的整系数多项式, 其中 $P(z) = z^n - 1$ 或 $P(z) = z^n + 1$, 那么 $T(z)$ 可被 $P(z)$ 整除或存在一个唯一的整数 $k(0 \leqslant k < n)$ 使得 $T(z) + z^k$ 或 $T(z) - z^k$ 可被 $P(z)$ 整除.

性质的证明 由多项式除法可知 $T(z)=Q(z)P(z)+R(z)$，其中 $Q(z)$ 和 $R(z)$ 都是整系数多项式并且 $\deg R\leqslant n-1$. 设 $R(z)$ 在 $z=0$ 处有一个 k 阶的零点，因此 $R(z)=z^kC(z)$，$C(0)\neq 0$（如果 $R(z)=0$，则结论已证），那么

$$|C(\alpha_i)|=|R(\alpha_i)|=|T(\alpha_i)|\leqslant 1$$

但是由拉格朗日（Lagrange）关于 α_i 的内插公式得出

$$C(0)=\pm\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C(\alpha_i)$$

其中符号依赖于 $P(z)$ 的选择，因此由三角不等式得出

$$0<|C(0)|=\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}C(\alpha_i)\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|C(\alpha_i)|\leqslant 1$$

然而 $C(0)$ 是一个整数，因此 $C(0)=1$ 或 $C(0)=-1$. 但是那样就必须对所有的 i，$C(\alpha_i)=1$ 或 $C(\alpha_i)=-1$，但是由于 $\deg C(z)<n$，那也就是说 $C(z)\equiv 1$ 或 $C(z)\equiv -1$.

（AMM 6044）

42. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{48}$ 是 $x^{49}=1$ 的不等于 1 的根，且

$$N=(1+x_1+x_1^4)(1+x_2+x_2^4)\cdots(1+x_{48}+x_{48}^4)$$

问是否可能成立 $N=83^3$？

解 答案是不可能成立.

$x^{49}=1$ 的 49 个根可以写成

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{49}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{49},k=1,2,\cdots,49$$

其中 $x_7,x_{14},x_{21},x_{28},x_{35},x_{42},x_{49}$ 是 $f_1(x)=x^7-1=0$ 的根，而其余 42 个根是

$$f_2(x)=\frac{x^{49}-1}{x^7-1}=x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1=0$$

的根. 此外除了 $x_{49}=1$ 之外，其余 48 个根都不等于 1. 设

$$N_1=\prod_{\substack{7|k\\1\leqslant k\leqslant 48}}(1+x_k+x_k^4)=(1+x_7+x_7^4)\cdots(1+x_{42}+x_{42}^4)$$

$$N_2=\prod_{\substack{7\nmid k\\1\leqslant k\leqslant 48}}(1+x_k+x_k^4)$$

那么显然 $N=N_1N_2$.

引理 1 N_1,N_2 都是正整数，且 $N_1=1$.

引理 1 的证明 $\xi=x_7$ 是二项方程 $x^7=1$ 的单位原根，因此 $\xi,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\xi^5,\xi^6$ 恰是 $x_7,x_{14},x_{21},x_{28},x_{35},x_{42}$ 的一个重新排列.（实际上 $\xi,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\xi^5,\xi^6,\xi^7$ 恰是 $x^7=1$ 的所有根 $x_7,x_{14},x_{21},x_{28},x_{35},x_{42},x_{49}$ 的一个重新派列，但是 $\xi^7=x_{49}=1$，而其余的根

都不等于1.这就得出 $\xi,\xi^2,\xi^3,\xi^4,\xi^5,\xi^6$ 恰是 $x_7,x_{14},x_{21},x_{28},x_{35},x_{42}$ 的一个重新排列.)

又 ξ 具有性质 $\xi^7=1$ 和 $1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4+\xi^5+\xi^6=0$.利用这两个等式和直接计算即可得出

$$N_1=(1+\xi+\xi^4)\cdots(1+\xi^6+\xi^{24})=1$$

又 $x_k,7\nmid k,1\leqslant k\leqslant 48$ 这42个根都是 $f_2(x)=x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1=0$ 的根,而 N_2 显然是这42个根的对称函数,由于 $f_2(x)$ 是整系数多项式,因此由对称多项式基本定理即可得知 N_2 必定是一个正整数.

现在设

$$P(x)=(1+x+x^4)\cdots(1+x^{48}+x^{192})$$

$$P_1(x)=\prod_{\substack{7\mid k\\1\leqslant k\leqslant 48}}(1+x^k+x^{4k})=(1+x^7+x^{28})\cdots(1+x^{42}+x^{168})$$

$$P_2(x)=\prod_{\substack{7\nmid k\\1\leqslant k\leqslant 48}}(1+x^k+x^{4k})$$

那么我们有

引理2 (1)设 ξ 表示 $x_7,x_{14},x_{21},x_{28},x_{35},x_{42}$ 这6个数中的任一个数,则

$$(1+\xi+\xi^4)\cdots(1+\xi^6+\xi^{24})=1$$

(2)设 η 表示 $x_k,7\nmid k,1\leqslant k\leqslant 48$ 这42个数中的任一个数,则

$$P_1(\eta)=1$$

引理2的证明 (1) ξ 具有性质 $\xi^7=1$ 和 $1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4+\xi^5+\xi^6=0$,利用这两个等式和直接计算即可得出

$$(1+\xi+\xi^4)\cdots(1+\xi^6+\xi^{24})=1$$

(2)设 $\xi=\eta^7$,那么 ξ 具有性质 $\xi^7=1$ 和 $1+\xi+\xi^2+\xi^3+\xi^4+\xi^5+\xi^6=0$,因此由(1)已证的结果可知

$$P_1(\eta)=(1+\eta^7+\eta^{28})\cdots(1+\eta^{42}+\eta^{168})=(1+\xi+\xi^4)\cdots(1+\xi^6+\xi^{24})=1$$

引理3 (1) $(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35}+x^{42})\mid(P_1(x)-N_1)$.

(2) $(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35}+x^{42})\mid(P_2(x)-N_2)$.

引理3的证明 (1)由引理1和引理2(2)的结果可知成立以下42个恒等式

$$P_1(x_k)=1=N_1,7\nmid k,1\leqslant k\leqslant 48$$

而 $x_k,7\nmid k,1\leqslant k\leqslant 48$ 这42个数恰是

$$f_2(x)=x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1=0$$

的不同的根，因此

$$\prod_{\substack{7\nmid k\\1\leqslant k\leqslant 48}}(x-x_k)=(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35}+x^{42})\mid(P_1(x)-N_1)$$

(2) $\zeta=x_1$ 是 $f_2(x)=x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1=0$ 的单位原根 $\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{42}$ 恰是 $x_k,7\nmid k,1\leqslant k\leqslant 48$ 这 42 个数的一个重新排列. 因此成立以下 42 个恒等式

$$P_2(x_k)=\prod_{\substack{7\nmid k\\1\leqslant k\leqslant 48}}(1+x_k+x_k^4)=N_2,7\nmid k,1\leqslant k\leqslant 48$$

而 $x_k,7\nmid k,1\leqslant k\leqslant 48$ 这 42 个数恰是

$$f_2(x)=x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1=0$$

的不同的根，因此

$$\prod_{\substack{7\nmid k\\1\leqslant k\leqslant 48}}(x-x_k)=(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35}+x^{42})\mid(P_2(x)-N_2)$$

容易证明下面的引理.

引理 4 设 $f(x),g(x)$ 都是整系数首 1 多项式，$g(x)\mid f(x)$，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，则 $h(x)$ 必也是整系数首 1 多项式.

引理 5 $N\equiv P(1)\pmod 7$.

引理 5 的证明 由引理 3 和引理 4 可知

$$P_1(x)-N_1=(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35}+x^{42})Q_1(x)$$

$$P_2(x)-N_2=(1+x^7+x^{14}+x^{21}+x^{28}+x^{35}+x^{42})Q_2(x)$$

因此

$$N_1\equiv P_1(1)\pmod 7$$

$$N_2\equiv P_2(1)\pmod 7$$

$$N\equiv N_1N_2\equiv P_1(1)P_2(1)\equiv P(1)\pmod 7$$

由于 $P(1)=3^{48}\equiv 1\pmod 7$，而 $83^3\equiv -1\pmod 7$，因此由引理 5 可知不可能成立等式 $N=83^3$.

(AMM 10630)

43. 由计算可知 $\operatorname{cosec}\dfrac{3\pi}{29}-\operatorname{cosec}\dfrac{10\pi}{29}=1.999\ 989\ 433\cdots$，证明：不可能存在正整数 j,k 和正奇数 n，使得

$$\operatorname{cosec}\frac{j\pi}{n}-\operatorname{cosec}\frac{k\pi}{n}=2$$

证明 设 $\varepsilon_m=e^{\frac{2\pi i}{m}}$ 是 m 次单位原根. 如果存在正整数 j,k 和正奇数 n 使得

$$\operatorname{cosec}\frac{j\pi}{n}-\operatorname{cosec}\frac{k\pi}{n}=2$$

那么由复数的指数表示和三角表示有 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，因此上式就是

$$\frac{2i}{\varepsilon_{2n}^{j}-\varepsilon_{2n}^{-j}}-\frac{2i}{\varepsilon_{2n}^{k}-\varepsilon_{2n}^{-k}}=2$$

因而
$$i=\frac{(\varepsilon_{2n}^{k}-\varepsilon_{2n}^{-k})(\varepsilon_{2n}^{j}-\varepsilon_{2n}^{-j})}{(\varepsilon_{2n}^{k}-\varepsilon_{2n}^{-k})-(\varepsilon_{2n}^{j}-\varepsilon_{2n}^{-j})}$$

上式意味着 $i\in\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n})$，其中 $\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n})$ 表示有理数域上的 $2n$ 阶分圆域.

另一方面，我们有 $\varepsilon_{2n}=\varepsilon_{4n}^{2}\in\mathbf{Q}(\varepsilon_{4n})$，$i=\varepsilon_{4n}^{n}\in\mathbf{Q}(\varepsilon_{4n})$ 以及

$$\varepsilon_{4n}=\frac{\varepsilon_{4n}^{n+1}}{\varepsilon_{4n}^{n}}=\frac{\varepsilon_{2n}^{\frac{n+1}{2}}}{i}\in\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n},i)$$

（这里利用了 n 是奇数的事实）.

这说明 $\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n},i)=\mathbf{Q}(\varepsilon_{4n})$. 从而由 $i\in\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n})$ 得出 $\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n})=\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n},i)=\mathbf{Q}(\varepsilon_{4n})$. 但是已知 $\mathbf{Q}(\varepsilon_{2n})$ 的次数是 $\varphi(2n)$，$\mathbf{Q}(\varepsilon_{4n})$ 的次数是 $\varphi(4n)=2\varphi(2n)$. 这就得出矛盾. 所得的矛盾便说明不可能成立等式 $\operatorname{cosec}\frac{j\pi}{n}-\operatorname{cosec}\frac{k\pi}{n}=2$.

44. 设 S 是所有 2 000 次的不可约的整系数一元多项式的集合，求出 S 中所有使得对任意正整数 a，$P(a)\mid P(a^2)$ 的多项式. (AMM 10802)

解 所求的所有多项式为 $\Phi_{2\,525}(x)$，$\Phi_{3\,333}(x)$，$\Phi_{3\,765}(x)$ 和 $\Phi_{4\,125}(x)$，其中 $\Phi_n(x)$ 是第 n 个分圆多项式.

设 $Z[x]$ 是整系数多项式环，T 是 $Z[x]$ 中所有使得对任意正整数 a，$P(a)\mid P(a^2)$ 的元素，我们证明 T 由所有使得 $P(x)\mid P(x^2)$ 的 P 所组成. 显然那种元素属于 T. 反之，对 $P(x)\in T$，设 $P(x^2)=P(x)Q(x)+R(x)$，其中 $R(x)\equiv 0$ 或者次数小于 $P(x)$ 的次数. 由 $R(x)$ 的次数的特性可知对于充分大的 a，必有 $|R(a)|<|P(a)|$. 因此由 $R(x)=P(x^2)-P(x)Q(x)$ 可知 $P(a)\mid R(a)$，在这个式子中让 a 充分大就得出必须 $R(x)\equiv 0$. 这就说明 $P(x)\mid P(x^2)$.

设 $P(x)\in T$，$Z(P)$ 是 $P(x)$ 的所有零点的集合. 由假设可知，平方只是重排 $Z(P)$ 的元素，因此对每个 $\zeta\in Z(P)$，存在一个正整数 m，使得 $\zeta^{2^m}=\zeta$，因此 $\zeta^{2^m-1}=1$，这说明 ζ 是一个阶可以整除 2^m-1 的单位根. 因而如果 $P\in S\cap T$，那么 P 是不可约的，而他的根是都是奇数阶的单位根. 所以 P 是一个分圆多项式 $\varphi_n(x)$，其中 n 是奇数.

问题现在归咎于求出所有次数为2 000的,n是奇数的分圆多项式$\Phi_n(x)$.由于$\Phi_n(x)$的次数为$\varphi(n)$,因此我们需要求出所有使得$\varphi(n)=2\,000$的奇数n.由于$2000=2^4\cdot 5^3$,这就得出$n=5^k\prod_{i=1}^{r}p_i$,其中$p_1,p_2,\cdots,p_r$是不同的奇素数,并且

$$2\,000=4\cdot 5^{k-1}\prod_{i=1}^{r}(p_i-1),k\leqslant 4$$

不用很长的搜索即可发现不存在$k=4$情况的解,但是对$k=3$,$n=125\cdot 3\cdot 11=4\,125$,对$k=2$,$n=25\cdot 101=2\,525$,对$k=1$,$n=5\cdot 3\cdot 251=3\,765$以及对$k=0$,$n=3\cdot 11\cdot 101=3\,333$都是解.

不难刻画对任意正整数a,$P(a)\mid P(a^2)$的整系数一元多项式P的形式,这种多项式是$P(x)=x^{k_0}\prod_{n=1}^{m}\Phi_n^{k_n}$,其中当$k_n\geqslant k_{2n}$时$k_n=0$(有无穷多个这种$n$).

45.设S_n表示作用在符号集合$\{1,2,\cdots,n\}$上的对称群,任给$\sigma\in S_n$,设

$$M(\sigma)=\{i\mid i\geqslant\sigma(i),1\leqslant i\leqslant n\}$$

$$P(\sigma)=\frac{1}{|M(\sigma)|}\sum_{i\in M(\sigma)}\{i+\sigma(i)\}$$

证明:$\sum_{\sigma\in S_n}P(\sigma)=(n+1)!$.

(AMM E3371)

证明 对每个$\sigma\in S_n$,如果$\sigma(n+1-j)=n+1-i$,定义$\sigma^*\in S_n$,$\sigma^*(i)=j$.那么映射$\sigma\to\sigma^*$是S_n中的一个对合.由于当且仅当$n+1-j\geqslant n+1-i$时$i\geqslant j$,因此$|M(\sigma^*)|=|M(\sigma)|$,从而

$$P(\sigma)+P(\sigma^*)=\frac{1}{|M(\sigma)|}\sum_{i\in M(\sigma)}[i+\sigma(i)+(n+1-\sigma(i)+n+1-i)]=2(n+1)$$

因此
$$2\sum P(\sigma)=\sum[P(\sigma)+P(\sigma^*)]=\sum_{\sigma}2(n+1)=2(n+1)!$$

(AMM 10566)

46. 设 S 是一个 n 元素的有限集,$n>1$. f 是一个作用在 S 的子集上的实值函数. 又设对 S 的任意子集 A,B 成立 $f(A\cap B)=\min\{f(A),f(B)\}$,证明

$$\sum_{A\subset S}(-1)^{n-|A|}f(A)=f(S)-\max f(A)$$

证明 由于当 A 的元素个数减少时,$f(A)$ 不可能增加,因此 $f(A)$ 只可能在 S 的某个元素个数为 $n-1$ 的真子集 U 处取得. 设 x 是 U 中缺少的 S 的元素. 对 $B\subset U$,设 $B'=B\cup\{x\}$. 由于 $B=B'\cap U$,故除非 $B=U$,就有 $f(B)=\min\{f(B'),f(U)\}=f(B')$. 由于 B 和 B' 的元素个数之差为1. 因此求和时,那些除了 S 和 U 的项将两两抵消,因而

$$\sum_{A\subset S}(-1)^{n-|A|}f(A)=f(S)-f(U)=f(S)-\max f(A)$$

(AMM E2851)

47. 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的秩都是1,证明:$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量都是某一行向量 $\boldsymbol{v}$ 的倍数或者 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是某一列向量 $\boldsymbol{w}$ 的倍数.

证明 由于 $R(\boldsymbol{A})=1$,因此显然 $\boldsymbol{a}$ 的行向量都是某一行向量 $v\neq 0$ 的倍数. 类似的 $\boldsymbol{B}$ 的行向量都是某一行向量 $\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0}$ 的倍数. 用 $A_i(B_i)$ 表示 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B})$ 的第 i 行,则我们有

$$A_1=c_1\boldsymbol{v},A_2=c_2\boldsymbol{v},\cdots,A_n=c_n\boldsymbol{v}$$

$$B_1=d_1\boldsymbol{w},B_2=d_2\boldsymbol{w},\cdots,B_n=d_n\boldsymbol{w}$$

其中 c_i 和 d_i 都是常数. 设 $\boldsymbol{w}$ 不是 $\boldsymbol{v}$ 的倍数,则列向量 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 必须是列向量 $\boldsymbol{d}=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的倍数,否则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 将至少有两行不相关. 这就意味着 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量都是列向量 $\boldsymbol{c}$ 的倍数.

注 Duarte 指出了这个问题一个推广(Marcus, Finite - dimensional Multilinear Algebra, Dekker, 1973)如下:

任何非零的 $m\times n$ 的域上的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以写成 r 个秩为1的矩阵之和

$$\boldsymbol{A}=\sum_{t=1}^{r}[c_{it}d_{it}]$$

此外当且仅当任意两个向量集合 $\{(c_{1t},\cdots,c_{mt})\},\{(d_{1t},\cdots,d_{nt})^{\mathrm{T}}\},t=1,\cdots,r$ 线性相关时,秩 $\boldsymbol{A}=r$.

(AMM E2711)

48. 设 A 和 B 都是域上的 $m\times m$ 矩阵，证明：如果 A 的特征多项式是不可约的，则秩$(AB-BA)\neq 1$.

证明 解决这个问题的关键是下面的引理：

引理 设 A 和 B 都是域上的 $m\times m$ 矩阵，如果秩 $C=AB-BA=1$，并且 $v\in R(C)$，那么 $A^iv\in \mathrm{Ker}(C)$，$i=1,2,\cdots$.

引理的证明 由于 CA^i 的秩至多为 1，并且由于 $\mathrm{tr}(CA^i)=\mathrm{tr}(ABA^i-BA^{i+1})=0$，因此 CA^i 是幂零阵. 由于 v 是 CA^i 的特征向量，因此 $CA^iv=0$，这就证明了引理.

那样，如果秩 $C=1$，选择 $v\in R(C)$，$v\neq 0$，则集合 $W=span\{A^iv\mid i=0,1,2,\cdots\}$ 是 A 的非零的不变子空间. 由于 $W\subseteq \mathrm{Ker}(C)$，因此 W 是一个真子空间. 因此 A 的特征多项式是可约的. 事实上，我们可以证明更多一点：

定理 设 A 和 B 都是域上 $m\times m$ 的矩阵，$C=AB-BA$. 如果 A 的极小多项式是不可约的，则秩 $C\neq 1$.

定理的证明 由于 A 的极小多项式是不可约的，因此存在一组基，使得在这组基下，$A=diag[D,D,\cdots,D]$，$B=(B_{ij})$，其中 D 和 B_{ij} 都是 $n\times n$ 矩阵，并且 D 的特征多项式就是 A 的极小多项式(这就是取一组基，使得在这组基下，A 有有理的若当标准形). 那么 $C=(C_{ij})$，其中 $C_{ij}=DB_{ij}-B_{ij}D$. 如果秩 $C\leqslant 1$，那么秩 $C_{ij}\leqslant 1$，并且由于 D 的特征多项式是不可约的，因此 $C_{ij}=0$. 那样 $C=0$，这就证明了定理.

事实上，上面定理的逆定理也成立，我们有

逆定理 设 A 是域 F 上的 $m\times m$ 矩阵，那么当且仅当 A 的极小多项式 $m(x)$ 是不可约的时，存在一个域 F 上的 $m\times m$ 矩阵 B，使得秩$(AB-BA)=1$.

逆定理的证明 设 V 是域 F 上的线性空间. 由前一个定理，我们可以假设 $f(\lambda)g(\lambda)\mid m(\lambda)$，其中 f 和 g 都是系数为域 F 中元素的不可约一元多项式，那么就存在一个 A 的不变子空间 U 使得 fg 是 $A\mid_U$(表示 A 在 U 上的限制)的极小多项式，同时也是特征多项式.(首先考虑 $\mathrm{Ker}\,f(A)g(A)$，然后取一组这个空间的基，使得 A 在这组基下具有有理若当标准形.) 如果 $U\neq V$，由归纳法假设，就存在一个作用在 U 上的 B，使得$(AB-BA)\mid_U$ 的秩为 1，那么我们可把 B 扩张到 V，使得秩$(AB-BA)=1$，因此我们不妨假设 $U=V$.

(1) $f\neq g$，那么 $V=V_1\oplus V_2$，并且对应于这一分解有

$$A = diag[A_1, A_2], f(A_1) = 0 = g(A_2)$$

设 $\boldsymbol{B}$ 是分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{C} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 我们可以认为 $\boldsymbol{C}$ 是从 V_2 到 V_1 的映射. 现在当且仅当 $\boldsymbol{C}$ 是一个 $F[x]$ - 模同态时, $A_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}A_2 = 0$, 其中 V_1 和 V_2 分别是由 $xv = A_iv, v \in V_i, i = 1,2$ 定义的 $F[x]$ - 模同态. 由于 f 和 g 是不可约的并且是不相等的, 所以 V_1 和 V_2 是单的, 不同构的模. 那样, 由舒尔(Schur)引理可知, 仅有的模同态是零映射. 因此当且仅当 $C = 0$ 时, $A_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}A_2 = 0$. 因此从 $\boldsymbol{C}$ 到 $A_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}A_2$ 的线性映射是一个单射并且因此是一个满射. 现在选择 $\boldsymbol{C}$ 使得 $A_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}A_2$ 的秩是 1, 那么

$$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & A_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因而秩$(\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}) = 1$.

(2) $f = g$, 这时 $m = f^2$. 设 $W = \mathrm{Ker}\, f(\boldsymbol{A})$, 并取 $v_1 \in V - W$. 那么 $v_1 + W$ 是 V/W 的循环向量. 设 $v_2 = \boldsymbol{A}v_1, \cdots, v_n = \boldsymbol{A}^{n-1}v_1$, 其中 n 是 f 的次数, 那么

$$\boldsymbol{A}v_n = -\sum_{j=1}^{n} a_j v_j + w_1$$

其中 $w_1 \in W$ 并且

$$f(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}x^j$$

由于 $f(\boldsymbol{A})v_1 \neq 0$, $w_1 \neq 0$. 我们可从 w_1 开始对 W 选一个类似的基. 在这组基下

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_1 & \boldsymbol{D} \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 的右上角中的元素是 0 或 1. 设 $\boldsymbol{B} = diag[0, \boldsymbol{I}]$, 那么

$$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩为 1.

(AMM E3058)

49. 证明: 一个 n - 轮换, 例如$(1,2,3,\cdots,n)$不可能写成少于 $n-1$ 个对换的乘积.

证明　由于当一个对换的乘积不等于一个轮换时, 我们显然不可能通过增加乘积中已有的对换来使它等于这个轮换, 因此我们不妨设乘积中的对换是两两不同的. 把轮换的 n 个元素写在平面上, 例如写在一个圆周上, 然后对每一个对换(i,j), $i, j \in$

$\{1,2,\cdots,n\}$，在表示 i 的点和表示 j 的点之间用一条无向线段连接起来.由于乘积中的对换是两两不同的，因此线段的连接方式是唯一的，这样，一个 k 个对换的乘积就唯一地对应了一个平面上的有 n 个顶点和 k 条边的图.由于这些对换的乘积是一个 n - 轮换，因此从这个图的每一点出发，经过若干个线段后必可到达另一个点，所以，这个图是一个连通图，因而至少含有 $n-1$ 条边，这也就是说，乘积中至少要有 $n-1$ 个对换.

50. 证明：交替群 $A_n(n>4)$ 中的每个元素 a 都可写成 $a=xxyyxy(x,y\in A_n)$ 的形式.

(AMM E3048)

证明 我们将表明对使得 $y^2=1$ 的排列 $y\in A_n$ 和 ay 具有和 3 互素的周期.然后，解 $3t\equiv 1(\bmod k)$，其中 k 是 ay 的周期，并设 $x=(ay)^t$，那样由于 $y^2=1$ 我们就有

$$a=xxxy=xxyyxy$$

为了说明如何构造 y，我们考虑以下 5 种情况，在这 5 种情况中，a 的周期和 3 都不互素.

(1) a 的任何循环部分都不是 3 - 循环.那么，对任何长度为 $L(c)$，其中 $L(c)$ 是 3 的倍数的 a 的循环部分 c，我们有 $L(c)>5$；为了把 c 缩短为一个长度为 $L(c)-2$ 的循环，我们用两个符号和 c 相交的对换去乘 c.例如

$$(1,2,3,4,5,6)\cdot(1,2)(3,4)=(1,3,5,6)$$

(2) a 恰有 $2i$ 个长度为 3 的循环，其中 i 是一个正整数.把这些 3 循环分成对，在每一对中，把对中带有一个对换的两个数结合在一起，然后利用一个和前面的对换不相交的对换把结合的结果缩短为一个 5 - 循环，例如

$$(1,2,3)(4,5,6)\cdot(1,2)(3,4)=(1,3,5,6,4)$$

对 $j\neq 3$，a 的 j - 循环可以像(1)那样处理.

(3) a 恰有 $2i+1$ 个长度为 3 的循环，其中 i 是一个正整数.例如

$$(1,2,3)(4,5,6)(7,8,9)\cdot(1,2)(3,4)(6,7)(8,9)=$$
$$(1,3,5,6,8,7,4)$$

在上面的例子中，用 4 个不相交的对换和 a 的 3 - 循环结合，并且把 3 - 循环造成的 9 - 循环缩短为一个长度为 7 的循环，这个长度和 3 互素.这样，所得的循环即可像(1)和(2)中那样处理.

(4) a 至少有 2 循环，但是恰有一个为 3 - 循环.在这种情况下，我们可以没有障碍地用一个或两个 a 的其他循环与它结合，并且在必要时，把结合所得的结果缩短为一个长度和 3 互素的循

环.我们可以安排的使所用的对换的数目是一个偶数.细节如下:

ⅰ 除了3-循环之外,a 还有某个长度为 $L(r)>3$ 的 r-循环.如果 $L(r)-1$ 不是3的倍数,那么我们把3-循环和 r-循环结合,并把所得的结果缩短为一个长度为 $L(r)+2$ 的轮换;这一过程使用两个不相交的对换,例如

$$(1,2,3)(4,5,6,7,8)\cdot(1,2)(3,4)=(1,3,5,6,7,8,4)$$

如果 $L(r)-1$ 是3的倍数,那么 $L(r)>6$,那么我们在缩短过程中使用四个不相交的对换以获得一个长度为 $L(r)$ 的轮换.例如

$$(1,2,3)(4,5,6,7,8,9,10)\cdot(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)=(1,3,5,7,9,10,4)$$

ⅱ a 恰有一个长度为奇数的循环,那么 a 至少有两个长度为偶数的循环 r 和 s.如果 $L(r)+L(s)$ 不是3的倍数,那么我们可仅用两个不相交的对换和一个3-循环和它结合,例如

$$(1,2,3)(4,5)(6,7)\cdot(3,4)(5,6)=(1,2,3,5,7,6,4)$$

如果 $L(r)+L(s)$ 是3的倍数,那么我们用四个对换去结合和缩短

$$(1,2,3)(4,5)(6,7,8,9)\cdot(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)=(1,2,5,7,9,6,4)$$

(5) a 恰有一个3-循环,由于 $n>4$,那么 a 至少有两个不动点,例如

$$(1,2,3)(3,4)(1,5)=(1,5,2,3,4)$$

注 用现在的术语来说,上面的议论证明了当 $n>4$ 时,在交替群 A_n 中,字 x^2y^2xy 是通用的.

(AMM E2931)

51.设 m,n 是固定的正整数.群 G 中的任意元素 x,y 满足

$$(xy)^n=x^ny^n,(xy)^{n+m}=x^{n+m}y^{n+m}$$
$$(xy)^{n+2m}=x^{n+m}y^{n+2m}$$

证明:当 $m=1$ 或2时,G 是阿贝尔(Abel)群,当 $m\geqslant 3$ 时情况怎样?

解 **定理(Levi)** 如果对群 G 中的所有元素 x,y 和整数集 S 中的所有的 n 都成立 $(xy)^n=x^ny^n$,那么当且仅当 $\gcd(n^2-n\mid n\in S)=2$ 时,G 是可交换的.(见 AMM E2411,1974,410)

Teitler 也证明了以下结果:

(1) 假如映射 $x\to\varphi(x)$,$x\to x\varphi(x)$,$x\to x^2\varphi(x)$ 都是群 G 的自同态,那么 G 是阿贝尔群.

(2) 假如映射 $x\to\varphi(x)$,$x\to x^2\varphi(x)$,$x\to x^4\varphi(x)$ 都是群 G

的自同态,那么 G 是阿贝尔群.

证明 (1) 设 $B(x)=x\varphi(x)$,从 $B(xy)=B(x)B(y)$ 得出

$$xy\varphi(x)\varphi(y)=x\varphi(x)y\varphi(y)$$

因此 $y\varphi(x)=\varphi(x)y$,那样 $\varphi(x)$ 必须总在 G 的中心之中.

定义 $\Gamma(x)=x^2\varphi(x)=xB(x)$,那么 $x\varphi(x)$ 在中心中,因此 x 在中心中.

(2) 设 $B(x)=x^2\varphi(x)$,那么 $B(xy)=B(x)B(y)$ 给出

$$(xy)^2\varphi(x)\varphi(y)=x^2\varphi(x)y^2\varphi(y)$$

因此

$$yxy\varphi(x)=x\varphi(x)y^2 \qquad (*)$$

又设 $\Gamma(x)=x^4\varphi(x)=x^2B(x)$,那么 $yxyB(x)=xB(x)y^2$,因此

$$yxyx^2\varphi(x)=xx^2\varphi(x)y^2 \qquad (**)$$

在$(*)$中令 $x=y$,得出对所有 $x\in G$,成立 $x^2\varphi(x)=\varphi(x)x^2$.

然后在式$(*)$的两边取逆并乘以$(**)$得

$$\varphi(x)^{-1}(yxy)^{-1}(yxy)x^2\varphi(x)=y^{-2}\varphi(x)^{-1}x^{-1}xx^2\varphi(x)y^2$$

但是 $\varphi(x)$ 和 x^2 可交换,因此

$$x^2=y^{-2}x^2y^2$$

这就得出元素的平方可交换.现在在式$(*)$中设 $x=t^2$

$$yt^2y\varphi(t)^2=t^2\varphi(t)^2y^2$$

因此 $yt^2y=t^2y^2$,$yt^2=t^2y$,那样每个元素 t 的平方 t^2 在 G 的中心之中.因此式$(*)$现在可以简化为 $xy=yx$,因而 G 是阿贝尔群.

52. 设 G 是一个有限群,又设对所有的 $d\geqslant 1$,G 至多有 d 个阶为 d 的元素.证明:G 是一个循环群.

(AMM 5774)

证明 设 $|G|=n$,以及 $d\mid n$.又设 A_d 是 G 的所有阶恰为 d 的元素的集合.设 $a\in A_d$,那么 $e,a^1,\cdots,a^{d-1}$ 都满足 $x^d=e$,其中 e 是 G 的乘法单位元.由假设,这些元素是 G 中仅有的具有这种性质的元素.因此或者 $|A_d|=0$ 或者 $|A_d|=\varphi(d)$,其中 φ 是欧拉函数.显然如果 $d_1\neq d_2$,那么 $A_{d_1}\cap A_{d_2}=\varnothing$ 并且 $G=\bigcup_{d\mid n}A_d$,因此

$$n=\sum_{d\mid n}|A_d|\leqslant\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n$$

那样 $|A_d|=\varphi(d)$,特别 $|A_n|=\varphi(n)$,因此 G 存在一个阶为 n 的元素,因而是循环的.

(AMM 10215)

53. 设 R 是一个没有非零的幂零元的结合环(不一定是交换的或者拥有单位元). r 和 s 是 R 的两个使得 $r^d = s^d$, $r^e = s^e$ 的元素,其中 d 和 e 是两个互素的正整数,证明:$r = s$.

证明 由于 $(d,e) = 1$,因此存在两个整数 a,b 使得 $ad + be = 1$.不失一般性,不妨设 $a > 0$ 和 $b < 0$.由 $r^d = s^d$ 得出 $r^{ad} = s^{ad}$,因而 $r^{1-be} = s^{1-be}$,同样,由 $r^e = s^e$ 得出 $r^{-be} = s^{-be}$,由此可知,存在一个正整数 $u = -be$ 使得 $r^{1+u} = s^{1+u}$ 以及 $r^u = s^u$.

把 $r^u = s^u$ 代入前一个式子,我们看出 $r^{1+u} = r^u s$,因此 $r^u(r - s) = 0$.在一个没有非零幂零元的环中,元素 x, y 当且仅当 $yx = 0$ 时满足关系 $xy = 0$,因此 $r(r - s)r^{u-1} = 0$,用类似于此的推理和数学归纳法可以得出 $(r(r - s))^u = 0$,因此 $r(r - s) = 0$,类似可得 $s(r - s) = 0$.因此 $(r - s)^2 = 0$,此式蕴含 $r - s = 0$,这就是所要证的.

(AMM 6395)

54. 设 R 是一个交换环, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是环 R 上的 $n \times n$ 矩阵.设 S 是由 R 和 n^2 个未定元 x_{ij} 生成的环.令 $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$,并设成立关系式 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{I}$.

问 S 是否一定是可交换的?

解 答案是肯定的.设 C 表示 S 的中心.如果 $r \in \mathbf{R}$,那么 $r\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}r$,因此

$$r\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}r = (\boldsymbol{XA})(r\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}r = \boldsymbol{X}r(\boldsymbol{AX}) - \boldsymbol{X}r = \boldsymbol{X}r - \boldsymbol{X}r = 0$$

故 $r \in C$,因此 $R \subset C$.如果 $s \in S$,那么由于 $a_{ij} \in \mathbf{R} \subset C$,故 $s\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}s$,所以

$$s\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}s = (\boldsymbol{XA})(s\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}s = \boldsymbol{X}s(\boldsymbol{AX}) - \boldsymbol{X}s = \boldsymbol{X}s - \boldsymbol{X}s = 0$$

这样 s 和 S 的所有生成子可交换,所以 $S \subset C$, $S = C$.

(AMM E3029)

55. 设 α 和 β 是具有单位元的结合环 R 中的两个非零元,满足 $\alpha + \beta = 1 = \alpha^{-1} + \beta^{-1}$,证明:$\alpha = \beta^{-1}$ 以及 $\alpha^6 = \beta^6 = 1$.

证明 由 $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ 得出

$$\alpha\beta = \alpha(\alpha^{-1} + \beta^{-1})\beta = \beta + \alpha = 1$$

因而 $\alpha = \beta^{-1}$.

$\alpha + \beta = 1$ 和刚才已证的 $\alpha\beta = 1$ 得出

$$1 = \alpha\beta = \alpha(1 - \alpha) = \alpha - \alpha^2$$

因此 $\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = (\alpha - 1)\alpha = \alpha^2 - \alpha = -1$

同理可证 $\beta^3 = -1$，因而 $\alpha^6 = \beta^6 = 1$.

(AMM 5377)

56. 设在环 R 中，对每个元素 x，都存在一个正整数 n，使得 $x = x^{n+1}$，证明：R 中每个元素都与 x^n 可交换.

证明 我们观察到以下事实：

(1) x^n 是幂等元，由于 $(x^n)^2 = x^{n+1} \cdot x^{n-1} = x \cdot x^{n-1} = x^n$；

(2) 设 $ab = 0$，那么 $ba = (ba)^{n(ba)+1} = b(ab)^{n(ba)}a = 0$；

(3) 设 $x, y \in \mathbf{R}$，$n = n(x)$，那么由 (1) 有 $yx^n = yx^{2n}$，因此 $(y - yx^n)x^n = 0$，因而从 (2) 又有 $x^n(y - yx^n) = 0$，因此得出 $x^ny = x^nyx^n$；

(4) 类似于 (3) 从 $x^ny = x^{2n}y$，又得出 $yx^n = x^nyx^n$.

由 (3)，(4) 即得出结果.

(AMM 10548)

57. 设环 R 没有非零的幂零元，u，v 是环 R 的可逆元，使得

(1) $uvu^{-1} + u^{-1}vu = 2v$；

(2) $u(vuv^{-1}) = (vuv^{-1})u$.

证明 (1) $uv = vu$.

(2) 关于没有非零的幂零元的假设是否是必要的？

证明 (1) 在条件 (1) 的两边右乘 v^{-1} 得出

$$uvu^{-1}v^{-1} + u^{-1}vuv^{-1} = 2 \quad ①$$

在条件 (2) 的两边乘以 u^{-1}，并利用 u 是可逆元的假设得出

$$vuv^{-1}u^{-1} = u^{-1}vuv^{-1}$$

把此式代入式 ① 得

$$uvu^{-1}v^{-1} + vuv^{-1}u^{-1} = 2 \quad ②$$

元素 $x = uvu^{-1}v^{-1}$ 作为两个可逆元的乘积是可逆的. 由式 ② 得出 $x + x^{-1} = 2$ 以及 $x^{-1}(x-1)^2 = 0$，因此 $(x-1)^2 = 0$. 由于环 R 没有非零的幂零元，因此 $x - 1 = 0$，故 $uvu^{-1}v^{-1} = 1$，由此即可得出 $uv = vu$.

(2) 关于环 R 没有非零的幂零元的假设是必要的. 设 R 是 8 元商群 $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 上，系数在 Z_2 中的群环. 并设 $u = i$，$v = j$，由于系数在 Z_2 中，因此条件 (1) 等价于 $u^2v = vu^2$，由于在 Q_8 中 $i^2 = -1$，因此条件 (1) 满足，类似条件 (2) 也满足. 但是在 Q_8 中 i 和 j 不可交换.

58. 设在有单位元的非结合环 R 中，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都成立 $(xy)^2=x^2y^2$. 证明：R 是交换环.（AMM，E. C. Johnsen, D. L. Outcalt and Adil Yaqub, An Elementary Commutativity Theorem For Rings, Vol. 75, No 3. 288-289.）

证明 设 $x,y\in\mathbf{R}$，那么 $(xy)^2=x^2y^2$，此外

$$(x(y+1))^2=x^2(y+1)^2=x^2y^2+2x^2y+x^2$$

同时又有

$$(x(y+1))^2=(xy)^2+(xy)x+x(xy)+x^2$$

因此
$$(xy)x+x(xy)=2x^2y$$

现在，把上式中的 x 换成 $x+1$ 就得到

$$((x+1)y)(x+1)+(x+1)((x+1)y)=2(x+1)^2y$$

而由上式又得出

$$(xy)x+yx+x(xy)=2x^2y+xy$$

上式和 $(xy)x+x(xy)=2x^2y$ 一起就得出 $xy=yx$.

注 在此问题中，环 R 有单位元起了基本的作用.

例1 设 $R=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\0 & 0\end{pmatrix}\middle|\, a,b\text{ 是整数}\right\}$，那么容易验证对任意 $x,y\in R$ 和 $n\geqslant1$ 成立 $(xy)^n=x^ny^n$，然而 R 不是交换的.

例2 设 $R=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}$ 是 $GF(2)$ 上的 2×2 矩阵的一个子环，那么容易验证对任意 $x,y\in R$ 和 $n\geqslant1$ 成立 $(xy)^n=x^ny^n$，然而 R 不是交换的. 在此例中 R 甚至拥有左单位元.

此外，我们指出，如果把问题中的条件 $(xy)^2=x^2y^2$ 换成对任意 $k>2$，$(xy)^k=x^ky^k$，那么即使 R 有单位元，结论也不一定成立.

例3 设 $k\geqslant3$ 是固定的，p 是任意但是固定的满足下列条件的素数：

如果 k 是奇数，那么 $p\mid k$，如果 k 是偶数，那么 $p\mid\frac{k}{2}$.

由于 $k>2$，这是可能的. 设 R 是下面定义的 $GF(p)$ 上的 3×3 矩阵的一个子环

$$R=\left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\0 & a & d\\0 & 0 & a\end{pmatrix}\middle|\, a,b,c,d\in GF(p)\right\}$$

那么容易验证对任意 $x,y\in R$ 成立 $(xy)^k=x^ky^k$，然而 R 不是交换的.

59. 设 R 是一个结合环，证明：

(1) 如果对 $x,y\in R$，$yx=0$ 蕴含 $xy=0$，那么 R 中的每个幂等元 e 属于 R 的中心 $C(R)$.

(2) 如果对所有的 $x,y\in R$，$(xy)^2=xy$，则 R 是交换的.

(3) 如果对所有的 $x,y\in R$，$(xy-yx)^2=xy-yx$.

(Micheal . O . Searcold and Desmond MacHale , Two elementary generalizations of Boolean rings , AMM Vol 93(1986), No.2: 121-122)

证明 (1) 对所有的 $r\in R$

$$(e^2-e)r=0=e(er-r)$$

因此由假设可以得出 $(er-r)e=0$，即 $ere=re$. 同理 $(re-r)e=0$ 蕴含 $e(re-r)=0$，或 $ere=er$. 因此 $re=er$，因而 $e\in C(R)$.

(2) 如果 $yx=0$，那么 $xy=(xy)^2=x(yx)y=0$，因此由(1)已证的结果可知对所有的 $x,y\in R$，$xy\in C(R)$. 由此易证所有的乘积都属于中心，因此

$$xy=(xy)^2=x(yxy)=(yxy)x=(yx)^2=yx$$

这就证明了 R 是交换的.

(3) 首先，如果 $yx=0$，那么 $xy=(xy)^2=x(yx)y=0$，因此由(1)已证的结果可知对所有的 $x,y\in R$，$xy-yx\in C(R)$，进而

$$xy-yx=(xy-yx)^2=(yx-xy)^2=yx-xy$$

因此
$$x(xy-yx)=(xy-yx)x$$

这说明对所有的 $x\in R$，$x^2\in C(R)$. 其次

$$\begin{aligned}(xy)^2&=x(yxy)=x((yx)^2+y^2-(yx-y)^2-y^2x)=\\&((yx)^2+y^2-(yx-y)^2-y^2x)x=\\&(yxy)x=(yx)^2\end{aligned}$$

最后，对所有的 $x,y\in R$

$$\begin{aligned}xy-yx&=(xy-yx)^2=xy(xy-yx)-yx(yx-xy)=\\&(xy)^2-xy^2x-(yx)^2+yx^2y=-x^2y^2+x^2y^2=0\end{aligned}$$

这就说明 R 是交换的.

(AMM E3109)

60. 设 R 是一个结合环，在 R 中，对任意 $x,y\in R$ 都有 $(xy)^n=yx$，其中 n 是一个固定的正整数，证明：R 是交换环.

证明 如果 $n=1$，则显然 $xy=yx$，如果 $n>1$，则

$$xy=(yx)^n=[(xy)^n]^n=[(xy)(xy)^{n-1}]^n=$$

$$(xy)^{n-1}(xy)=(xy)^n=yx$$

这就证明了结论.

注 Charles Lanski 将此问题的结论推广为:设 R 是一个结合环,在 R 中,对任意 $x,y\in R$ 都存在一个 $n=n(x,y)>1$,使得 $xy=(yx)^n$,则 R 是交换环.

首先看出当且仅当 $yx=0$ 时,$xy=0$.因此 R 的左零因子和 R 的右零因子重合.用 A 表示 R 的零因子理想.其次设 $a\in R,a^2=0$,则对所有的 $y\in R,0=a^2y=a(ay)$,因此 $(ay)a=0$.由于 $n=n(a,y)>1$,我们有 $ay=(ya)^n=y(aya)(ya)^{n-2}=0$,故 $a\in A$.但是对任意 $x\in R$,取 $y=x$ 得出,对 $n>1,x^2=x^{2n}$,因此 $(x^{2n-1}-x)^2=0$,故 $x^{2n-1}-x\in A$,利用 N. Jacobson 的著名定理,我们得出 R/A 时交换的.如果 $x,y\in R$,那么 $xy=yx$ 在 A 中,这是一个双边理想.因此对任何 $x,y,z\in R,(xy-yx)z=0=z(xy-yx)$,所以 $(xy)z=x(yz)=xz(y)=(xz)y=(zx)y=z(xy)$.反过来,如果 $xy=(yx)^n$ 以及 $yx=(xy)^m$,那么 $xy=(yx)^n=(xy)^{mn}=x(yx)^{mn-1}y=((yx)^{mn-1}y)x=(yx)^{mn}=(xy)^m=yx$ 说明 R 是交换的.

61. 设 R 是一个有单位元的环,具有性质:对任意 $x,y\in R$,都存在非负整数 m,n 使得 $x^{m+1}y^{n+1}=x^myxy^n$,证明:R 是交换环.

证明 由条件可知,对任意 $x,y\in R$,存在非负整数 m,n 使得

$$x^m(xy-yx)y^n=0$$

在上式中,把 y 换成 $y+1$ 得出存在 k,l 使得

$$x^l(xy-yx)(y+1)^k=0$$

设 $r=\max\{m,l\}$,则我们有

$$x^r(xy-yx)y^n=0,x^r(xy-yx)(y+1)^k=0$$

对上两式右乘 y^{n-1},并且注意 $(y,y+1)=1$,因此 $(y^n,(y+1)^k)=1,(y^{2n-1},(y+1)y^{n-1})=y^{n-1}$,故由辗转相除法算法可知存在 y 的整系数多项式 A,B,使得

$$Ay^{2n-1}+B(y+1)^ky^{n-1}=y^{n-1}$$

因而有

$$x^r(xy-yx)(Ay^{2n-1}+B(y+1)^ky^{n-1})=x^r(xy-yx)y^{n-1}=0$$

把上述手续重复 n 次就得出存在一个整数 s 使得 $x^s(xy-yx)=0$.

同理,把 x 换成 $x+1$ 可证存在 t 使 $(x+1)^t(xy-yx)=0$,对此方程左乘 x^{s-1},由辗转相除法又可得出 $x^{s-1}(xy-yx)=0$.把上述手续重复 s 次就得出 $xy-yx=0$.这就证明了 R 是交换的.

注 R 具有单位元的条件不可缺少.例如考虑所有 3×3 对角线为 0 的

上三角阵构成的环 R，则对任意 $X \in R$ 有 $X^3 = 0$，因此对任意 $X, Y \in R$，$m = n = 3$ 便适合要求，然而 R 不是交换的.

62.（Lucas-Lehmer 判据）设由递推关系 $S_1 = 4, S_n = S_{n-1}^2 - 2$ 定义了数列 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$. 又设 p 是一个素数，$M_p = 2^p - 1$，那么如果 $M_p \mid S_{p-1}$，则 M_p 是一个素数.（J . W . Bruce , A Really Trivial Proof of the Lucas - Lehmer Test , AMM Vol .100 (1993) , No .4:370-371）

证明 设 $\omega = 2 + \sqrt{3}$，则 $\bar{\omega} = 2 - \sqrt{3}$，$\omega\bar{\omega} = 1$. 首先叙述以下引理：

引理 1 $S_n = \omega^{2^{n-1}} + \bar{\omega}^{2^{n-1}}$.

这容易用数学归纳法证明.

引理 2 设 X 是一个具有单位元的集合，在此集合中可定义一个满足结合律的二元运算（称为乘法），那么 X 中的所有可逆元构成一个群.

引理 2 的证明 设 X^* 是 X 中所有可逆元的集合，那么由于 X 中具有单位，因而 X^* 不空. 又设 $x_1, x_2 \in X^*$，则 x_1, x_2 具有可逆元 x_1^{-1}, x_2^{-1}，因而 x_1x_2 具有可逆元 $x_2^{-1}x_1^{-1}$，故 $x_1x_2 \in X^*$，所以 X^* 是一个具有单位元的关于乘法运算封闭，且满足结合律的集合，因而是一个群.

引理 3 设 G 是一个有限群，那么 G 中任意元素的阶至多是群的阶. 如果 $x \in G, x^r = 1$，则 x 的阶必整除 r.

这个引理的证明在任何关于群论的教材中都可以找到，特别，它是拉格朗日定理的直接推论.

下面我们来证明本题的结果.

如果 M_p 是合数，则可选出 M_p 的一个素因数 q 使得 $q^2 \leqslant M_p$. 由于 M_p 是奇数，故 q 显然不是 2. 由于 $M_p \mid S_{p-1}$（已知条件），故由引理 1 可知

$$\omega^{2^{p-2}} + \bar{\omega}^{2^{p-2}} = RM_p$$

其中 R 是一个正整数. 用 $\omega^{2^{p-2}}$ 乘上式两边，并利用 $\omega\bar{\omega} = 1$ 得出

$$\omega^{2^{p-1}} = RM_p\omega^{2^{p-2}} - 1$$

将上式两边平方得

$$\omega^{2^p} = (RM_p\omega^{2^{p-2}} - 1)^2$$

现在设 Z_q 表示模 q 的同余类的集合. $X = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z_q\}$，则在 X 中可定义加法和乘法两种运算，显然这两种运算都满足结合律，且 X 有乘法单位元. 设 X^* 表示 X 中的在乘法运算下可逆的元的集合，则由引理 2 可知，X^* 构成一个群.

由于 $q \mid M_p$，故 $q \mid S_{p-1}$，因此把 $RM_p\omega^{2^{p-2}}$ 看成 X 中的元素，它就是 0 元素. 因而由

$$\omega^{2^{p-1}} = RM_p\omega^{2^{p-2}} - 1$$

式和
$$\omega^{2^p} = (RM_p\omega^{2^{p-2}} - 1)^2$$

式就得出 $\omega^{2^{p-1}} = -1, \omega^{2^p} = 1$，由此得出 ω 在 X^* 中的阶是 2^p，由于 X 中至少含有一个不可逆元，即 0 元，而 X 中共含有 q^2 个元素（a 和 b 分别可取 q 个值，因此 $a + b\sqrt{3}$ 共可组合出 q^2 个元素）. 因此由引理 3 得出 X^* 中任一元素的阶至多为 $q^2 - 1$，而我们已证 ω 在 X^* 中的阶是 2^p，因而有

$$2^p \leqslant q^2 - 1 \leqslant M_p - 1 = 2^p - 2$$

矛盾. 所得的矛盾便说明 M_p 必是一个素数.

第4章　初等数论问题

(AMM E3005)

1. 设 $n \geqslant 5$ 是整数. 证明: 当且仅当对 n 的任意四个正整数的分拆 $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ 都有 $n_1 n_2 \neq n_3 n_4$ 时, n 是一个素数.

证明　如果 n 是一个合数, 则我们可设 $n = (a+1)(b+1)$, 其中 a, b 都是正整数, 那么 $n = ab + a + b + 1$, 而 $ab \cdot 1 = a \cdot b$.

反过来, 不失一般性, 设 $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ 并且 $n_1 n_2 = n_3 n_4$. 设 $\frac{n_1}{n_4} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{r}{s}$, 其中 $\frac{r}{s}$ 是即约分数, 因而存在正整数 h, k 使得 $n_1 = kr, n_4 = ks, n_3 = hr, n_2 = hs$, 那么

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = (h+k)(r+s)$$

所以 n 是一个合数.

(AMM E2014)

2. 证明: $2^{2^n} - 1$ 至少有 n 个不同的素因数.

证明　对 $n = 1$, 结果显然正确. 假设 $2^{2^n} - 1$ 至少有 n 个不同的素因数, 那么

$$2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1)$$

由于右边的两个因数都是奇数, 并且它们的差是 2, 因此这两个因数是互素的. 这就是说 $2^{2^n} + 1$ 的素因数都不可能是 $2^{2^n} - 1$ 的因数, 因此由假设可知 $2^{2^{n+1}} + 1$ 至少要有 $n + 1$ 个不同的素因数. 因而由数学归纳法就证明了要证的结果.

(AMM E2227)

3. 求出 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, \cdots, C_{2n}^{2n-1}$ 的最大公因数.

解　从熟知的公式

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$$

可知 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, \cdots, C_{2n}^{2n-1}$ 的最大公因数必须具有 2^m 的形式. 如果 $n = 2^k q$, 其中 q 是一个奇数, 那么由 $C_{2n}^1 = 2^{k+1}q$ 可知它们的最大公因数不可能大于 2^{k+1}. 现在我们证明它们的最大公因数就是 2^{k+1}. 为此, 将 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, \cdots, C_{2n}^{2n-1}$ 之中的每一个数写成

$$C_{2n}^m = C_{2^{k+1}q}^m = \frac{2^{k+1}q}{m} C_{2^kq-1}^{m-1}$$

由于二项式系数是整数, 并且 m 是奇数, 因此从上式就得出

$$C_{2n}^m = C_{2^{k+1}q}^m = 2^{k+1}M$$

其中 M 是一个整数, 而 $m = 1, 3, \cdots, 2n-1$. 这就证明了 2^{k+1} 就是 $C_{2n}^1, C_{2n}^3, \cdots, C_{2n}^{2n-1}$ 的最大公因数.

(AMM R1967)

4. 证明: 对任意正整数 a, b, 集合 $\{ma + nb\}$ (m, n 是正整数) 包含了 (a, b) 的大于或等于 $[a, b]$ 的所有倍数. 并证明: 这是可能的最好的结果.

证明 设 $d = (a, b)$, 因此 $a = ud, b = vd$. 那么我们就可以看出 $(mu + nv)d$ 给出了所有 d 的大于 uvd 的倍数. 约去因数 d, 我们看出这就等价于如果 $(u, v) = 1$, 那么 $mu + nv$ 就给出了所有大于 uv 的正整数.

我们首先看出 $mu + nv$ 并不给出 uv. $mu + nv = uv$ 的一般解是 $m = v(1 - \lambda), n = \lambda u$ (λ 是整数). 而 λ 不可能选的对 u, v 都是正的.

现在我们证明 $mu + nv = uv + k$ ($k > 0$) 存在正解. 由欧几里得算法, 方程 $m_0 u + n_0 v = k$ 有整数解 m_0, n_0. 如果都是正的, 那么命题已得证. 否则可设 $m_0 > 0, n_0 < 0$, 其余的解可从 m_0 减去 λv 和从 n_0 加上 λu 得出, 因此我们可设 $n_0 > -u$. 现在 $m = m_0, n = n_0 + u$ 就是 $mu + nv = uv + k$ ($k > 0$) 的正整数解.

注 这个问题实际上是证明了所谓弗洛班尼乌斯问题的一个特例.

(AMM E2005)

5. 设 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 是不同的素数, n 是一个正整数, $k = p_1 p_2 \cdots p_m$, 证明: 存在非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 使得 $\sum_{i=1}^{m} a_n p_m = C_{kn-1}^{k-1} - 1$.

证明 我们断言: 如果 M 是任意大于或等于 k 的整数, 那么存在非负整数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 使得

$$\sum_{i=1}^{m} a_i p_i = M, m > 1$$

$m = 2$ 的情况已由问题 $E1967$ 证明(见上题). 如果对 m 这一断言是正确的,那么 $k = p_1 p_2 \cdots p_m$ 是 p 的具有非负系数的线性组合. 但是 k 和 p_{m+1} 是互素的,因此任意大于等于 kp_{m+1} 的数也是 $(m+1)p$ 的线性组合,因此由归纳法对所有 $m \geqslant 2$ 已证明了这一断言.

如果 $n > 1$, $C_{kn-1}^{k-1} - 1 \geqslant kn - 1 \geqslant k$,因而由刚才证明的断言知要证的命题对 $m > 1$ 成立.

如果 $m = 1$,那么在模 p 下

$$C_{pn-1}^{p-1} = \frac{(pn-1)(pn-2)\cdots(pn-p+1)}{(p-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (p-1)}{(p-1)!} = 1$$

因此 $$C_{pn-1}^{p-1} - 1 = ap$$

(AMM E2229)

6. 对任意两个正整数 a, b,都存在它们的最大公因数 (a, b) 和最小公倍数 $[a, b] = \frac{ab}{(a, b)}$,是否可以把这个关系推广到多个正整数的情况?并且用有限个正整数的有限个最大公因数来表出它们的最小公倍数?

解法1 对一个 n 个正整数的集合,用 P_j 表示 C_n^j 个每 j 个正整数的最大公因数,那么,它们的最小公倍数就由 $\frac{P_1 P_3 P_5 \cdots}{P_2 P_4 P_6 \cdots}$ 给出. 例如对 $n = 3$,有

$$[x, y, z] = \frac{x \cdot y \cdot z(x, y, z)}{(x, y)(y, z)(x, z)}$$

为证明这一点,考虑一个任意的素数 p,所谓任意的意思是不管它是否在 n 的所有的因子或某个因子的素因子分解式中出现. 设在它出现的非负整数中他的幂次为 $e_n \leqslant e_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant e_1$,那么在 P_j 中 p 将在 C_{t-1}^{j-1} 种情况中具有指数 $e^t (t = 1, 2, \cdots, n)$,那么 p 在 $\frac{P_1 P_3 P_5 \cdots}{P_2 P_4 P_6 \cdots}$ 中的总指数将是 e_1,由于除了 $C_0^0 = 1$ 之外,二项式系数的交错和是零. 那样,标准的公式即可从最大公因数和最小公倍数是积性函数得出.

解法2 在任何交换的格序群中(见 Garrett Birkhoff, Lattice Theory, AMM Colloquium Vol. 25, Chap 13),我们有

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = [\bigwedge_{i=1}^{n} a_i^{-1}]^{-1} = [\prod_{j=1}^{n} a_j][\bigwedge_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} a_j]^{-1}$$

其中正的关系是带有如下偏序的通常的乘法,当且仅当 $\frac{s}{r}$ 是一个整数时,$r \leqslant s$.

在以上的定义下整数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 构成一个交换的格序群.在这种情况下,我们有

$$\bigvee_{i=1}^{m} x_i = [x_1, x_2, \cdots, x_m], \bigwedge_{i=1}^{m} x_i = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

(*ibid.*, *example* 6,293).因此

$$\bigvee_{i=1}^{n} a_i = [\bigwedge_{i=1}^{n} a_i^{-1}]^{-1} = [\prod_{j=1}^{n} a_j][\bigwedge_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} a_j]^{-1}$$

式就给出了问题的解.例如

$$[a, b, c] = \frac{abc}{(ab, bc, ac)}$$

$$[a, b, c, d] = \frac{abcd}{(abc, abd, acd, bcd)}$$

注 其他类型的解也可应用交换格序群的理论从 $\bigvee_{i=1}^{n} a_i = [\bigwedge_{i=1}^{n} a_i^{-1}]^{-1} = [\prod_{j=1}^{n} a_j][\bigwedge_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} a_j]^{-1}$ 式得出,例如

$$[a, b, c] = \frac{abc}{(a(b, c), bc)} = \frac{abc}{(a(b, c), b(c, a), c(a, b))} = \frac{abc(a, b, c)}{(a, b)(b, c)(a, c)}$$

等.

(AMM E3300)

7. 设 **N** 是正整数的集合,证明:恰存在一个 $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 的映射 f,对任意 $x, y \in \mathbf{N}$,f 具有性质:

(1) $f(x, y) = f(y, x)$.

(2) $f(x, x) = x$.

(3) $(y - x)f(x, y) = yf(x, y - x)$, $y > x$.

证明 我们证明具有所给性质的函数 $f(x, y)$ 只能是 x, y 的最小公倍数.

性质 (3) 可以写成等价的形式如下

$$\frac{f(x, y)}{xy} = \frac{f(x, y - x)}{x(y - x)}, y > x$$

反复应用以上等式,直至 $y < qx$ 时,再应用性质(1),然后再反复应用以上等式,……,这相当于一个对 x, y 做辗转相除法直至求

出它们的最大公因数 $d=(x,y)$ 的过程,因此最后应用性质(2),我们就有

$$\frac{f(x,y)}{xy}=\frac{f(x,y-x)}{x(y-x)}=\cdots=\frac{f(d,d)}{d^2}=\frac{1}{d}$$

因而 $f(x,y)=\frac{xy}{d}=[x,y]$ 是 x,y 的最小公倍数.

(AMM E3288)

8. 确定 (a^m-1,a^n+1) 和 (a^m+1,a^n+1),其中 m,n 和 $a>1$ 都是正整数.

解法1 设 $g=(a^m+1,a^n+1)$,则解答是

$$g=\begin{cases}a^{(m,n)}+1,\text{如果}\frac{mn}{(m,n)^2}\text{是奇数}\\ 1,\text{如果}\frac{mn}{(m,n)^2}\text{是偶数并且 }a\text{ 是偶数}\\ 2,\text{如果}\frac{mn}{(m,n)^2}\text{是偶数并且 }a\text{ 是奇数}\end{cases}$$

我们首先证明一个引理:如果 $(m,n)=1$,$m>n$,并且 $e,f=\pm1$,那么由于 $(a^n,a^n\pm1)=1$,所以

$$(a^m+e,a^n+f)=(a^m+e-ef(a^n+f),a^n+f)=$$
$$(a^m-efa^n,a^n+f)=(a^{m-n}-ef,a^n+f)$$

注意仅当 e 和 f 是 -1 时,$-ef$ 和 f 是 -1.

当 $(m,n)=1$ 时,反复应用引理就得出 g 或者等于 $(a+1,a+1)$ 或者等于 $(a+1,a-1)$,因此 $g=a+1$ 或 $g=1$ 或 $g=2$. 如果 k 是奇数,那么 $a+1$ 整除 a^k+1;因此如果 m,n 都是奇数,那么 $g=(a+1,a+1)=a+1$. 但是如果是偶数,那么 $a+1$ 整除 a^k-1;因此除非 $a=1$,$a+1$ 不是 a^k+1 的因数,因而如果 m 或 n 是偶数,那么 $g=(a+1,a-1)$. 但是如果 a 是偶数,$(a+1,a-1)=1$,而如果 a 是奇数,$(a+1,a-1)=2$.

现在设 $d=(m,n)$ 并且注意 $(a^m+1,a^n+1)=((a^d)^{\frac{m}{d}}+1,(a^d)^{\frac{n}{d}}+1)$ 以及 $\left(\frac{m}{d},\frac{n}{d}\right)=1$,由此即可得出解.

解法2 设 2^i 和 2^j 分别是2的整除 m 和 n 的最高次幂,那么

$$d=(a^m+1,a^n+1)=\begin{cases}a^{(m,n)+1},i=j\\ 1\quad,i\neq j,2\mid a\\ 2\quad,i\neq j,2\nmid a\end{cases}$$

$$d'=(a^m-1,a^n+1)=\begin{cases}a^{(m,n)+1},i>j\\ 1\quad,i\leqslant j,2\mid a\\ 2\quad,i\leqslant j,2\nmid a\end{cases}$$

由于确定 d 和 d' 的技巧是类似的，因此以下我们仅证明关于 d 的公式.

设 $b = a^{(m,n)}$，$r = \frac{m}{(m,n)}$，$s = \frac{n}{(m,n)}$，那么

$$d = (b^r + 1, b^s + 1), (r,s) = 1$$

由于 $(r,s) = 1$，故存在 e 和 f 使得

$$|er - fs| = 1$$

如果 $i = j$，那么 r 和 s 都是奇的，因此由对称性可设 $er - fs = 1$，e 是奇数，f 是偶数. 从 $b^r \equiv b^s \equiv -1 \pmod d$ 我们有 $(b^r)^e = ud - 1$ 以及 $(b^s)^f = vd + 1$，其中 u 和 v 都是整数. 那样 $ud - 1 = (vd + 1)b$，这蕴含 $d \mid (b + 1)$. 由于 r 和 s 都是奇的，故 $(b + 1) \mid (b^r + 1)$，$(b + 1) \mid (b^s + 1)$，这就意味着 $d = b + 1$.

如果 $i \neq j$，那么 r 和 s 的奇偶性不同. 由对称性可设 r 是偶数而 s 是奇数. 那样 $(b^r)^e = yd - 1$ 以及 $(b^s)^f = zd + 1$，其中 y 和 z 都是整数. 因此 $yd - 1 = zd + 1$，这蕴含 $d \mid 2$，由于仅当 a 是奇数时，$2 \mid d$，这就证明了所需的结果.

注 Allan Pedersen 和 O.P. Lossers 注意到

$$(a^m - 1, a^n + 1) = (a^m + a^n, a^n + 1) = (a^{|m-n|}, a^n + 1)$$

因此关于 d' 的公式可从 d 的公式导出.

9. 计算 $f(n) = \gcd(k^n - k \mid k = 2,3,4,\cdots)$，特别证明 $f(2n) = 2$. (AMM E2901)

解 (1) 对任意素数 p，由于当 $k = p$ 时，$p^2 \nmid k(k^{n-1} - 1)$，故 $f(n)$ 不可能含有因子 p^2.

(2) 对任意 n，$2 \mid f(n)$.

(3) 如果 p 是一个奇素数并且 a 是模 p 的原根，那么当且仅当 $(p - 1) \mid (n - 1)$ 时，$p \mid a(a^{n-1} - 1)$. 另一方面，如果 $(p - 1) \mid (n - 1)$，那么对每个 k，$p \mid (k^n - k)$. 那样如果 P 是不同的使得 $(p - 1) \mid (n - 1)$ 的奇素数的乘积，则 $f(n) = 2P$.（特别，对每个奇数 n，$6 \mid f(n)$）

(4) 对每个奇素数 p，$(p - 1)$ 不是 $2n - 1$ 的因子，因此 $f(2n) = 2$.

(AMM E1997)

10. 证明:如果 P 是 n 个不同的素数的乘积,那么就存在 n 个不同的正整数 $a_i, i=1,2,\cdots,n$,使得

$$P-1=\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$$

其中 σ_i 是 a_i 的 n 个初等对称多项式.

证明 $$P=\prod_{i=1}^{n}p_i=\prod_{i=1}^{n}((p_i-1)+1)=\prod_{i=1}^{n}a_i=$$
$$1+\sum a_1+\sum a_1a_2+\cdots+\sum a_1a_2\cdots a_n=$$
$$1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n$$

其中 p_i 是 P 的素因数,而 $a_i=p_i-1$.由于 P 的素因子分解式是唯一的,因此 a_i 也是不同的和唯一的.

(AMM 4753)

11. 是否存在一个大于31的整数,使得这个整数可以用不只一种方法表示为

$$\frac{a^m-1}{a-1}$$

的形式,其中 a,m 都是整数,并且 $m>2$?

解 $$8\ 191=\frac{2^{13}-1}{2-1}=\frac{90^3-1}{90-1}$$

(AMM 5634)

12. 求出方程式 $\sum_{i=1}^{n}i=\sum_{i=1}^{r}i^2$ 的所有整数解.

解 所给的方程等价于

$$3(n^2+n)=r(r+1)(2r+1)$$

通过检验,我们发现下列几组解

$$(n,r)=(1,1),(10,5),(13,6),(645,85)$$

注 提出者已把这个问题化为去求不定方程 $y^2=x^3-9x+81$ 的能被3整除的奇的整数解的问题.尽管已知这个方程的某些解,但是这些解并不能导致发现原方程的新的整数解.

(AMM 10376)

13. 求出方程式 $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=y^2-1$ 的所有整数解.

解 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$,则

$$\sqrt{64f(x)}=8x^3\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x}\right)\left(1+\frac{4}{x}\right)\left(1+\frac{5}{x}\right)+\frac{1}{x^6}}=$$

$$8x^3\sqrt{1+\frac{15}{x}+\frac{85}{x^2}+\frac{225}{x^3}+o(x^{-4})}=$$

$$8x^3+60x^2+115x+37.5+o(x^{-1})$$

上式说明对充分大的 x,$64f(x)$ 将介于$(8x^3+60x^2+115x+37)^2$ 和$(8x^3+60x^2+115x+38)^2$之间,即两个连续的完全平方数之间,因此不可能是一个完全平方数.这就是说,不定方程 $f(x)=y^2$ 的整数解是有限的.为了求出这些整数解,下面更精确地定出整数解的范围.由直接计算可知

$$(8x^3+60x^2+115x+38)^2-64f(x)=$$

$$8x^3+249x^2+1\,060x+1\,380=g_1(x)$$

$$64f(x)-(8x^3+60x^2+115x+37)^2=$$

$$8x^3-129x^2-830x-1\,305=g_2(x)$$

显然当 $x>0$ 时,$g_1(x)>0$,而由不等式的计算及证明可知当 $x\geqslant 22$ 时,$g_2(x)>0$.因而原方程的整数解都在范围 $|x|\leqslant 21$ 之内.由此经过实际验算可知原方程除了平凡解

$$x=-5,-4,-3,-2,-1,0,y=\pm 1$$

之外,其余的整数解只有$(x,y)=(-7,\pm 71)$及$(2,\pm 71)$.

注 由于 $f(-x)=f(x-5)$,因此验证时,只须对正数进行即可.

14.(1)证明:如果 p 是一个素数,那么 2^p+3^p 不是一个完全方幂.

(2)求出所有使得 2^m+3^n 是一个完全平方幂的正整数. (AMM E2396)

证明 (1)如果 $p=2$,那么 $2^2+3^2=13$ 不是一个完全方幂.假设 p 是一个奇数,那么

$$2^p+3^p=(2+3)\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k2^{p-1-k}3^k$$

由于 $3\equiv -2\pmod 5$,因此

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k2^{p-1-k}3^k\equiv\sum_{k=0}^{p-1}2^{p-1}\equiv 2^{p-1}p\pmod 5$$

如果 $p\neq 5$,那么 $2^p+3^p=5k$,其中 $k\not\equiv 0\pmod 5$,因此 2^p+3^p 不是一个完全方幂.如果 $p=5$,那么 $2^p+3^p=2^5+3^5=275$ 显然也不是一个完全方幂,这就证明了(1).

(2)假设 $2^m+3^n=t^2$.我们注意对所有的 t,$t^2\equiv 0$ 或 $1\pmod 3$,因此 m 不可能是奇的.由于对所有的 m,$2^m\equiv$

2(mod 3). 特别 $m \geqslant 2$. 但是 t^2 是奇的, 并且是奇数的平方, 因此必须满足 $t^2 \equiv 1 \pmod 4$. 由于 $2^m \equiv 0 \pmod 4$, 这就得出 $3^n \equiv 1 \pmod 4$, 因此 n 必须是偶数. 设 $n = 2q$, 那么 $2^m = (t+3^q)(t-3^q)$. 由于在此式中, 两个因数之和是 $2t$, 并且 t 是奇数, 因此可以同时整除两个因数的2的最高次幂就是2本身. 因而 $t-3^q=2$, $t+3^q=2^{m-1}$, 把第一式代入第二式并两边除以2得出 $3^q+1=2^{m-2}$. 然而 m 是偶数并且显然 $m \neq 2$, 因而 $3^q+1 \equiv 0 \pmod 4$, 由此得出 q 是奇数. 如果 $q>1$, 我们将有

$$3^q+1=(3+1)\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k 3^{q-1-k}$$

这是一个大于1的奇数的4倍. 这不可能, 因此 $q=1$, 而(2)的唯一的解是 $m=4, n=2$.

(AMM 5318)

15. 证明: 只存在有限个正整数 n, 使得 $n!$ 是两个平方数之和.

证明 仅当 $p^2 \mid a^2+b^2$ 时, 形如 $4m+3$ 的素数 $p \mid a^2+b^2$. 当 $n \geqslant 7$ 时, 存在素数 $p \equiv 3 \pmod 4$ 使得 $\frac{n}{2}<p \leqslant n$. (见 Breusch, Zur Verallgemeinerung des Bertrandschen Postulates dass zwischen x und 2xstets Primzahlen liegen, Math. Zeitschrift 1932, 505.) 那样, 当 $n \geqslant 7$ 时, $n!$ 不可能是两个整数的平方和. 而由于 $3!, 4!, 5!$ 都只含有一个因数3, 因此也不可能是平方和, 那样, 仅有的解只有

$$1!=0^2+1^2, 2!=1^2+1^2, 6!=12^2+24^2$$

(AMM E1286)

16. 证明: 对每一个 $n>2$, 都存在一个正整数 N, 使得 N 可以用两种方式表示成 n 个非负平方数的和.

证明 我们证明

$$N=\sum_{k=0}^{n-2}(2^k-1)^2+(3\cdot 2^{n-1}-1)^2=\sum_{k=2}^{n}(2^k+1)^2+(2^n-4)^2$$

实际上

$$\sum_{k=2}^{n}(2^k+1)^2-\sum_{k=0}^{n-2}(2^k-1)^2=\sum_{k=0}^{n-2}[(4\cdot 2^k+1)^2-(2^k-1)^2]=$$

$$5\sum_{k=0}^{n-2}(3\cdot 2^{2k}+2^{k+1})=5(2^{2n-2}-1+2^n-2)=$$

$$(5\cdot 2^{n-1}-5)(2^{n-1}+3)=(3\cdot 2^{n-1}-1)^2-(2^n-4)^2$$

(AMM 10213)

17. 设 x,y 是正整数，$x+xy$ 和 $y+xy$ 都是完全平方数.

(1) 证明：x 和 y 之中恰有一个是完全平方数.

(2) 给出所有那种整数 x,y 的对的特征.

解 (1) 首先注意 x 和 y 不可能都是完全平方数. 设 x 是完全平方数，那么由于 $x+xy=x(y+1)$ 是完全平方数，因此 $y+1$ 是完全平方数，如果 y 也是完全平方数，那么将有两个相邻的正整数都是完全平方数，这不可能. 这也同时证明了如果 x 和 $x+1$ 之中有一个是完全平方数，那么 x 和 y 之中就恰有一个是完全平方数.

现在假设 x 和 $x+1$ 都不是完全平方数，那么析出他们之中的平方因子后可设 $x=ac^2$ 和 $x+1=bd^2$，其中 a 和 c 都不是完全平方数. 那么由假设可知 $ac^2(y+1)=x+xy$ 和 $bd^2y=y+xy$ 都是完全平方数. 因而 $y+1=au^2$，$y=bv^2$. 由此得出

$$au^2-bv^2=1,ac^2-bd^2=-1$$

由此又得出

$$(auc+bvd)^2-ab(cv+ud)^2=$$
$$(au^2-bv^2)(ac^2-bd^2)=-1$$

注意 ab 不是完全平方数而且是互素的，因此 $X^2-abY^2=-1$ 是一个负的佩尔(Pell)方程，上式说明这个佩尔方程有整数解. 由佩尔方程的理论可知 $X^2-abY^2=1$ 总有整数解，于是可设

$$r^2-abs^2=1,r+s\sqrt{ab}=(p+q\sqrt{ab})^2$$

则
$$p^2-abq^2=\pm 1$$

注意由 $ac^2-bd^2=-1$ 可得

$$(2x+1)^2-ab(2cd)^2=(2ac^2+1)^2-ab(2cd)^2=$$
$$4a^2c^4+1+4ac^2(1-bd^2)=$$
$$4a^2c^4+1-ac^2\cdot 4ac^2=1$$

因此可取 $r=2x+1$，$s=2cd$，于是由

$$r+s\sqrt{ab}=(p+q\sqrt{ab})^2$$

可得
$$p^2+abq^2=2x+1$$

与 $p^2-abq^2=\pm 1$ 联立给出 $x+1=p^2$ 或 $x=p^2$，这与我们假设 x 和 $x+1$ 都不是完全平方数矛盾. 这个矛盾就说明 x 和 $x+1$ 之中必有一个是完全平方数.

(2) 由对称性，可设 $x=s^2$ 是完全平方数，那么 $y+1=u^2$ 也是完全平方数. 又 $y+xy=(x+1)y=(s^2+1)(u^2-1)$ 是完全平方数. 设 k 是 s^2+1 和 u^2-1 的最大公因数，那么

$$s^2+1=kt^2,u^2-1=kv^2$$

那样，s,t 就给出负佩尔方程 $s^2-kt^2=-1$ 的整数解. 由佩尔方程的理论可知，对给定的 k，方程 $s^2-kt^2=-1$ 或者无解或者有无穷多组整数解. 反过来，如果对 k，可求出满足方程组 $s^2+1=kt^2$，$u^2-1=kv^2$ 的 s,t,u,v，那么 $x=s^2$，$y=kv^2$ 就具有所需的性质.

(AMM E2606)

18. 证明：存在无穷多个整数 n 使得 $2n+1$ 和 $3n+1$ 都是完全平方数，并且那种 n 必是 40 的倍数.

证明 从方程 $2n+1=x^2$，$3n+1=y^2$ 中消去 n 就得到

$$3x^2-2y^2=1$$

单位模变换 $x=u+2v$，$y=u+3v$，把上面的方程变为佩尔方程

$$u^2-6v^2=1$$

从佩尔方程的理论可知其所有的非负整数解为

$$u_k+v_k\sqrt{6}=(5+2\sqrt{6})^k,k=0,1,2,\cdots$$

此外，$2n+1=x^2$，$3n+1=y^2$ 的任何解 (n,x,y) 必须使 x 是奇数，因而 n 是偶数，y 是奇数，由此得出 $8\mid n$. 最后 $2n+1=x^2$，$3n+1=y^2$ 蕴含 $x^2+y^2\equiv 2(\bmod 5)$，因而 $x^2\equiv y^2\equiv 1(\bmod 5)$，因此 $5\mid n$，再联合 $8\mid n$ 就得出 $40\mid n$.

(AMM 10238)

19. (1) 证明：存在无穷多个正整数 a 使得 $a+1$ 和 $3a+1$ 都是完全平方数.

(2) 设 $a_1<a_2<\cdots$ 是(1)中所有的 a 组成的数列，证明：$a_na_{n+1}+1$ 也是完全平方数.

证明 (1) 设 $a+1=x^2$ 和 $3a+1=y^2$，那么 $y^2-3x^2=-2$. 如果 x 是偶数，那么由 $a+1=x^2$ 可知 $a\equiv -1\equiv 3(\bmod 4)$，因此 $3a+1\equiv 10\equiv 2(\bmod 4)$，这与 $3a+1=y^2$ 矛盾，因此 x 必须是奇数. 如果 y 是偶数，那么由 $3a+1=y^2$ 可知 $3a\equiv -1\equiv 3(\bmod 4)$，由于 $(3,4)=1$，因此由此得出 $a\equiv 1(\bmod 4)$，故 $a+1\equiv 2(\bmod 4)$，而这与 $a+1=x^2$ 矛盾. 因此 y 也必须是奇数，这样 $y^2-3x^2=-2$ 可写成

$$\left(\frac{3x-y}{2}\right)^2-3\left(\frac{y-x}{2}\right)^2=1$$

我们只考虑 x 和 y 都是正整数的解. 那么显然 $x\leqslant y\leqslant 3x$，因此 $u=\frac{3x-y}{2}$，$v=\frac{y-x}{2}$ 满足佩尔方程 $u^2-3v^2=1$. 这个方程的最小解是 $(u_1,v_1)=(2,1)$，因而其所有的整数解是

$$u_n \pm v_n\sqrt{3} = (u_1 \pm v_1\sqrt{3})^n = (2 \pm \sqrt{3})^n$$

令 $\alpha = 2 + \sqrt{3}, \beta = 2 - \sqrt{3}$，则

$$u_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}, v_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{3}}$$

设 $$a_n = x_n^2 - 1 = (u_n + v_n)^2 - 1 = \frac{\alpha^{2n+1} - 4 + \beta^{2n+1}}{6}$$

我们就得出了(1)中的无穷多组解.

(2)由计算得出

$$a_na_{n+1} + 1 = \left(\frac{\alpha^{2n+2} - 8 + \beta^{2n+2}}{6}\right)^2$$

由于 x_n 是整数，故 a_n 因而 $a_na_{n+1} + 1$ 也是整数，这就证明了(2).

注 我们也可以利用循环关系来证明(从而避免使用佩尔方程)，实际上可以证明

(1) $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n + 8$ 这就证明了(1).

(2) $a_na_{n+1} + 1 = \left(\frac{a_n + a_{n+1}}{4} - 1\right)^2$，这就证明了(2).

(AMM 10879)

20. 对正整数 $m \geqslant 1$，设 S_m 是所有使得 $(m^2 - 1)n + 1$ 和 $m^2n + 1$ 都是完全平方数的正整数 n 的集合. 证明：S_m 是非空的无限集合，并且求出 S_m 的最大公因数.

证明 首先注意

$$(m^2 - 1)(16m^2 - 8) + 1 = (4m^2 - 3)^2$$

$$m^2(16m^2 - 8) + 1 = (4m^2 - 1)^2$$

这就得出 $16m^2 - 8 \in S_m$，因此 S_m 是非空的.

下面我们证明 S_m 是无限集，并且 $16m^2 - 8$ 整除 S_m 的所有元素，因此 $16m^2 - 8$ 就是 S_m 的最大公因数.

为此，我们证明

$$S_m = \{n_k\}, k = 1, 2, \cdots$$

其中 $$n_0 = 0, n_1 = 16m^2 - 8$$

$$n_{k+2} = (16m^4 - 16m^2 + 2)n_{k+1} - n_k + 16m^2 - 8, k \geqslant 2$$

由递推关系和初条件容易得出 $16m^2 - 8$ 整除所有的 n_k.

对 $n \in S_m$，存在整数 x 和 y 使得

$$x^2 = (m^2 - 1)n + 1$$

$$y^2 = m^2n + 1$$

因而 $$(mx)^2 - (m^2 - 1)y^2 = 1$$

即 mx 和 y 是佩尔方程 $r^2 - (m^2 - 1)s^2 = 1$ 的解，反过来，如果 r，

s 是 $r^2-(m^2-1)s^2=1$ 的正整数解,且 $m\mid r$.那么令 $n=\frac{s^2-1}{m^2}$,就得出 $n\in S_m$.

佩尔方程 $r^2-(m^2-1)s^2=1$ 的所有解由

$$r_j+s_j\sqrt{m^2-1}=(m+\sqrt{m^2-1})^j$$

给出.设 $\lambda=\sqrt{m^2-1}$,则

$$r_j+s_j\lambda=(m+\lambda)^j$$

由于
$$s_j=\sum_{i=0}^{[\frac{j}{2}]}C_j^{2i}m^{j-2i}(m^2-1)^i$$

所以我们有当且仅当 j 是奇数时,$m\mid r_j$.对 $j=2k+1,k\geqslant 0$,我们有

$$s_{2k+1}=\frac{(m+\lambda)^{2k+1}-(m-\lambda)^{2k+1}}{2\lambda}$$

特别 $s_1=1,s_3=4m^2-1$.注意,$(m\pm\lambda)^2=2m^2-1\pm 2m\lambda$,分别用 α 和 β 表示这两个数,那么我们有 $\alpha^2=a+b\lambda,\beta^2=a-b\lambda$,其中

$$a=8m^4-8m^2+1,b=8m^3-4m$$

因而
$$4(m^2-1)s_{2k+1}^2+2=\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1}=\alpha(a+b\lambda)^k+\beta(a-b\lambda)^k$$

设 $\mu_k=2(m^2-1)s_{2k+1}^2+1$,并注意 $a^2-(m^2-1)b^2=1$,就可得出

$$\mu_0=2m^2-1,\mu_1=32m^6-48m^4+18m^2-1$$

$$\mu_{k+2}-2a\mu_{k+1}+\mu_k=0,k\geqslant 0$$

这样,我们实际上已证明了 S_m 由所有的由关系式

$$m^2n_k+1=s_{2k+1}^2=\frac{\mu_k-1}{2m^2-2}$$

所给出的正整数 $\{n_k\},k=1,2,\cdots$ 组成.利用

$$\mu_k=2m^2(m^2-1)n_k+2m^2-1$$

和 μ_k 的初条件和递推关系就可得出 n_k 所满足的初条件和递推关系.

21.证明:有无穷多组正整数 $\{a,b,c\}$ 使得 a,b,c 成等差数列,并且使得 $ab+1,bc+1$ 和 $ca+1$ 都是完全平方数.

(AMM 10622)

证法1 设 $a_0=1,a_1=4,a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$,又设 $b_n=2a_{n+1}$ 和 $c_n=a_{n+2}$.那么由递推关系可得 $c_n-b_n=b_n-a_n$,因此对任意正整数 n,正整数 a_n,b_n,c_n 构成等差数列.

对 $n=0$，我们有

$$a_0a_2+1=1\cdot 15+1=4^2=a_1^2$$

又假设 $a_{n-1}a_{n+1}+1=a_n^2$，那么

$$a_na_{n+2}+1=a_n(4a_{n+1}-a_n)+1=4a_na_{n+1}-a_n^2+1=$$
$$4a_na_{n+1}-a_{n-1}a_{n+1}=a_{n+1}^2$$

因此由数学归纳法便证明了对一切整数 $n\geqslant 0$，成立 $a_na_{n+2}+1=a_{n+1}^2$，因此

$$a_nb_n+1=2a_na_{n+1}+1=2a_na_{n+1}+a_{n+1}^2-a_na_{n+2}=$$
$$a_{n+1}^2-a_n(a_{n+2}-2a_{n+1})=$$
$$a_{n+1}^2-a_n(2a_{n+1}-2a_n)=(a_{n+1}-a_n)^2$$

同理可证 $$b_nc_n+1=(a_{n+2}-a_{n+1})^2$$

证法2 在整环 $Z[\sqrt{3}]$（即由所有形如 $r+s\sqrt{3}$ 的数构成的集合，其中 r 和 s 都是整数）中，模 $\|r+s\sqrt{3}\|=r^2-3s^2$ 是可乘的，且 $\|2+\sqrt{3}\|=1$，因此 $\|(2+\sqrt{3})^n\|=1$，那样如果设 $(2+\sqrt{3})^n=r+s\sqrt{3}$，则有 $3s^2=r^2-1$，由此可得对 $n>1$，数 $\{a,b,c\}=\{2s-r,2s,2s+r\}$ 构成等差数列，且

$$(2s-r)2s+1=(r-s)^2,(2s-r)(2s+r)+1=s^2$$

以及 $$2s(3s+r)+1=(r+s)^2$$

22. 证明：各边都是整数的直角三角形的面积不可能是一个完全平方数.（W. S. Anglin, The square pyramid puzzle, AMM Vol.97(1990), NO.2:120-124）

证明 假设存在那种直角三角形，那么那种三角形中必有一个面积最小者，设其面积为 w^2，并设 x,y 是此直角三角形的两个直角边. 则根据题意就应有

$$x^2+y^2=z^2,\frac{1}{2}xy=w^2$$

由于 w^2 是最小的，因此 $(x,y)=1$，并且不妨设 x 是奇的，y 是偶的. 由熟知的关于勾股数的定理可知 x,y 必可表示成

$$x=r^2-s^2,y=2rs,(r,s)=1,r>0,s>0$$

的形式. 由此得出

$$rs(r^2-s^2)=rs(r+s)(r-s)=w^2,\frac{s}{4}<s\leqslant w^2$$

由于 $r,s,r+s,r-s$ 两两互素，因此必存在四个正整数 a,b,c,d 使得

$$r=a^2,s=b^2,a^2-b^2=r-s=c^2,a^2+b^2=r+s=d^2$$

由于 r,s 互素，因此 c,d 互素. 此外，由于 r,s 具有不同的奇偶性，因此 c,d 都是奇数. 设

$$A=\frac{d+c}{2},B=\frac{d-c}{2}$$

那么 A,B 是互素的，并且 $A^2+B^2=a^2$. 由于 A,B 之中有一个是偶数，并且

$$\frac{1}{2}AB=\frac{d^2-c^2}{8}=\frac{b^2}{4}=\frac{s}{4}$$

是一个完全平方数，因此以 A,B,a 为边的三角形是一个各边都是整数的直角三角形，而其面积为 $\frac{s}{4}<w^2$，这与 w^2 的最小性矛盾.

> 23. 证明：$2x^4+1$ 不可能是一个完全平方数.（W . S . Anglin , The square pyramid puzzle , AMM Vol .97(1990) , N0.2: 120-124）

证明 设 $2x^4+1=y^2$，其中 (x,y) 是最小的. 那么 y 必须是大于 1 的奇数，因此可设 $y=2s+1$，因而有 $x^4=2s(s+1)$. 如果 s 是奇数，那么 s 和 $2(s+1)$ 是互素的，因此 $s=u^4,2(s+1)=v^4$. 由此得出 $2(u^4+1)=v^4$，u 是奇数，v 是偶数. 这蕴含 $2(1+1)\equiv 0 \pmod 8$，矛盾.

现在设 s 是偶数，那么 $2s$ 和 $s+1$ 是互素的，因此 $2s=u^4,s+1=v^4$. 显然 u 是偶数，v 是大于 1 的奇数，因此可设 $u=2w,v^2=2a+1$，那么

$$\frac{u^4}{2}+1=s+1=v^4$$

因此
$$2w^4=\frac{v^4-1}{4}=a(a+1)$$

由于 $v^2=2a+1$，在模 4 下取同余就得出 a 是偶数. 由 $2w^4=a(a+1)$，$(a,a+1)=1$ 得出 $a=2b^4,a+1=c^4$. 这蕴含 $2b^4+1=(c^2)^2$ 以及 $y\leqslant c^2$（由 (x,y) 的最小性）. 但是另一方面又有 $c^2\leqslant a+1<v^2\leqslant s+1<y$，矛盾.

这就证明了 $2x^4+1$ 不可能是一个完全平方数.

> 24. 证明：恰存在一个正整数，即 1 使得 $8x^4+1$ 是一个完全平方数.（W . S . Anglin , The square pyramid puzzle , AMM Vol. 97(1990) , N0.2:120-124）

证明 设 $8x^4+1=(2s+1)^2$，那么 $2x^4=s(s+1)$. 如果 s 是偶数，则存在整数 u,v 使得 $s=2u^4,s+1=v^4$，这时 $2u^4+1=$

$s+1=v^4$，因而由上一题的证明可知必有 $u=0$，故 $x=0$. 如果 s 是奇数，则存在整数 u,v 使得 $s=u^4$，$s+1=2v^4$. 这时，$u^4+1=2v^4$. 由于 u 是奇数，考虑模 4 给出的同余可知 v 也是奇数. 两边平方得出

$$4v^8-4u^4=u^8-2u^4+1$$

因此

$$(v^4-u^2)(v^4+v^2)=\left(\frac{u^4-1}{2}\right)^2$$

是一个整数的平方. 由于 v^4 和 u^2 是互素的，这就得出 $\frac{v^4-u^2}{2}$ 和 $\frac{v^4+u^2}{2}$ 都是整数的平方. 现在

$$(v^2-u)^2+(v^2+u)^2=4\cdot\frac{v^4+u^2}{2}=A^2$$

$$\frac{(v^2-u)(v^2+u)}{2}=\frac{v^4-u^2}{2}=B^2$$

由上面关于勾股数的问题的证明可知这是不可能的，除非 $v^2=\pm u$. 由于 $u^4+1=2v^4$，我们就得出 $u^4-2u^2+1=0$，因此 $u^2=1$，由此得出 $s=1$，$x=\pm 1$.

(AMM 6619)

25. 设 $N=4^h(8k+7)$，其中 h,k 是非负整数.

证明：(1) 存在无穷多个不同的 5 个正整数的有序对 (a,b,c,d,e) 使得

$$N=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{1+abcde}$$

但是(2) 不存在 4 个正整数的有序对 (a,b,c,d) 使得

$$N=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{1+abcd}$$

证明 (1) 众所周知 N 不能表示为三个非负整数的平方和，以及每个非负整数都可表示为四个非负整数的平方和(拉格朗日定理). 同时易证 $N\geqslant 7$.

设 (a,b,c,d,e) 使得

$$N=\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{1+abcde},0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant e，且\ b>0$$

我们证明必存在整数 $a'>a$ 使得 (a',b,c,d,e) 也具有所给的性质，显然

$$a^2-(Nbcde)a+(b^2+c^2+d^2+e^2-N)=0$$

是一个 a 的首一二次方程，其一个根就是 a，其另一个根

$$a'=Nbcde-a$$

是一个使得 (a',b,c,d,e) 也具有所给的性质的整数. 如果 $a'\leqslant$

a，那么

$$2a \geqslant Nbcde \geqslant 7b > 2b \geqslant 2a$$

矛盾，因此必有 $a' > a$．现在由拉格朗日定理有

$$N = \frac{0^2 + b_0^2 + c_0^2 + d_0^2 + e_0^2}{1 + 0 \cdot b_0c_0d_0e_0}$$

所以我们有一个初始的5个具有所给性质的非负整数对，由已证的结果可知，这又得出一个新的具有所给性质的5正整数对 $(a_0, b_0, c_0, d_0, e_0)$，重复上述结果就可得出无穷多个这种整数对．

(2) 假设存在四个正整数 (a, b, c, d) 具有所给的性质．我们证明必存在一个整数 d'，使得 $0 \leqslant d' < d$，而 (a, b, c, d') 也具有所给的性质．

设 $d' = Nabc - d$，那么由类似于(1)中的论证，我们必可求出一组新的整数对 (a, b, c, d') 也具有所给的性质．

由于 $N(1 + abcd') = a^2 + b^2 + c^2 + d'^2$，因此 d' 必是非负的．假如 $d' \geqslant d$，那么 $2d \leqslant Nabc$，或者

$$2d(1 + abcd) \leqslant abc(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

因而

$$0 < 2d \leqslant abc(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

从 $a \leqslant b \leqslant c$ 我们得出 $d^2 < 3c^2$，因此

$$N + Nabc^2 \leqslant N(1 + abcd) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 6c^2$$

由于 $N \geqslant 7$，这不可能，因此必有 $d' < d$．

由所证的结果可知，我们必可求得一个整数对 (a, b, c, d')，使得 $d' = 0$，并且具有所给的性质，这样 N 可被表示成三个正整数的平方和，矛盾．

26．(1) 设正整数 n 可以表示成 $n = x^2 - ay^2$ 的形式，其中 a 是一个不是平方数的正整数，则 n 可以用无穷多种方式表示成这种形式．

(2) 设 $p \equiv 1 \pmod 8$ 是一个奇素数，证明：p 可以表示成 $p = x^2 - 2y^2$ 的形式，而且如果 $p = x^2 - 2y^2$，那么 x 一定是奇数，y 一定是偶数．

(3) 一个正整数 n 如果具有性质：从 $p \mid n$ 可以得出 $p^2 \mid n$，则称 n 是一个幂数，证明：存在无穷多个正整数 $n \neq 1, 4$，可以用无穷多种方式表示成两个互素的幂数之差．

(Andrzej Makowski , On a problem of Golomb powerful numbers , AMM Vol. 79 (1972) , No 9: 763)

证明 (1) 由于 a 不是平方数，因此由佩尔方程的理论可知，存在无穷多组正整数 x_n, y_n 使得 $x_n^2 - ay_n^2 = 1$，因此

$$n = x^2 - ay^2 = (x^2 - ay^2)(x_n^2 - ay_n^2) =$$
$$(x_nx + y_ny)^2 - a(y_nx + x_ny)^2$$

即以无穷多种方式表成了所说的形式.

(2) 由于 $p \equiv 1 \pmod 8$，因此

$$\left(\frac{2y^2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1$$

因而 $x^2 \equiv 2y^2 \pmod p$ 有解，而由于 p 是素数，故 $p = x^2 - 2y^2$. 显然 x 必须是奇数，因而 $x^2 \equiv 1 \pmod 8$，再由 $p \equiv 1 \pmod 8$ 就得出 y 一定是偶数.

(3) 由迪利克雷(Dirichlet) 定理可知由无穷多个奇素数 p 满足 $p \equiv 1 \pmod 8$（也可以直接证明）. 由(2) 可知 $p = x^2 - 2y^2 = (3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2$ 可以用无穷多种方式表示成这种形式. 而且 x 必定是奇数，y 必定是偶数，因此 $p = x^2 - 8z^2$，由于 p 是素数，显然 x^2 和 $8z^2$ 是互素的幂数，因此存在无穷多个数可以用无穷多种方式表示成两个互素的幂数之差.

(AMM 10510)

27. 证明：不定方程 $\frac{x(x+1)}{2} + y^2 = z^3$ 存在无限多组正整数解.

证明 $x = 32n^6 - 1, y = 4n^3, z = 8n^4$ 是一族解.

设 $Q = r^2 - rs + s^2$，那么另一族解是

$$x = -32r^2s^3Q^3t^6 + 4rs(r+s)Q(3rQ + 2rs^2 - s^3)t^4 - 2r^2(r+s)^2t^2$$
$$y = 8r^2s^2(3r^2 - 2rs + s^2)Q^2t^5 + ((s^2 - r^2)^3 - 6rs(r^4 - s^4 + 2s^2Q))t^3 + r(r+s)t$$
$$z = 8r^2s^2Q^2t^4 + (Q + rs)(Q - 3rs)t^2$$

(AMM E2034)

28. 证明：方程组 $a + b + c = x + y, a^3 + b^3 + c^3 = x^3 + y^3$ 存在无限多组正整数解，特别，存在无限多组使得 a, b, c 成等差数列的正整数解.

证明 设 $a = 3d, c = 2b - 3d$，则 $x + y = 3b$，那样第二个方程就成为

$$(x - y)^2 = (b - 8d)^2 - 40d^2$$

它有一组解是 $x - y = p^2 - 10q^2, b - 8d = p^2 - 10q^2, d = pq$，因此我们就得到一组双参数的解，并且其中 a, b, c 构成等差数列.

$$a = 3pq, b = p^2 + 8pq + q^2, c = 2p^2 + 13pq + 20q^2$$
$$x = 2p^2 + 12pq + 10q^2, y = p^2 + 12pq + 20q^2$$

注 Wulczyn注意到在 A. Gloden ,Mehrgradige Gleichungen 中给出了另一种双参数解

$$a=2m^2+2n^2, b=3mn-n^2, c=m^2-mn-2n^2$$
$$x=m^2+3mn, y=2m^2-mn-n^2$$

(AMM 5597)

29. 设 t,x,y,u,v 和 w 是非零的不同整数,解不定方程组

$$v^2+w^2=(u^2-t^2)(y^2+x^2)$$
$$v^2-w^2=(u^2+t^2)(y^2-x^2)$$

解 显然,所给的方程组可以写成下面的等价的方程组

$$v^2+t^2x^2=u^2y^2, w^2+t^2y^2=u^2x^2$$

已知 $A^2+B^2=C^2$ 的所有解可以由 $A=a^2-b^2, B=2ab, C=a^2+b^2$ 或者 $A=2ab, B=a^2-b^2, C=a^2+b^2$ 给出,其中 a,b 是任意整数.因此我们可以给出上述方程组的包含4个参数的解如下

$$v=2a_1b_1, tx=a_1^2-b_1^2, uy=a_1^2+b_1^2$$
$$w=2a_2b_2, ty=a_2^2-b_2^2, ux=a_2^2+b_2^2$$

用 a_1,a_2,b_1,b_2 和 t 来解出 u,x,y 就得出

$$u=\frac{(a_2^2+b_2^2)t}{a_1^2+b_1^2}, x=\frac{a_1^2-b_1^2}{t}, y=\frac{a_1^4-b_1^4}{(a_2^2+b_2^2)t}$$

并且 a_1,a_2,b_1,b_2 必须满足

$$a_2^4+b_1^4=a_1^4+b_2^4$$

这样原方程组的解依赖于求出上述方程的整数解,但是自从欧拉那时以来,这一问题一直尚未解决,然而上述方程的参数解是已知的.

用已知的参数解可以获得满足上述方程的整数 a_1,a_2,b_1,b_2,然后,我们选 $t\neq 0$,并且得出满足方程组 $v^2+t^2x^2=u^2y^2$, $w^2+t^2y^2=u^2x^2$ 的有理数 u,v,t,w,x 和 y,然后再乘以分母的最小公倍数就可以得出原方程组的整数解.

(AMM E2075)

30. 求出所有使得 $4^x+4^y+4^z$ 是一个完全平方数的整数 x,y,z.

解 如果 $x\leqslant y\leqslant z$,那么 $4^x+4^y+4^z$ 是一个完全平方蕴含存在正整数 m 和正奇数 t 使得

$$1+4^{y-x}+4^{z-x}=(1+2^mt)^2$$

那样
$$4^{y-x}(1+4^{z-y})=2^{m+1}t(1+2^{m-1}t)$$

上式蕴含 $m=2y-2x-1$.由此得出

$$t - 1 = 4^{y-x-1}(4^{x-2y+z+1} - t^2) =$$
$$4^{y-x-1}(2^{x-2y+z+1} + t)(x^{x-2y+z+1} - t)$$

因此必有 $t = 1, z = 2y - x - 1$. 因而仅有的整数解就是 $\{x, y, 2y - x - 1\}$, 其中 x, y 是任意正整数. 由此产生的平方数是 $(2^x + 2^{2y-x-1})^2$.

31. 设 $k \geqslant 2$ 是一个正整数,证明:

(1) 当 $k \equiv 3,4,5 \pmod 8$ 时,或

(2) 当 $k \equiv 7,11,16,20 \pmod{27}$ 时.

不定方程

$$x^2 + (x+1)^2 + \cdots + (x+n-1)^2 =$$
$$y^2 + (y+1)^2 + \cdots + (y+n+k-1)^2 \quad (*)$$

没有整数解.(AMM Vol.71, No7, 749-750, H.L.ALDER, etc, n AND n + k CONSECUTIVE INTEGERS WITH EQUAL SUMS OF SQUARES)

证明 (1) 下表给出了 n 个连续整数的和在模4下的值

n	1	2	3	4	5	6	7	8
S	0,1	1	1,2	2	2,3	3	0,3	0

显然,从 $n = 9$ 开始,下面一行将开始重复并构成一个周期为8的周期叙列. 现在如果 n 个连续整数的平方和能等于 $n+3$ 个连续整数的平方和,那么必将存在某一个 n,使得 S 行中的第 n 列中的集合和第 $n+3$ 列中的集合重合. 然而,从上表中可以看出,对任何 n,这种情况都不可能发生. 由于 S 的周期是8,因此这一论断适合于任何适合 $k \equiv 3 \pmod 8$ 的整数. 同理可证当 $k \equiv 4,5 \pmod 8$ 时,方程 $(*)$ 没有整数解.

(2) 利用前 n 个正整数的平方和公式,可以把方程 $(*)$ 写成

$$nx^2 + n(n-1)x + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} =$$
$$(n+k)y^2 + (n+k)(n+k-1)y +$$
$$\frac{(n+k)(n+k-1)(2n+2k-1)}{6}$$

或 $$n(2x+n-1)^2 = (n+k)(2y+n+k-1)^2 +$$
$$kn^2 + k^2 n + \frac{k(k^2-1)}{3}$$

令 $z = 2x + n - 1, w = 2y + n + k - 1$,我们又可把上式再写成

$$nz^2 = (n+k)w^2 + kn^2 + k^2 n + \frac{k(k^2-1)}{3} \quad ①$$

如果 $k\equiv 7 \pmod{27}$，则把 $k=27\lambda+7$ 代入式 ① 后得到

$$nz^2=(n+27\lambda+7)w^2+(27\lambda+7)n^2+(27\lambda+7)^2n+(27\lambda+7)(243\lambda^2+126\lambda+16) \quad ②$$

如果 $n\equiv 0 \pmod 3$，那么上式的左边将 $\equiv 0 \pmod 3$，而右边 $\equiv w^2+1 \pmod 3$，因此 $w^2\equiv 2 \pmod 3$. 这是一个矛盾. 如果 $n\equiv 2 \pmod 3$，由于左边 $\equiv 2z^2 \pmod 3$，而右边 $\equiv 1 \pmod 3$，我们将类似地得出矛盾.

现在如果 $n\equiv 1 \pmod 3$，那么从式 ② 将得出 $z^2\equiv 2w^2 \pmod 3$. 此式仅当 $z\equiv w\equiv 0 \pmod 3$ 时才能满足，因此我们可设 $z=3z'$，$w=3w'$，$n=3m+1$，将其代入 ② 后得出

$$(3m+1)9z'^2=(3m+27\lambda+8)9w'^2+(27\lambda+7)(3m+1)^2+(27\lambda+7)^2(3m+1)+(27\lambda+7)(243\lambda^2+126\lambda+16)$$

由于上式的左边 $\equiv 0 \pmod 9$，而右边 $\equiv 6 \pmod 9$，这就得出矛盾.

把 $k=27\lambda+11$，$k=27\lambda+16$，$k=27\lambda+20$ 代入 ①，并利用和上面类似的论证，我们同理可证当 $k\equiv 11,16,20 \pmod{27}$ 时，式 ② 没有整数解.

(AMM E3080)

32. 方程 $(x+1)^2+a^2=(x+2)^2+b^2=(x+3)^2+c^2=(x+4)^2+d^2$ 是否存在整数解?

解 所说的方程不可能有整数解. 对任意整数 h，我们有

$$h^2\equiv\begin{cases}0 \pmod 8, & h\equiv 0 \pmod 4\\ 1 \pmod 8, & h\equiv 1,3 \pmod 4\\ 4 \pmod 8, & h\equiv 2 \pmod 4\end{cases}$$

因此

$$h^2+k^2\equiv\begin{cases}0,1,4 \pmod 8, & h\equiv 0 \pmod 4\\ 1,2,5 \pmod 8, & h\equiv 1,3 \pmod 4\\ 0,4,5 \pmod 8, & h\equiv 2 \pmod 4\end{cases}$$

所以，由于 $x+1$，$x+2$，$x+3$，$x+4$ 构成模 4 的完全剩余系，故同余式

$$(x+1)^2+a^2\equiv(x+2)^2+b^2\equiv(x+3)^2+c^2\equiv(x+4)^2+d^2\equiv n \pmod 8$$

仅当

$$n\in\{0,1,4\}\cap\{1,2,5\}\cap\{0,4,5\}=\varnothing$$

时才可能成立，这就证明了所给的方程组不可能有整数解.

(AMM E2809)

33. 设 $n>1$ 是正整数. 证明：如果 2^n+n^2 是素数，则 $n\equiv 3 \pmod 6$，逆命题是否成立.

证明 当 $n\equiv 0,1,2,3,4,5 \pmod 6$ 时，$2^n+n^2\equiv 4,3,2,5,2,3 \pmod 6$，因此如果 2^n+n^2 是素数，则 $n\equiv 3 \pmod 6$. 当 $n=27$ 时，2^n+n^2 是两个立方的和，因此不可能是一个素数，故逆命题不成立.

(AMM E2116)

34. 设 p 是一个素数，证明：在模 p 下，任意整数都可表示为两个立方数之和，或两个四次方之和，或一个立方数和一个四次方之和.

证明 在素数模下，全体整数对某个整数 a 构成循环群 G. 由此立即推出，至少有 $\frac{p-1}{3}$ 个立方数，至少有 $\frac{p-1}{4}$ 个四次方数.

如果 $3\mid p-1$，并且 $4\mid p-1$，那么就有 $\frac{p-1}{3}$ 个立方数和 $\frac{p-1}{4}$ 个四次方数以及 $\frac{p-1}{12}$ 个既是立方数又是四次方数的数. 那样有 $\frac{p-1}{2}$ 个数或者是立方数或者是四次方数. 如果 $4\nmid p-1$，那么在数列 $a,a^2,a^3,\cdots$ 的每四个数中，就有一个是四次方数，如果 $3\nmid p-1$，那么每个数都是立方数. 因此在任何情况下，都至少有 $\frac{p-1}{2}$ 个立方数和四次方数.

在模 p 下，0 是立方数. 因此总共有 $\frac{p+1}{2}$ 个立方数和四次方数. G 同时也是一个加法群，并且它的任何子群的元素都要多于全体元素的二分之一. 又群的每个元素都可表为它的子群的元素之和.（这是1968年普特南(Putnam)竞赛的一道试题）在现在的情况下，所说的子群是

$$\{b\in G\mid b=a^3 \quad \text{or} \quad b=c^4, a \quad \text{or} \quad c\in G\}$$

这就证明了结论.

(AMM E3010)

35. 证明：对所有 $n\geqslant 0$，成立

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$$

证明 设 $x=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}$，那么

$$x^2=3n+3+2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)$$

对 $n=0$，可直接验证结论成立；

对 $n\geqslant 1$，不等式

$$\left(n+\frac{2}{5}\right)^2<n(n+1)<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(n+\frac{7}{10}\right)^2<n(n+2)<(n+1)^2$$

$$\left(n+\frac{7}{5}\right)^2<(n+1)(n+2)<\left(n+\frac{3}{2}\right)^2$$

导致 $$9n+8<x^2<9n+9$$

所以 $$[x]=[\sqrt{9n+8}]$$

(AMM 10190)

36. 设 t 是一个正整数，$t\equiv1(\bmod 4)$，t 不是完全平方数，$\alpha=\frac{1+\sqrt{t}}{2}$.

(1) 证明：$1\leqslant[\alpha^2n]-[\alpha[\alpha n]]\leqslant[\alpha]$，其中 n 是任意正整数.

(2) 是否对每个位于区间 $[1,[\alpha]]$ 中的整数 m，都存在一个正整数 n，使得 m 可写成上面的差的形式？

解 我们证明(1) 并说明对(2) 的回答是肯定的.

设 $\theta_n=\alpha n-[\alpha n]$，那么由一维的克罗内克(Kronecker) 定理(例如可见 J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Springer, 1936, TheoremI. 5, 10) 可知，$\{\theta_n\}$ 在区间 $(0,1)$ 中稠密.

现在设 $t=1+4r$，那么由直接计算可知 $\alpha^2=\alpha+r$，因而 $\alpha^2n=\alpha n+rn$，$[\alpha^2n]=[\alpha n]+rn$，这就得出

$$(\alpha-1)[\alpha n]=(\alpha-1)(\alpha n-\theta_n)=rn-(\alpha-1)\theta_n$$

在上式两边都加上 $[\alpha n]$ 就得出

$$\alpha[\alpha n]=[\alpha n]+rn-(\alpha-1)\theta_n=[\alpha^2n]-(\alpha-1)\theta_n$$

这就是说 $\{[\alpha^2n]-\alpha[\alpha n]\}$ 在区间 $(0,\alpha-1)$ 中稠密. 由于

$$[\alpha^2n]-[\alpha[\alpha n]]=\lceil[\alpha^2n]-\alpha[\alpha n]\rceil=\lceil(\alpha-1)\theta_n\rceil$$

我们就看出那些差的集合是由区间 $[1,[\alpha]]$ 中的整数组成的.

(AMM E3317)

37. 设 n 是任意正整数而 α 是任意正的实数

$$S_n(\alpha)=\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sqrt{\alpha+\frac{j}{n}}\right]$$

(1) 证明：如果 $[\alpha]+1$ 不是完全平方数，则 $S_n(\alpha)=n[\alpha]$.

(2) 如果 $[\alpha]+1$ 是完全平方数，$S_n(\alpha)$ 的值是什么？

证明 (1) 注意由于和式中的每一项至少是 $[\alpha]$，所以 $S_n(\alpha)\geqslant n[\alpha]$. 如果等号不成立，那么和式中至少有一项要超过 $[\alpha]$，这意味着对某个整数 k

$$\sqrt{\alpha}<k\leqslant\sqrt{\alpha+\frac{n-1}{n}}$$

而由此得出

$$k^2+\frac{1}{n}\leqslant a+1<k^2+1$$

因此$[a]+1=k^2$是一个完全平方数，矛盾.

(2) 如果对某个整数k，$[a]+1=k^2$，那么我们断言

$$S_n(a)=n[a]+[n(a-[a])]$$

设$r=[n(a-[a])]$，那么

$$k^2+\frac{r}{n}\leqslant a+1<k^2+\frac{r+1}{n}, r\in\{0,1,\cdots,n-1\}$$

这意味着

$$\sqrt{a+\frac{n-r-1}{n}}<k\leqslant\sqrt{a+\frac{n-r}{n}}$$

而上式又等价于

$$\left[\sqrt{a+\frac{j}{n}}\right]=\begin{cases}k-1, & j<n-r\\ k, & j\geqslant n-r\end{cases}$$

那样　$S_n(a)=(n-r)(k-1)+rk=n(k-1)+r$

由于$k-1=[\sqrt{a}]$，这就证明了我们的断言.

(AMM E1367)

38. 证明：和式$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots$(加到第$\left[\frac{2p}{3}\right]$项)的分子可被$p$整除，其中$p$是一个大于3的素数.

证明

$$S=\sum_{1\leqslant k<2p/3}1/k-2\sum_{1\leqslant 2k<2p/3}1/2k=\sum_{1\leqslant k<2p/3}1/k-2\sum_{1\leqslant k<p/3}1/k=$$

$$\sum_{p/3<k<2p/3}1/k=\sum_{p/3<k<p/2}1/k+\sum_{p/3<k<p/2}1/(p-k)=$$

$$\sum_{p/3<k<p/2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{p-k}\right)=p\sum_{p/3<k<p/2}\frac{1}{k(p-k)}$$

(AMM 10429)

39. 设$p\equiv 1\pmod 4$是一个素数

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\frac{A}{B}$$

以及

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{4}}\frac{1}{k}=\frac{C}{D}$$

其中A,B,C,D都是整数，$(A,B)=(C,D)=1$.

(1) 证明：当且仅当$p\mid C$时，$p\mid A$.

(2) 对$p\equiv 3\pmod 4$得出一个类似的结果.

(3) 举例说明这些结果不是空的尚未实现的结果.

证明　(1)(2) 考虑整数在模p下构成的数域，则所要证明的结果可说成当且仅当第二个和为零时，第一个和为零. 设p是任

意奇素数. 在第一个和中, 对每个 $k > \frac{p-1}{2}$, 把 $\frac{1}{k}$ 换成 $-\frac{1}{p-k}$ 就给出

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} \equiv 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

对奇数项做同样的替换得

$$\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} \equiv -2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{2k} \equiv -\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{k}$$

把第二式的两倍和第一式相加并消去右边的奇数项后得

$$3\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k} \equiv -4\sum_{k=1}^{\left[\frac{p-1}{4}\right]}\frac{1}{2k} \equiv -2\sum_{k=1}^{\left[\frac{p-1}{4}\right]}\frac{1}{k}$$

这就证明了(1) 以及对 $p \neq 3$ 证明了(2).

(3) 首先注意

$$C_p^k = \frac{p}{1}\cdot\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p-2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{p-k+1}{k} \equiv$$

$$p\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{-(k-1)}{k} \equiv$$

$$(-1)^{k-1}\frac{p}{k}\pmod{p^2}$$

因此 $$2^p-2 = \sum_{k=1}^{p-1}C_p^k \equiv p\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\pmod{p^2}$$

反之, 当且仅当 $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ 时, 即 p 是一个 Wieferich 平方时, 我们的和式在模 p 下为零. 仅有的小于6亿的 Wieferich 平方为 1 093 和 3 511. 这就给出了(1) 和(2) 的一个实例.

(AMM E1702)

40. 证明: 当且仅当 p 是素数时, p 整除 $\sum_{j=1}^{p-1} j(j!)$.

证明 由于

$$j(j!) = (j+1)! - j!, j = 1,2,3,\cdots$$

因此我们仅需证明当且仅当 p 是一个素数时, p 整除 $(p-2)!-1$ 即可. 但是由 Wilson 定理可知, 当且仅当 p 是一个素数时, $(p-1)! = (p-1)(p-2)! \equiv -1 \equiv p-1 \pmod p$, 因此再注意到 $(p, p-1) = 1$ 即可得出结果.

(AMM E1408)

41. 求出能整除 $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2k-1}$ 的分子的 2 的最高幂次.

解 我们有

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}=$$
$$\sum_{i=0}^{M-1}\left(\frac{1}{i\cdot 2^{r+1}+1}+\frac{1}{i\cdot 2^{r+1}+3}+\cdots+\frac{1}{(i+1)\cdot 2^{r+1}-1}\right)$$

其中 $k=2^rM$，M 是奇数．和号中共有 M 个括弧，每个括弧中包含 2^r 个分数．这些分数的分母 $Q_{i1},Q_{i2},\cdots,Q_{ir}$ 恰是 2^{r+1} 的所有奇剩余．设 $Q_i=Q_{i1}Q_{i2}\cdots Q_{ir}\equiv Q_{ik}(\bmod 2^{r+1})$，那么将这 2^r 个分数合并起来，其分子就是 $P_i=P_{i1}+P_{i2}+\cdots+P_{ir}$，其中 $P_{ij}=\dfrac{Q_i}{Q_{ij}}$．我们证明，如果 $p\neq q$，那么必有 $P_{ip}\not\equiv P_{iq}(\bmod 2^{r+1})$．假设不然有 $P_{ip}\equiv P_{iq}(\bmod 2^{r+1})$，那么就有

$$Q_{ip}Q_{iq}P_{ip}\equiv Q_{ip}Q_{iq}P_{iq}(\bmod 2^{r+1})$$

或
$$Q_{iq}Q_i\equiv Q_{ip}Q_i(\bmod 2^{r+1})$$

因而
$$Q_{iq}Q_{ik}\equiv Q_{ip}Q_{ik}(\bmod 2^{r+1})$$

由于 Q_{ik} 是奇数，故 $(Q_{ik},2^{r+1})=1$．因而同余式方程 $Q_{ik}x\equiv 1(\bmod 2^r)$ 必有解 $x\equiv x_{ik}(\bmod 2^{r+1})$，这个 x_{ik} 一定是一个奇数，故必存在一个 Q_{ih}，因此必存在一个 Q_{ih} 使得 $x_{ih}\equiv Q_{ih}(\bmod 2^{r+1})$，即必存在一个 Q_{ih} 使得 $Q_{ih}Q_{ik}\equiv 1(\bmod 2^{r+1})$，因此用 Q_{ih} 去乘 $Q_{iq}Q_{ik}\equiv Q_{ip}Q_{ik}(\bmod 2^{r+1})$ 的两边就得出 $Q_{iq}\equiv Q_{ip}(\bmod 2^{r+1})$．但是由于 $p\neq q$，因此 Q_{ip},Q_{iq} 是模 2^{r+1} 的两个不同的奇剩余，这就得出矛盾．所以分子中的 2^r 个加数也恰是 2^{r+1} 的所有奇剩余．由于 2^N 的奇的剩余之和是 2^{2N-2}，这就得出，M 个括弧中的分子都具有形式 $2^{2r}M_i$，其中 M_i 是奇数．那样 $1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{2k+1}$ 的分母将具有形式 $2^{2r}Q$，其中 Q 是奇数项个奇数之和，因而也是奇数．因此如果 2^r 是整除 k 的 2 的最高次幂，那么 2^{2r} 就是整除分子的 2 的最高次幂．

(AMM E2689)

42．是否存在由正整数组成的非空有限集合 S，使得

(1) $n\in S\Rightarrow n-1\in S$ 或 $n+1\in S$．

(2) $\sum\limits_{n\in S}\dfrac{1}{n}$ 是一个整数？

解　存在．以下是两个解：

$$S_1=\{1,2,7,8,13,14,39,40,76,77,285,286\}$$
$$S_2=\{2,3,4,5,6,7,10,17,18,34,35,84,85\}$$

在每种情况中，由 S 的元素构成的 Egypt 分数的和都是 2．

43. 证明：整除 $C_{2^{n+1}}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}}$ 的 2 的最高次幂是 2^{3n}.

（AMM E2640）

证明　我们有

$$(2^n)! = 2^{2^n-1} P_1 P_2 \cdots P_n$$

其中
$$P_k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2^k - 1)$$

以及
$$C_{2^n}^{2^{n-1}} = \frac{2P_n}{P_1 P_2 \cdots P_{n-1}}$$

这就得出
$$C_{2^{n+1}}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}} = \frac{2(P_{n+1} - P_n^2)}{P_1 P_2 \cdots P_n}$$

令 $a = 2^n$，我们有

$$P_{n+1} - P_n^2 = (a^2 - 1^2)(a^2 - 3^2)\cdots(a^2 - (2^n - 1)^2) - 1^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot (2^n - 1)^2$$

那样 $b = \frac{(P_n^2 - P_{n+1})}{a^2}$ 是一个整数并且我们有

$$b \equiv P_n^2\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^2}\right) \pmod{a^2}$$

由于数 $\frac{P_n}{2k-1}$，$k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}$ 构成模 a 的奇整数表示的完全系，因而从上式就得出

$$b \equiv 1^2 + 3^2 + \cdots + (2^n - 1)^2 = 2^{n-1} \cdot \frac{4^n - 1}{3} \pmod{a}$$

这样，从上式，$C_{2^{n+1}}^{2^n} - C_{2^n}^{2^{n-1}} = \frac{2(P_{n+1} - P_n^2)}{P_1 P_2 \cdots P_n}$ 和 b 的定义就得出所需的结论.

（AMM E2327）

44. 设 S_m^n 表示所有不超过 m 并且和 n 互素的整数的倒数之和. 证明：当 $m > n \geqslant 2$ 时，S_m^n 不可能是一个整数.

证明　设 $S_m^n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_s}$，其中 $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_s$ 是不超过 m 且与 n 互素的整数，显然 a_2 是素数. 设 a_2^k 是 a_2 的不超过 m 的最高次幂，那么 a_2^k 是某个 a_i，而且此 a_i 是仅有的可被 a_2^k 整除的 a_i；这是由于根据 a_2 的定义，如果 $1 < c < a_2$，那么 $(c, n) > 1$，以及如果 $c \geqslant a_2$，那么 $ca_2^k \geqslant a_2^{k+1} > m$.

假设 S_m^n 是一个整数，设 L 是 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的最小公倍数（注意：$a_2^k \mid L$，但是 $a_2^{k+1} \nmid L$）. 那么在 $S_m^n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_s}$ 两边都乘以 L，并且把右边除了 $\frac{L}{a_2^k}$ 之外的项都移到左边后，就得出左边

是 a_2 的倍数而右边不是，这一矛盾就证明了 S_m^n 不可能是一个整数.

(AMM E3249)

45. 证明：对任意素数 p 和正整数 m，和式

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{1+k(p-1)}$$

都不是整数.

证明 设 $A_n=\frac{p^n-1}{p-1}$，那么当 $k=A_n$ 时，和式中第 k 项的分母 $1+k(p-1)=p^n$. 而对使得 $A_n<k<A_{n+1}$ 的 k，第 k 项的分母不可能被 p^n 整除. 假设不然，设 $A_n<k<A_{n+1}$，而 $1+k(p-1)=hp^n$，则为使此式成立，h 必须满足 $2\leqslant h\leqslant p-1$，那么

$$k=\frac{(h-1)p^n+p^n-1}{p-1}$$

但是由于 $p-1$ 不能整除 $(h-1)p^n$，因此上式不可能成立.

现在设 $A_n\leqslant m<A_{n+1}$，$k=A_n$，那么 p 的能够整除和式中分母的最高次幂是 p^n，实际上，这时第 k 项的分母就是 p^n.

设 $B_i=1+i(p-1)$，$i=1,2,\cdots,m$ 是和式中第 i 项的分母

$$B=B_1B_2\cdots B_m$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{1+k(p-1)}=\frac{A}{B}=\frac{A_1+\cdots+A_m}{B}$$

其中

$$A_i=i\frac{B}{B_i}$$

当 $i\neq k$ 时，由于 A_i 中含有 B_k，因而可被 p^n 整除. 但是 $A_k=kB_1\cdots B_{k-1}B_{k+1}\cdots B_m$，其中 $B_1\cdots B_{k-1}B_{k+1}\cdots B_m$ 中的各项都不能被 p^n 整除，同时由于 $k=A_n\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$，因此 k 也不能被 p^n 整除. 故把和式中的各项合并成一个单个的有理分数 $\frac{A}{B}$ 后，其分子 A 不能被 p^n 整除，而分母 B 可以被 p^n 整除. 这就说明所给的和式等于 $\frac{A}{B}$ 不可能是一个整数.

(AMM E1952)

46. (1) 求出最小的大于1的正奇整数 n，使得 2^n-1 可被一对孪生素数所整除.

(2) 求出最小的大于1的正整数 n，使得 2^n+1 可被一对孪生素数所整除.

解 (1) 设在模 p 下2的阶是 u，而在模 $q=p+2$ 下2的阶

是 v. 由于 $(p-1,q-1)=2$, $u\mid(p-1)$, $v\mid(q-1)$, 因此我们必须对都是奇数的 u, v, 让 uv 最小. 2 既是模 p 的二次剩余也是模 q 的二次剩余, 因此 $p\equiv-1 \pmod 8$. 由于 p 是孪生素数中的第一个数, 因此又有 $p\equiv-1\pmod 6$, 因而 $p\equiv-1\pmod{24}$. 利用这一信息和一套表, 我们就求出 $n=315$, $p=71$, $q=73$.

(2) 利用类似于(1)中的分析和方法, 但是稍微多费一点时间求出 n 必须是奇的以及 $n=1\ 645$, $p=281$, $q=283$.

(AMM 10523)

47. 求出所有使得 $abcd-1$ 能够被 $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$ 整除的不同的正整数 $1<a<b<c<d$ 的集合.

解 设 $x=abcd-1$, $y=(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$, 并设 $y\mid x$. 如果 a,b,c,d 之中有一个是偶数, 那么 x 是奇数, 因此 y 也是奇数. 这就说明 a,b,c,d 都是偶数, 因此 a,b,c,d 同时都是偶数或同时都是奇数.

如果 $a\geqslant5$, 那么 $\frac{x}{y}<\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{7}=2$, 这不可能.

如果 $a=4$, 那么 $\frac{x}{y}<\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}<3$, 由于 x 是奇数, 这不可能.

如果 $a=3$, 那么 $\frac{x}{y}<\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}<3$, 因此 $\frac{y}{x}=2$. 由于 $x\equiv-1\pmod 3$, 因此 $b-1$, $c-1$, $d-1$ 都不可能被 3 整除. 如果 $b\neq5$, 那么 $\frac{x}{y}<\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{15}{14}<2$, 这不可能, 因此 $b=5$. 由于 $\frac{y}{x}=2$, 我们就有

$$15cd-1=2y=16(c-1)(d-1)$$

化简后得出

$$(c-16)(d-16)=239$$

由于 239 是素数, 因此必须 $c=17$, 这样就导出解 $(3,5,17,255)$.

如果 $a=2$, 那么 a,b,c,d 都是偶数而 $\frac{y}{x}$ 是奇数. 由于 $\frac{x}{y}<\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}<4$, 故 $\frac{y}{x}=3$. 那样 3 不可能整除 b,c 或 d. 如果 $b\neq4$, 那么 $\frac{x}{y}<\frac{2}{1}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{13}<3$, 矛盾. 因此 $b=4$, 并且我们有

$$8cd-1=3y=9(c-1)(d-1)$$

化简后得出

$$(c-9)(d-9)=71$$

由于 71 是素数, 因此必须 $c=10$, 这样就导出解 $(2,4,10,80)$.

(AMM E2024)

48. 设 $F_{73}=2^{2^{73}}+1$,证明:

(1) $F_{73}>10^{24\cdot 10^{20}}$.

(2) $F_{73}\equiv 897 \pmod{1\,000}$.

证明 (1) 由 $2^{10}>10^3$ 得出 $2^{73}>8\cdot 10^{21}$,因此

$$F_{73}=2^{2^{73}}>10^{24\cdot 10^{20}}$$

(2) 易于证明对每个 n 都成立

$$n^{22}\equiv n^2 \pmod{100},\ n^{103}\equiv n^3 \pmod{1\,000}$$

因此

$$2^{73}\equiv 2^{13}\equiv 8\,192 \pmod{100}$$

而 $F_{73}=2^{2^{73}}\equiv 2^{8\,192}\equiv 2^{92}\equiv (2^{23})^4\equiv 608^4\equiv 896 \pmod{1\,000}$

(AMM E2033)

49. 设 $p=1\,093$,证明:

(1) $2^{\frac{p-1}{2}}+1\equiv 0 \pmod{p^2}$.

(2) $2^j-2^{j-k}+2^{j-2k}-\cdots+1\equiv 0 \pmod{p^2}$.

其中 $j=\frac{1}{2}[p-(2k+1)]$,$k=2+4s_n$,$n=0,1,2,3,4$,而 s_n 是前 n 个自然数之和.

证明 众所周知 $2^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$(例如见 Hardy and Wright, AnIntroduction to the Theory of Numbers, 4th ed., Oxford University Press 1960, Theorem91, 73),因而

$$(2^{\frac{p-1}{2}}-1)(2^{\frac{p-1}{2}}+1)\equiv 0 \pmod{p^2}$$

由于 $p\equiv 5 \pmod 8$,故 2 是模 p 的非二次剩余,因此 $2^{\frac{p-1}{2}}+1\not\equiv 0 \pmod p$,而必有 $2^{\frac{p-1}{2}}-1\equiv 0 \pmod{p^2}$.

现在 $k=2(n^2+n+1)$,因而当 $n=0,1,2,3,4$ 时,$k=2,6,14,26,42$,$j=\frac{1}{2}(p-1)-k=546-k$.由于546是上述每个 k 的奇数倍,故

$$2^j-2^{j-k}+2^{j-2k}-\cdots+1=\frac{2^{546}+1}{2^k+1}$$

由直接计算又有

$$2^{546}+1\equiv 0 \pmod{p^2}$$

以及在模 p 下

$$2^2\equiv 4,2^6\equiv 64,2^{14}\equiv 1\,082,2^{26}\equiv 850,2^{42}\equiv 855$$

因此

$$2^k+1\not\equiv 0 \pmod p$$

这样就得出

$$2^j - 2^{j-k} + 2^{j-2k} - \cdots + 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$$

50. 设 p 是一个正的奇素数，k 是正整数，u,v 是正或负的整数，证明：

(1) 如果 $p^k \mid u+v$，则 $p^{k+1} \mid u^p + v^p$.

(2) 如果 $p^k \mid u+v$，$p^{k+1} \nmid u+v$，那么 $p^{k+2} \nmid u^p + v^p$.

(3) 如果 $p \mid u^{p^k} + v^{p^k}$，则 $p^{k+1} \mid u^{p^k} + v^{p^k}$.

(4) $u+v \equiv 0 \pmod{p^k} \Leftrightarrow u^p + v^p \equiv 0 \pmod{p^{k+1}} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$

$$u^{p^m} + v^{p^m} \equiv 0 \pmod{p^{m+k}}$$

(AMM　L. M. Court, A　Divisibility　Theorenm, Vol. 71, No. 3: 300-301, Lincoln LaPaz, Chains of Factorable Binomials, Vol. 72, No. 1: 58-59, Marlow Sholander, Binomial Divisibility by Prime Powers)

证明　(1) 设 $p^k \mid u+v$，则

$$u+v = mp^k, v = mp^k - u, v^p = (mp^k - u)^p$$

将此二项式展开后可知，除了 $-u^p$ 这一项外(由于 p 是奇素数，因此在展开式中，u^p 的系数一定是 -1)，其他的项都是 p^{k+1} 的倍数，这就得出 $p^{k+1} \mid u^p + v^p$.

(2) 如果 $p^k \mid u+v$，那么 $u+v = mp^k$，又因为 $p^{k+1} \nmid u+v$，所以 $p^{k+1} \nmid u$ 或 $p^{k+1} \nmid v$. 不妨设 $p^{k+1} \nmid v$，于是

$$u = mp^k - v, u^p = (mp^k - v)^p = M_1 p^{k+2} + p^{k+1} mv^{p-1} - v^p$$

因此

$$u^p + v^p = M_1 p^{k+2} + mp^{k+1} v^{p-1}$$

由 p 是素数和费马(Fermat)定理可知 $u^{p-1} \equiv v^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，因此 $v^{p-1} = M_2 p + 1$，于是

$$u^p + v^p = M_1 p^{k+2} + p^{k+1} m(M_2 p + 1) = M_3 p^{k+2} + mp^{k+1}$$

如果 $p^{k+2} \mid u^p + v^p$，那么由上式就要得出 $p \mid m$，于是由 $u+v = mp^k$ 得出 $p^{k+1} \mid u+v$，这与 $p^{k+1} \nmid u+v$ 矛盾，所以必有 $p^{k+2} \nmid u^p + v^p$.

(3) 设 $p \mid u^{p^k} + v^{p^k}$，那么由 p 是素数和费马定理可知 $u^{p-1} \equiv v^{p-1} \equiv 1 \pmod p$，又由于 p 是奇数，因此

$$p^k = (p-1)(p^{k-1} + p^{k-2} + \cdots + 1) + 1 = (p-1)M + 1$$

因此得出

$$u^{p^k} + v^{p^k} \equiv u + v \pmod p$$

因此 $p \mid u+v$，因而由(1)又得出

$$p^2 \mid u^p + v^p$$

$$p^3 \mid (u^p)^p + (v^p)^p = u^{p^2} + v^{p^2}, \cdots, p^{k+1} \mid u^{p^k} + v^{p^k}$$

(4) 由(1),(2)即得.

(AMM E2772)

51.设 m 是一个正整数,求出所有可使得 $(a+b) \mid (a^{2m} + b^{2m})$ 的正整数对 (a,b).

解 设 $d=(a,b)$,$(a,b)=(du,dv)$,则 $(u,v)=1$,$(u^{2m},v^{2m})=1$.我们断言

$$(a+b) \mid (a^{2m}+b^{2m}) \Leftrightarrow (u+v) \mid 2d^{2m-1}$$

首先注意,由于 $u^{2m}-v^{2m} \equiv 0 (\bmod u+v)$,因此我们有

$$u^{2m}+v^{2m} \equiv 2u^{2m} \equiv 2v^{2m} (\bmod u+v) \qquad (*)$$

因此

$$\begin{aligned} a+b \mid (a^{2m}+b^{2m}) \Leftrightarrow\ & d(u+v) \mid d^{2m}(u^{2m}+v^{2m}) \Leftrightarrow \\ & (u+v) \mid d^{2m-1}(u^{2m}+v^{2m}) \Leftrightarrow \\ & (u+v) \mid d^{2m-1}(2u^{2m},2v^{2m}) \\ & (\text{由式}(*)) \Leftrightarrow \\ & (u+v) \mid 2d^{2m-1} \end{aligned}$$

这就证明了断言.

设 $(u,v)=1$,使得 $(u+v) \mid 2d^{2m-1}$ 的整数 d 的集合 S 可确定如下:利用 $u+v$ 的素因子分解式可以求出最小的正整数 d_0,使得 $(u+v) \mid 2d_0^{2m-1}$,那么集合 S 就由 d_0 的所有倍数所组成.

最后,所求的解由所有的整数对 $(a,b)=(kd_0u,kd_0v)$ 所组成,其中 u,v 是任意互素的正整数,k 是任意正整数,而 d_0 是使得 $(u+v) \mid 2d_0^{2m-1}$ 成立的最小的正整数.

(AMM E1817)

52.设 $r=(2n+1)^k$,其中 n 和 k 都是非负整数.证明:对任意正整数 a,$(2n+1)^{k+1}$ 整除

$$a^r+(a+1)^r+\cdots+(a+2n)^r$$

证明 容易用数学归纳法证明如果 $a \equiv b (\bmod m)$,则 $a^{m^k} \equiv b^{m^k} (\bmod m^{k+1})$.对 $r=(2n+1)^k$ 和

$$f(a)=a^r+(a+1)^r+\cdots+(a+2n)^r$$

我们有

$$f(a+1)-f(a)=(a+2n+1)^r-a^r \equiv 0 (\bmod (2n+1)^{k+1})$$

由 $a^{m^k} \equiv b^{m^k} (\bmod m^{k+1})$ 和 r 是奇数得出

$$f(-n)=(-n)^r+(-n+1)^r+\cdots+(n-1)^r+n^r=0$$

可被 $(2n+1)^{k+1}$ 整除,因此从上面关于 $f(a+1)-f(a)$ 的同余式

就得出对每一个整数 a，$f(a)$ 可被 $(2n+1)^{k+1}$ 整除.

53. 设 $m_1,m_2,\cdots,m_k$ 都是大于2的正整数，那么存在一个素数 p，使得

$$m_i-1\mid p-1, i=1,2,\cdots,k$$

(Jiang Luh, On the structure of J－Rings , AMM Vol.74, No.2: 164-166.)

证明　设 $a=(m_1-1)(m_2-1)\cdots(m_k-1)$，$b=1$，那么显然 $(a,b)=1$，故由迪利克雷定理可知，在等差数列 $an+b$，$(a,b)=1$ 中存在无穷多个素数，任取其中一个素数 p，则

$$p=(m_1-1)(m_2-1)\cdots(m_k-1)+1$$

由此显然就得出

$$m_i-1\mid p-1, i=1,2,\cdots,k$$

(AMM E2293)

54. 是否存在无限多个素数组成的集合 S，使得 S 具有性质：任取 $p\in S$，$q\in S$，那么就有

$$\left(\frac{1}{2}(p-1),\frac{1}{2}(q-1)\right)=1$$

$$(p,q-1)=1,(p-1,q)=1$$

证明　我们用归纳构造的方法证明 S 存在.

设 $p_1=3$，$p_2=5$. 现在假设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 已经选定. 设 $d_n=\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2}p_i(p_i-1)$，那么由迪利克雷定理，存在一个形式为 $2kd_n-1$ 的素数 p_{n+1}. 对 $i\leqslant n$，显然有

$$\left(\frac{1}{2}(p_i-1),\frac{1}{2}(p_{n+1}-1)\right)=1$$

$$(p_i,p_{n+1}-1)=(p_i-1,p_{n+1})=1$$

这就完成了证明.

(AMM E1824)

55. 设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是 n 个素数(可能有相同的)，r_n 是这些素数的乘积，而 m 是整数

$$r_n\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\cdots-\frac{1}{p_n}\right)$$

证明：对任何整数 x

$$\frac{x^{p_n}}{p_n}+\frac{x^{p_{n-1}}}{p_{n-1}}+\cdots+\frac{x^{p_1}}{p_1}+\frac{mx}{r_n}$$

都是一个整数.

证明　把 m 的表达式代入和式，则所给的和式成为

$$x+\sum_{k=1}^{s}\frac{x(x^{p_k-1}-1)}{p_k}$$

由费马小定理可知当$(x,p_k)=1$时，$x^{p_k-1}\equiv 1(\bmod p_k)$，因此在上式中的每一项中，或者$p_k\mid x$，或者$p_k\mid x^{p_k-1}-1$，不论在哪种情况下，其每一项都是一个整数，故整个的和也是整数.

(AMM E2004)

56. 设 $n>0$，$m>1$ 都是整数，证明：$\dfrac{\prod_{i=0}^{n-1}(m^n-m^i)}{n!}$ 是一个整数.

证明 分子可以写成

$$m^{\frac{n(n-1)}{2}}(m-1)(m^2-1)\cdots(m^n-1)$$

设 p 是任意小于等于n的素数，那么 p 整除$n!$恰好 α 次，其中 $\alpha=\sum_{j\geq 1}\left[\frac{n}{p^j}\right]$. 如果 $p\mid m$，由于 $n=1$ 和 $n=2$ 的情况是平凡的，因此我们可设 $n>2$，那么 p 整除分子$\frac{n(n-1)}{2}$次，并且

$$\alpha<\sum_{j\geq 1}\left[\frac{n}{p^j}\right]=\frac{n}{p-1}\leqslant n\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$$

如果 $p\nmid m$，那么对所有的正整数 s，$m^{s(p-1)}-1$ 可被 p 整除，那么小于或等于 n 的$p-1$ 的倍数的数目是 $\beta=\left[\frac{n}{p-1}\right]$，因此分子可被 p^β 整除.

利用不等式$[x+y]\geqslant[x]+[y]$，我们有

$$\beta=\left[\frac{n}{p-1}\right]=\left[\sum_{j\geq 1}\frac{n}{p^j}\right]\geqslant\sum_{j\geq 1}\left[\frac{n}{p^j}\right]=\alpha$$

因此无论在哪种情况下，分母都能整除分子.

(AMM E3107)

57. 设 m，n 是非负整数，证明：$\dfrac{m!(2m+2n)!}{(2m)!n!(m+n)!}$ 是整数.

证明 设 $A(m,n)=\dfrac{m!(2m+2n)!}{(2m)!n!(m+n)!}$，则

对所有 $n\geqslant 0$，$A(0,n)=C_{2n}^{n}$ 是一个整数；

对所有 $m\geqslant 0$，$A(m,0)=1$ 是整数.

因而由直接计算可知，对所有 $m\geqslant 1$，$n\geqslant 1$ 成立

$$A(m,n)=4A(m,n-1)+A(m-1,n)$$

这样，由数学归纳法即可得知对所有 $m\geqslant 0$，$n\geqslant 0$，$A(m,n)$ 是整数.

58. 证明：$\frac{(n^2)!}{C_n^n C_{n+1}^n C_{n+2}^n \cdots C_{2n-1}^n (n!)^n}$，$n = 1,2,3,\cdots$ 是整数.

(AMM E3123)

证明 我们要使用一个众所周知的结果，即 Frame，Robinson 和 Thrall 的定理（见 Knuth，The Art of Computer Programming，Vol. 3 Addison Wesley，1973，63）：在一个 $n \times n$ 的表中填充 1 到 n^2 的整数，使得按行和按列看，所填的数都是递增的填法，A_n 是 $(n^2)!$ 除以所有挂钩－长度的乘积. 这里在 (i,j) 处挂钩的长度是使得 $i' = i, j' \geq j$ 或 $i' \geq i, j' = j$ 的位置 (i', j') 的数目. 对于正方形表来说，这个数目就等于 $2n + 1 - (i + j)$. 在第 i 列中，这一乘积是

$$\frac{(2n - i)!}{(n - i)!} = n! C_{2n-i}^{n-i}$$

因此我们求出问题中所给的表达式就是 A_n，由于 A_n 显然是一个整数，这就证明了结论.

注 更一般的，我们可证明 $\frac{(mn)!0!1!\cdots(n-1)!}{m!(m+1)!\cdots(m+n-1)!}$，$m, n \geq 1$ 是整数.（这个更一般的结论同样是来自上述 Frame，Robinson 和 Thrall 的定理.）对任意素数 p，p 的整除 $q!$ 的最高次幂指数为 $\sum_{k \geq 1} \left[\frac{q}{p^k}\right]$. 设

$$e(m, n; r) = \left[\frac{mn}{r}\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{r}\right] - \sum_{i=m}^{m+n-1} \left[\frac{i}{r}\right]$$

我们的目的是证明对每个 p，$e(m, n; p^k) \geq 0$.

更一般的，我们证明对每个 m, n, r，$e(m, n; r) \geq 0$. 由于当用 $m + r$ 代替 m 时，对 $e(m, n; r) \geq 0$ 所做的正的贡献和负的贡献都增加了 n，所以我们有

$$e(m + r, n; r) = e(m, n; r)$$

此外，我们可以把 $e(m, n; r)$ 写成如下对称的形式，即

$$e(m, n; r) = \left[\frac{mn}{r}\right] + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{i}{r}\right] + \sum_{i=0}^{m-1} \left[\frac{i}{r}\right] - \sum_{i=0}^{m+n-1} \left[\frac{i}{r}\right]$$

由此可以看出 $e(m, n; r) = e(n, m; r)$. 因此只须考虑 $0 \leq m, n < r$ 的情况. 这时，如果 $m + n \leq r$，那么 $e(m, n; r) = \left[\frac{mn}{r}\right] \geq 0$，如果 $m + n > r$，那么

$$e(m, n; r) = \left[\frac{mn}{r}\right] - (m + n - r) =$$

$$\left[\frac{(r - m)(r - n)}{r}\right] \geq 0$$

（AMM E2138）

59. 证明：对所有的正整数 n，整数 $\left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)}\right]$ 总是一个偶数.

证明 设 $Q=\frac{(n-1)!}{n(n+1)}$ 并且注意当 $n<6$ 时 $[Q]=0$，因此我们只须考虑 $n\geqslant 6$ 的情况即可.

首先假设 n 和 $n+1$ 都是合数，这时我们可设 $n=a\cdot b$，$n+1=c\cdot d$，$(ab,cd)=1$ 并且 $2\leqslant a,b,c,d\leqslant\frac{1}{2}(n+1)$. 如果 $a\neq b$ 并且 $c\neq d$（因而 $n>13$），那么这四个整数是集合 $S=\{1,2,\cdots,n-1\}$ 中的不同的元素，因此 $Q=[Q]$ 是一个整数. 此外 S 至少有 6 个元素，因此 $[Q]=\frac{(n-1)!}{abcd}$ 是偶数.

如果 $a=b$，那么由于 $1\leqslant a,2a,c,d\leqslant n-1$ 是四个不同的整数，因此 $\frac{Q}{2}=\frac{(n-1)!}{a\cdot 2a\cdot c\cdot d}$ 是一个整数，因而 Q 是一个偶数；如果 $c=d$，则由于 $1\leqslant a,b,c,2c\leqslant n-1$ 是四个不同的整数，因此 $\frac{Q}{2}=\frac{(n-1)!}{a\cdot b\cdot c\cdot 2c}$ 是一个整数，因而 Q 是一个偶数；在其他情况，这是 S 的四个不同的成员，因此 $\frac{(n-1)!}{2n(n+1)}=\frac{Q}{2}$ 是一个整数，因此 Q 是一个偶数.

现在，如果 $n=p>5$ 是一个素数，考虑

$$Q+\frac{1}{p}=\frac{(p-1)!+(p+1)}{p(p+1)}$$

由 Wilson 定理可知 $p\mid[(p-1)!+(p+1)]$，由于 $p+1$ 是偶数，故 $\frac{p+1}{2}$ 是一个整数，而 $(p-1)!$ 至少有 6 个偶数因子，因此 $\frac{(p-1)!}{p+1}=\frac{(p-1)!}{2\cdot\frac{p+1}{2}}$ 是一个偶数，故 $(p-1)!+(p+1)$ 是 $p+1$ 的奇数倍，故

$$(p+1)\mid[(p-1)!+(p+1)]$$

又 $(p,p+1)=1$，因此

$$p(p+1)\mid[(p-1)!+(p+1)]$$

因而由于在

$$Q+\frac{1}{p}=\frac{(p-1)!+(p+1)}{p(p+1)}=\frac{\frac{(p-1)!+(p+1)}{p+1}}{p}$$

最后一个分数中，分子分母都是奇数，因而 $Q+\frac{1}{p}$ 是一个奇数. 又

$$1 \leqslant Q + \frac{1}{p} - [Q] = \{Q\} + \frac{1}{p} < 2$$

故 $Q + \frac{1}{p} - [Q] = 1$，从而 $[Q] = Q + \frac{1}{p} - 1$ 是偶数.

类似的，如果 $n + 1 = p > 5$ 是一个素数，那么由于 $(p-2)! \equiv 1 \pmod p$，因此 $Q + \frac{1}{p}$ 是一个奇数，因而 $[Q]$ 是偶数. 这就完成了证明.

(AMM E2208)

60. 设 $n \geqslant 5, 2 \leqslant m \leqslant n$，证明：$\left[\frac{(n-1)!}{m}\right] \equiv 0 \pmod{m-1}$.

证明　分以下四种情况讨论：

(1) $m < n$. 这时显然 $m(m-1)$ 整除 $(n-1)!$，因此 $\frac{(n-1)!}{m}$ 是一个整数并且可被 $m-1$ 整除.

(2) $m = n$ 是一个合数，但不是一个素数的平方. 这时 $m = n = rs$，其中 $1 < r < s < n$. 由于 n 和 $n-1$ 是互素的，因 $s < n-1$，因此 $(n-1)!$ 可被 $rs(n-1) = m(m-1)$ 整除，这就化为已证的(1).

(3) $m = n = p^2$，其中 p 是一个素数. 由于 $n = p^2 \geqslant 5$，我们看出 $1 < p < 2p < p^2 - 1 = n - 1$，因此 $(n-1)!$ 可被 $p(2p)(n-1) = 2m(m-1)$ 整除，这就又化为已证的(1).

(4) $m = n = p$，其中 p 是一个素数. 这时由 Wilson 定理 $(p-1)! + 1$ 可被 p 整除，因此

$$\left[\frac{(p-1)!}{p}\right] = \left[\frac{(p-1)!+1}{p} - \frac{1}{p}\right] = \frac{(p-1)!+1}{p} - 1 = \frac{(p-1)! - (p-1)}{p}$$

显然 $p-1$ 整除这个商的分子，并且由于 p 和 $p-1$ 互素，因此 $p-1$ 就必须整除这个商本身. 这就完成了证明.

(AMM 3834)

61. 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leqslant 2n$ 是正整数的叙列，$n \neq 4$，那么

$$\min[a_i, a_j] \leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$$

其中 $[a_i, a_j]$ 表 a_i 和 a_j 的最小公倍数.

证明　首先对任意正整数 n，考虑一个特殊的叙列 $a_i = n + i$. 这个叙列中的第一个偶数是 $2\left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$，并且对 $n = 3$ 和 $n >$

5, $3\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$ 也在此叙列中. 因此除了 $n=4$, 以及显然情况 $n=2$ 之外, 对此叙列成立 $\min[a_i,a_j]\leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$.

对任意其他的叙列 $a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant 2n$ 以及任意 a_i 存在整数 $k_i\geqslant 1$, 使得 $n<k_ia_i\leqslant 2n$. 如果对某一对 i,j 有 $k_ia_i=k_ja_j$, 那么 $[a_i,a_j]$ 整除 k_ia_i, 因而小于等于 $2n$. 在其他情况下, k_ia_i, $i=1,2,\cdots,n$ 是两两不同的, 并且恰是上述特殊叙列的某种排列. 因此, 对某对 p,q, 恰有 $k_pa_p=2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$, $k_qa_q=3\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$, 这样 $[a_p,a_q]$ 整除 $6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$. 因而在任何情况下都成立

$$\min[a_i,a_j]\leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)$$

(AMM E1352)

62. 设 $a>b>c$, $0\leqslant a,b,c\leqslant 9$, abc, bca, cab 表示由 a, b, c 组成的三个三位数, 已知在乘积 $P=(abc)(bca)(cab)=234\ 235\ 286$ 中, 只有个位数 6 是正确的, 其它数字的次序已被打乱, 恢复这些数字的正确次序.

解 设 $A=abc$. 如果 $c=1$, 那么 A 最大只可能是 981, 这时 $P=159\ 080\ 922$ 不符合要求, 因此 $988>A>981$. 但是 P 的所有数字之和是 $35\equiv 2(\bmod 3)$; 因此 A 和它的其他排列也必须 $\equiv 2(\bmod 3)$, 因而 A 只能是 986 或 983, 而这两个数中只有 983 使得 P 的尾数是 6. 实际上, 确实有

$$(983)(839)(398)=328\ 245\ 326$$

(AMM E3196)

63. 证明: 任何一个不能被 10 整除的正整数 n 必有一个各位数字都不为零的倍数.

证明 如果 $(n,10)=1$, 那么由于 $10^{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n)$, 因此显然 $10^{\varphi(n)}-1$ 就是一个符合要求的的倍数.

如果 $(n,10)\neq 1$, 那么由于 $10\nmid n$, 因此必有 $n=p^na$, 其中 $p=2$ 或 5, 并且 $(a,10)=1$.

我们首先证明: 对任意 $m\geqslant 1$, 都存在一个 m 位数 $x=x_{m-1}\cdots x_0$, 使得 $x_i=1$ 或 2, $i=0,1,\cdots,m-1$ 并且 $2^m\mid x$. 当 $m=1$ 时, 可取 $x=2$, 当 $m=2$ 时, 可取 $x=12$, 因此对正整数 $m=1$, 2, 命题成立. 假设对正整数 m, 已求出 m 位数 $x=x_{m-1}\cdots x_0$, 使得

$x_i = 1$ 或 $2, i = 0,1,\cdots,m-1$ 并且 $2^m \mid x$. 那么可设 $x = 2^m c$, 假如 c 是奇数, 我们令 $x_m = 1$, 假如 c 是偶数, 则令 $x_m = 2$, 那么

$$x_m x_{m-1}\cdots x_0 = 10^m x_m + x = 10^m x_m + 2^m c = 2^m(5^m x_m + c)$$

因此易于验证必有 $2 \mid (5^m x_m + c)$, 因此 $m+1$ 位数 $x' = x_m\cdots x_0$ 也具有性质 $x_i = 1$ 或 $2, i = 0,1,\cdots,m$ 并且 $2^{m+1} \mid x'$. 因而由数学归纳法, 对任何正整数 $m \geqslant 1$ 命题成立.

其次我们证明: 对任意 $m \geqslant 1$, 都存在一个 m 位数 $y = y_{m-1}\cdots y_0$, 使得 $y_i = 1,2,3,4$, 或 $5, i = 0,1,\cdots,m-1$ 并且 $5^m \mid x$. 当 $m = 1$ 时, 可取 $y = 5$, 当 $m = 2$ 时, 可取 $y = 25$, 因此对正整数 $m = 1,2$, 命题成立. 假设对正整数 m, 已求出 m 位数 $y = y_{m-1}\cdots y_0$, 使得 $y_i = 1,2,3,4$ 或 $5, i = 0,1,\cdots,m-1$ 并且 $5^m \mid y$. 那么可设 $y = 5^m c$, 由于 $(2^m,5) = 1$, 所以同余式 $2^m y_m + c \equiv 5 \pmod 5$ 必定有解, 所以可以根据 $c \equiv 1,2,3,4,5 \pmod 5$, 确定 $1,2,3,4,5$ 中的某个数作为 y_m, 使得 $m+1$ 位数 $y' = y_m\cdots y_0$ 也具有性质 $y_i = 1,2,3,4$ 或 $5, i = 0,1,\cdots,m$ 并且 $5^{m+1} \mid y'$. 因而由数学归纳法, 对任何正整数 $m \geqslant 1$ 命题成立.

现在设 $S_0 = 10^0, S_1 = 10^0 + 10^m, \cdots, S_n = 10^0 + \cdots + 10^{nm}, \cdots$, 那么由抽屉原理可知, a 必存在一个形如 $10^{sm} + 10^{(s+1)m} + \cdots + 10^{(s+r)m}$ 的倍数. 由此得出 $R = 1 + 10^m + \cdots + 10^{rm}$ 是 a 的倍数. 现在根据 $p = 2$ 或是 5, 设 $M = R\cdot(x_{m-1}\cdots x_0)$ 或 $M = R\cdot(y_{m-1}\cdots y_0)$, 那么 M 同时是 p^m 和 a 的倍数, 因此也是 n 的倍数, 由 R 的表达式易于验证

$$M = (x_{m-1}\cdots x_0)\cdots(x_{m-1}\cdots x_0)(\text{共 } r \text{ 个括弧})$$

或

$$M = (y_{m-1}\cdots y_0)\cdots(y_{m-1}\cdots y_0)(\text{共 } r \text{ 个括弧})$$

所以 M 的各位数字是 1,2,3,4 或 5 都不为零.

(AMM E1293)

64. 证明: 对每一个非负整数 n 成立

$$3(1 + 6^n + 9^n) \equiv 1^n + 2^n + \cdots + 9^n \pmod{18}$$

证明 易于验证对 $n = 0$ 和 $n = 1$, 题目中的同余式成立. 当 $n > 1$ 时

$$A = 1^n + 2^n + \cdots + 9^n - 3(1 + 6^n + 8^n) =$$
$$2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 7^n + 9^n - 2 - 2\cdot 6^n - 2\cdot 8^n$$

由于有 5 个偶数项, 4 个奇数项, 因此 $2 \mid A$, 因而我们以下只须证明 $9 \mid A$ 即可. A 中有 3 项可被 9 整除, 因此只须证明 $9 \mid (2^n + 4^n + 5^n + 7^n - 2 - 2\cdot 8^n) = B$ 即可.

利用当 n 是奇数时 $a^n + b^n$ 的因式分解公式和 $B = (7^n +$

$2^n)+(5^n+4^n)-2(8^n+1)$ 可知当 n 是奇数时，$9\mid B$，因而 $9\mid A$. 当 n 是偶数时

$$B=7(7^{n-1}+2^{n-1})-5\cdot 2^{n-1}+5(5^{n-1}+4^{n-1})-4^{n-1}-16(8^{n-1}+1)+14$$

由于 $n-1$ 是奇数，因此括弧中的数都是 9 的倍数，而其余的项之和是

$$-C=5\cdot 2^{n-1}+4^{n-1}-14=2^{2n-2}+5\cdot 2^{n-1}-14=(2^{n-1}+7)(2^{n-1}-2)=2(2^{n-1}+1+6)(2^{n-2}-1)$$

由于最后式子中每个括弧中的数都是 3 的倍数，因此 $9\mid C$，因而 $9\mid B$，因而 $9\mid A$.

这样，综合以上讨论就证明了所要的同余式.

(AMM E1346)

65. 证明：如果 p 是一个素数，那么 $C_{2p}^{p}\equiv 2(\bmod p)$.

证法 1 $C_{2p}^{p}=\sum\limits_{k=0}^{p}(C_p^k)^2=2+\sum\limits_{k=1}^{p-1}(C_p^k)^2$

由于对 $k=1,2,\cdots,p-1$，$p\mid C_p^k$，这就可以得出所需的结果.

证法 2 $(1+1)^{2p}=2^{2p}=4^p$，此式左边的展开式中除了第一项 1，中间的项 C_{2p}^{p} 和最后一项 1 之外都可被 p 整除，因而 $4^p\equiv 2+C_{2p}^{p}(\bmod p)$. 由费马定理可知 $4^p\equiv 4(\bmod p)$，因此 $C_{2p}^{p}\equiv 2(\bmod p)$.

(AMM 10268)

66. 设 $a_0=3,a_1=0,a_2=2,a_{n+3}=a_{n+1}+a_n$. 证明：如果 p 是一个素数，则 $p\mid a_p$.

证明 对 $p=2$，结论显然成立. 故以下设 p 是一个奇素数. 由于数列 a_n 的特征方程 $\lambda^3=\lambda+1$ 的根 α,β 和 γ 是两两不同的，因此

$$a_n=c_1\alpha^n+c_2\beta^n+c_3\gamma^n$$

又由于

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)=0^2-2(-1)=2$$

因此必须 $c_1=c_2=c_3=1$，因而 $a_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$.

由于 α,β 和 γ 满足方程 $\lambda^3=\lambda+1$，因此我们有

$$a_{3n}=(\alpha+1)^n+(\beta+1)^n+(\gamma+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a_k$$

类似的,由 $\lambda = \lambda^3 - 1$ 可得

$$a_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k a_{3k}$$

由于对 $1 \leqslant k \leqslant p-1$, $p \mid C_p^k$,以及 $C_p^0 = C_p^p = 1$,因此由 $a_{3p} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a_k$ 就有

$$a_{3p} \equiv a_0 + a_p \pmod p$$

而由
$$a_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k a_{3k}$$

就有
$$a_p \equiv a_0 - a_{3p} \equiv a_0 - (a_0 + a_p) \equiv -a_p \pmod p$$
$$2a_p \equiv 0 \pmod p$$

由于 $(p,2) = 1$,故 $a_p \equiv 0 \pmod p$,这就是所要证的.

(AMM 10655)

67. 设 $a_0 = 4$, $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = 3$, $a_{n+4} = a_{n+1} + a_n$. 证明:如果 p 是一个素数,则 $p \mid a_p$.

证明 所给的循环数列 a_n 的特征多项式为 $\lambda^4 - \lambda - 1 = 0$, 易证他没有重根,因此可设他的四个不同的根是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$,而 a_n 的通项公式为

$$a_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n + C_4\lambda_4^n$$

其中 C_1, C_2, C_3, C_4 为待定常数.

由根与系数的关系可知

$$\lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0 + \lambda_4^0 = 4 = a_0$$
$$\lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \lambda_3^1 + \lambda_4^1 = \sigma_1 = 0 = a_1$$
$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 0 = a_2$$
$$\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 3 = a_3$$

因此

$$\lambda_1^0 C_1 + \lambda_2^0 C_2 + \lambda_3^0 C_3 + \lambda_4^0 C_4 = a_0 = 4 = \lambda_1^0 + \lambda_2^0 + \lambda_3^0 + \lambda_4^0$$
$$\lambda_1^1 C_1 + \lambda_2^1 C_2 + \lambda_3^1 C_3 + \lambda_4^1 C_4 = a_1 = 0 = \lambda_1^1 + \lambda_2^1 + \lambda_3^1 + \lambda_4^1$$
$$\lambda_1^2 C_1 + \lambda_2^2 C_2 + \lambda_3^2 C_3 + \lambda_4^2 C_4 = a_2 = 0 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_4^2$$
$$\lambda_1^3 C_1 + \lambda_2^3 C_2 + \lambda_3^3 C_3 + \lambda_4^3 C_4 = a_3 = 3 = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 + \lambda_4^3$$

因此我们看出

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1$$

因而 a_n 的通项公式为

$$a_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n$$

因而

$$a_p = a_p - a_1^p = \lambda_1^p + \lambda_2^p + \lambda_3^p + \lambda_4^p - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^p$$

上式中的 p 次项消去后，由于 p 是一个素数，因此由二项式系数的表达式可知，其余的项的系数都可被整除．故 $a_p - a_1^p = pM$，其中 M 是 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 的幂的整数线形组合，因而是一个代数整数．由于 $a_p - a_1^p$ 和 p 都是有理整数，因此 M 也是有理整数，这就说明

$$p \mid (a_p - a_1^p) = a_p$$

(AMM E3297)

68．设 m,k 都是正整数，$m+2k=pr$，其中 $p \geqslant k$ 是奇素数，r 是正整数，证明

$$2^{m+1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j C_{m+j}^j \equiv 2^{r-1} \pmod p$$

证明 如果 $j<p$，那么 C_x^j 是 x 的整系数多项式，其系数可被 $j!$ 整除．这个数是和 p 互素的，这意味着当 x 是整数时，C_x^j 和 C_{p+x}^j 的差可被 p 整除．如果 $0 \leqslant j \leqslant k-1$，那么 $j<p$，并且我们有

$$(-1)^j C_{m+j}^j = C_{-1-m}^j \equiv C_{pr-1-m}^j = C_{2k-1}^j \pmod p$$

现在我们可以对模 p 计算和

$$2^{m+1}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j C_{m+j}^j = 2^{m+1}\sum_{j=0}^{k-1}C_{2k-1}^j = \frac{2^{m+1}2^{2k-1}}{2} =$$
$$2^{m+2k-1} = 2^{pr-1} \equiv 2^{r-1} \pmod p$$

(AMM 11125)

69．求出适合关系式

$$1\ 997^{1\ 001}(m^2-1)-2m+5=3C_{2\ 003^{2\ 004}}^n$$

的所有整数 m,n．

解 注意 2 003 是素数．由于 $1\ 001=\frac{2\ 003-1}{2}$，因此由欧拉判据可知

$$1\ 997^{1\ 001} \equiv \left(\frac{1\ 997}{2\ 003}\right) \equiv 1 \pmod{2\ 003}$$

其中$\left(\frac{1\ 997}{2\ 003}\right)$表示勒让德符号．同时熟知当 p 是素数，$k>0$，$0<n<p^k$ 时，$p \mid C_{p^k}^n$．因此对 $0<n<2\ 003^{2\ 004}$，$C_{2\ 003^{2\ 004}}^n \equiv 0 \pmod{2\ 003}$．

那样，当 $0<n<2\ 003^{2\ 004}$ 时，所给的关系式就要求

$$m^2-1-2m+5 \equiv 0 \pmod{2\ 003}$$

或等价地 $$(m-1)^2 \equiv -3 \pmod{2\ 003}$$

由于$\left(\frac{-3}{2\ 003}\right)=-1$，因此上述同余式方程无解．另一方面，当 n 是0或 $2\ 003^{2\ 004}$ 时，由所给关系式所得的二次方程的仅有的解是 $m=$

1. 因而适合所给关系式的所有整数就是 $(m,n)=(1,0)$ 和 $(m,n)=(1,2\,003^{2\,004})$.

(AMM E1896)

> 70. 证明:如果 p 是一个素数,那么 $C_{np}^{p}\equiv n(\mathrm{mod}\ p^2)$.

证明 从恒等式 $(1+x)^{np}=((1+x)^p)^n$ 可以得出

$$C_{np}^{p}=\sum_{k_1+\cdots+k_n=p}C_p^{k_1}\cdots C_p^{k_n}$$

由于当 $0<k<p$ 时 C_p^k 可被 p 整除,故在上述和式中,除了 n 项之外,每一项都可被 p^2 整除,这 n 项中的每一项是当 $k_i=p$ 时得到的,因此这 n 项中的每一项都是1,由此就得出

$$C_{np}^{p}\equiv n(\mathrm{mod}\ p^2)$$

(AMM E1854)

> 71. 设 p 是一个奇素数,k 是任意正整数,证明:
>
> (1) $\sum\limits_{i=0}^{\frac{p^k-1}{2}}(-1)^iC_{2i}^{i}\equiv 5^{\frac{k(p-1)}{2}}(\mathrm{mod}\ p)$.
>
> (2) $\sum\limits_{i=0}^{\frac{p^k-1}{2}}(-1)^iC_{2i}^{i}\equiv (-3)^{\frac{k(p-1)}{2}}(\mathrm{mod}\ p)$.

证明 我们有

$$5^{\frac{k(p-1)}{2}}\equiv 5^{\frac{p^k-1}{2}}\equiv(1+4)^{\frac{p^k-1}{2}}\equiv\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(p^k-1)}C_{(p^k-1)/2}^{j}4^j(\mathrm{mod}\ p)$$

$$3^{\frac{k(p-1)}{2}}\equiv 3^{\frac{p^k-1}{2}}\equiv(-1+4)^{\frac{p^k-1}{2}}\equiv\sum_{j=0}^{\frac{1}{2}(p^k-1)}(-1)^jC_{(p^k-1)/2}^{j}4^j(\mathrm{mod}\ p)$$

因此只须证明 $4^jC_{(p^k-1)/2}^{j}\equiv(-1)^jC_{2j}^{j}(\mathrm{mod}\ p)$ 即可.

我们回忆如果

$$a=a_0+a_1p+\cdots+a_rp^r,\quad 0\leqslant a_i<p$$
$$b=b_0+b_1p+\cdots+b_rp^r,\quad 0\leqslant b_i<p$$

那么

$$C_a^b\equiv C_{a_0}^{b_0}C_{a_1}^{b_1}\cdots C_{a_r}^{b_r}(\mathrm{mod}\ p)\qquad(*)$$

那样 $j=j_0+j_1p+\cdots+j_{k-1}p^{k-1}(0\leqslant j_i<p)$ 就蕴含

$$C_{(p^k-1)/2}^{j}\equiv C_{(p-1)/2}^{j_0}C_{(p-1)/2}^{j_1}\cdots C_{(p-1)/2}^{j_{k-1}}$$

但是 $C_{(p-1)/2}^{j}\equiv C_{-\frac{1}{2}}^{j}\equiv(-1)^j2^{-2j}C_{2j}^{j}(\mathrm{mod}\ p)$

因此 $$C^j_{(p^k-1)/2} \equiv \left(-\frac{1}{4}\right)^{j_0+\cdots+j_{k-1}} C^{j_0}_{2j_0} C^{j_1}_{2j_1} \cdots C^{j_{k-1}}_{2j_{k-1}}$$

注意,除非每个 $j_i \leqslant \frac{1}{2}(p-1)$,否则上述乘积将 $\equiv 0$.因此再次应用式(*)就得出

$$C^j_{(p^k-1)/2} \equiv (-1)^j C^j_{2j} \pmod p$$

(AMM 10997)

72.设 p 是一个形如 $k\cdot 2^n+1$ 的素数,其中 k 是奇数,$k>1$.又 p 整除费马数 $F_m=2^{2^m}+1$,其中 $n\geqslant m+2$.证明:$k^{2^{n-1}}\equiv 1 \pmod p$.

证明 我们有

$$(-1)^{2^{n-1}} \equiv (k\cdot 2^n)^{2^{n-1}} = k^{2^{n-1}}(2^{2^m})^{a2^{n-m-1}} \equiv k^{2^{n-1}}(-1)^{a2^{n-m-1}} \pmod p$$

由 $n\geqslant m+2\geqslant 2$ 即可得出所要的结果.

注 一些读者指出 $k>1$ 和 k 是奇数的假定可以去掉,同时 p 是素数的假定可以用 p 是奇数的条件代替.此外,由卢卡斯(Lucas)定理可知,当 $m\geqslant 2$ 时,F_m 的素因数必具有 $k2^{m+2}+1$ 的形式,因此当 p 是素数以及 k 是奇数时,条件 $n\geqslant m+2$ 可以去掉.

(AMM E1496)

73.设 a,b 是互素的整数,证明:存在整数 m,n 使得 $a^m+b^n\equiv 1 \pmod{ab}$.

证明 设 $m=\varphi(b)$,$n=\varphi(a)$,那么由欧拉定理,$a\mid(b^n-1)$,$b\mid(a^m-1)$,由此就得出 $ab\mid(a^m+b^n-1)$,这就是所要证的.

74.设 $m>1$ 是一个整数,那么存在一个正整数 l 使得当且仅当 m 不含平方因子时,对所有整数 x 都成立 $x^{l+1}\equiv x \pmod m$.对无平方因子的 m,设 $m=p_1p_2\cdots p_r$,其中 p_i 是不同的素数,那么使得 $x^{l+1}\equiv x \pmod m$ 成立的最小的 l 就等于整数 $p_1-1,p_2-1,\cdots,p_r-1$ 的最小公倍数.(AMM Edwin Hewitt , Certain congruences that hold identically ,Vol. 83(1976),No.4:270-271)

证明 必要性可以立刻得到.如果 p 是一个使得 $p^2\mid m$ 的素数,设 $r=\frac{m}{p}$,则我们有

$$r^2 = m\left(\frac{m}{p^2}\right) \equiv 0(\bmod m)$$

而 $r \not\equiv 0(\bmod m)$，那样对所有的正整数 l，我们就有 $r^{l+1} \equiv 0 \not\equiv r(\bmod m)$.

为了证明充分性，首先假设 p 是一个任意的素数. 对 $(x,p)=1$ 和任意正整数 h，由费马定理可知

$$x^{h(p-1)} \equiv 1(\bmod p)$$

因此

$$x^{h(p-1)+1} \equiv x(\bmod p)$$

如果 $(x,p) \neq 1$，那么 $p \mid x$，那么对整数 x 上式显然成立.

如果 $p_1,p_2,\cdots,p_r$ 是不同的素数，而 l 是 $p_1-1,p_2-1,\cdots,p_r-1$ 的最小公倍数，那么上式表明对 $i=1,2,\cdots,r$ 成立

$$x^{l+1} \equiv x(\bmod p_i)$$

因此由于 $m=p_1p_2\cdots p_r$ 就有

$$x^{l+1} \equiv x(\bmod m)$$

最后假设上式对某个 l 成立，则我们也有 l 是 $p_1-1,p_2-1,\cdots,p_r-1$ 的最小公倍数. 设 x_i 是模 p_i 的原根，即一个和 p_i 互素的整数，使得由 $x_i^s \equiv 1(\bmod p_i)$ 蕴含 s 是 p_{i-1} 的倍数. 对那种 s，由 $x^{l+1} \equiv x(\bmod m)$ 得出

$$x_i^{l+1} \equiv x_i(\bmod p_i),\ x_i^l \equiv x_i^{l+1+s-1} \equiv x_i^s \equiv 1(\bmod p_i)$$

因此 l 必须是 p_i-1 的倍数.

(AMM E1621)

> 75. 对所有的正奇数 n，使得 $82^n + a69^n$ 可被 1 963 整除的最小的 a 是什么？

解法1 注意 $1\ 963 = 151 \cdot 13$. 由于对所有的奇数 n，有 $82^n + 69^n \equiv 0(\bmod 151)$ 和 $82^n - 69^n \equiv 0(\bmod 13)$，因此我们必须有 $a \equiv 1(\bmod 151)$ 和 $a \equiv -1(\bmod 13)$，满足此同余式组的最小的正整数是 $a=454$.

解法2 我们利用引理：如果 x^2-y^2 整除 $x+ay$，那么对所有的 n，它就能整除 $x^{2n+1}+ay^{2n+1}$. 对此问题，令 $x=82$，$y=69$，那么 $x^2-y^2=1\ 963$. 我们需要求出能使得 1 963 整除 $82+69a$ 的最小的 a，这就导致 $a=454$.

(AMM E3014)

> 76. 证明：当 $n \geqslant 1$ 时，同余式 $3^x \equiv 19(\bmod 2^n)$ 是可解的.

证明 我们将证明更强的命题：当 $n \geqslant 1$ 时，当且仅当 $y \equiv 1$ 或 $3(\bmod 8)$ 时，同余式 $3^x \equiv y(\bmod 2^n)$ 是可解的. 为此，我们首

先证明下面的引理：

引理 对 $k \geq 1, 2^{k+2} \| (3^{2^k} - 1)$（即 $2^{k+2} \mid (3^{2^k} - 1)$，但是 $2^{k+3} \nmid (3^{2^k} - 1)$）.

引理的证明 对 $k = 1$，引理显然成立，然后由

$$3^{2m} - 1 = (3^m - 1)((3^m - 1) + 2)$$

和数学归纳法即可证明引理.

这个引理说明在模 2^n 下，3 的阶是 2^{n-2}. 因此在模 2^n 下，3^x，$1 \leqslant x \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)2^n$ 是两两不同的. 另一方面，3 的所有的幂都 $\equiv 1$ 或 $3 \pmod 8$，因此每个 $\equiv 1$ 或 $3 \pmod 8$ 的数 y 作为模 2^n 下的 3 的幂 3^x，$1 \leqslant x \leqslant 2^{n-2}$，都恰只出现一次，反之亦然.

（AMM E3089）

77. 确定所有的正偶数 n，使得 n 具有性质：对任何满足条件 $1 < b < n$，$(b, n) = 1$ 的整数 b，同余式 $(b-1)x \equiv \frac{n}{2} \pmod n$ 都有解.

解 设 $n = 2m$，那么当且仅当 $d \mid m$ 时，$(b-1)x \equiv m \pmod n$ 有解，其中 $d = (b-1, n)$.

如果 $n = 2^k$，那么 $d = 2^j$，其中 j 是某个满足不等式 $1 \leqslant j < k$ 的整数，因此 $d \mid m$.

反过来，假设 $n = 2^k c$，其中 $c > 1$ 是奇数，则存在 t，$1 \leqslant t < c$ 使得 $2^k t \equiv 1 \pmod c$. 设 $b = 2^k t + 1$，那么 $1 < b < n$，$(b, n) = 1$，但是 $d = 2^k \nmid m$.

那样，当且仅当 n 是 2 的幂时，n 才具有所说的特殊性质.

注 Stephen M. Gagola, Jr. 证明了以下推广：确定所有的正整数对 (n, d)，其中 $d \mid n$，$d \neq n$，使得 (n, d) 具有性质，对任何满足关系 $(b, n) = 1$，$1 < b < n$ 的整数 b，同余式 $(b-1)x \equiv d \pmod n$ 存在解. 结果是当且仅当

(1) $n = p^a$，并且 $d = p^{a-1}$，其中 p 是任意素数，而 a 是任意正整数；或者

(2) $n = 2p^a$，并且 $d = 2p^{a-1}$，其中 p 是任意奇素数，而 a 是任意正整数时，(n, d) 具有所说的性质.

R. B. McNeill 证明了以下推广：设 $n = 2^a q$，$a \geq 1$，q 是奇数，并设 $T(n)$ 是正整数 b 的数目，其中 b 满足关系 $(b, n) = 1$，$1 < b < n$ 并使得同余式 $(b-1)x \equiv \frac{n}{2} \pmod n$ 有解，那么 $T(n) = (2^{a-1} - 1)\varphi(q)$，其中 φ 表示欧拉函数.

(AMM E2763)

78. 设 $f(n)=n^3+396n^2-111n+38$，证明：当 $a\geqslant 5$ 时，同余式方程 $f(x)\equiv 0(\bmod 3^a)$ 恰有 9 个解.

证明 如果 $s\geqslant 3$，则存在 x 使得 $f(x)\equiv 0(\bmod 3^{s+2})$，并且如果 $f(y)\equiv 0(\bmod 3^{s+2})$，则 $x\equiv y(\bmod 3^s)$.

实际上，当且仅当 $n\equiv 19(\bmod 27)$ 时，$f(n)\equiv 0(\bmod 243)$. 现在假设定理对 $s\geqslant 3$ 成立，那么存在 x_0 使得

$$f(x_0+k3^s)\equiv f(x_0)+k3^sf'(x_0)(\bmod 3^{s+3})$$

并且由于 $x_0\equiv 1(\bmod 9)$，我们可以证明 $3^2\mid f'(x_0)$，但是 $3^3\nmid f'(x_0)$，因此同余式方程

$$f(x)+k3^sf'(x)\equiv 0(\bmod 3^{s+1})$$

可以对 $k(\bmod 3)$ 唯一地解出. 如果 $f(z)\equiv 0(\bmod 3^{s+2})$，那么由归纳法假设可知 $z=x_0+a\cdot 3^s$，因此 $a\equiv k(\bmod 3)$ 而 $z\equiv x_0+k\cdot 3^s(\bmod 3^{s+1})$. 由数学归纳法就证明了定理.

现在如果 $s\geqslant 5$ 并且 $f(y)\equiv 0(\bmod 3^s)$，那么

$$f(y+m\cdot 3^{s-2})\equiv f(y)+m\cdot 3^{s-2}f'(y)\equiv 0(\bmod 3^s)$$

而由于 $3^2\mid f'(y)$，所以在模 3^{s-2} 下，y 是唯一确定的，而同余式方程 $f(x)\equiv 0(\bmod 3^s)$ 恰有 9 个解.

(AMM 11021)

79. 求出同余式方程组 $xy\equiv 2(\bmod z)$，$yz\equiv 2(\bmod x)$，$zx\equiv 2(\bmod y)$ 的所有正整数解.

解 设 (x,y,z) 是解，由于未知数都是不同的，并且至少是 3，因此可设 $3\leqslant x<y<z$.

由恒等式

$$4(xy+yz+zx)-8=(xy-2)(yz-2)(xz-2)-xyz(xyz-2x-2y-2z)$$

我们看出 $4(xy+yz+zx)-8$ 是 xyz 的倍数，因此

$$4(xy+yz+zx)-8\geqslant xyz$$

或者

$$4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-\frac{8}{xyz}\geqslant 1$$

当 $12\leqslant x<y<z$ 时，上式不可能成立，因此必有 $3\leqslant x\leqslant 11$.

由于 $xy\equiv 2(\bmod z)$，故可设 $xy-2=kz$，那么

$$k=\left(\frac{y}{z}\right)x-\frac{2}{z}<x$$

由 $x^2y-2x=kxz$ 和 $zx\equiv 2(\bmod z)$，我们又有 $-2x\equiv 2k(\bmod y)$，这说明

$$y \leqslant 2x + 2k \leqslant 4x - 2$$

由 $3 \leqslant x \leqslant 11$ 和 $y \leqslant 4x - 2$ 再加上 $z \leqslant xy - 2$,可知只要通过有限次实验即可求出原同余式方程组的所有解为(3,8,22),(3,10,14),(4,5,18),(4,6,11),(6,14,82)和(6,22,26).

注 (1)共大约有20 000组增加的解组满足最后的三个不等式的不等式组,利用计算机容易进行检验工作.

(2)一般的,对同余式方程组

$$xy \equiv a(\bmod z), yz \equiv a(\bmod x), zx \equiv a(\bmod y)$$

如果 $x < y < z$,那么可证明

$$x \leqslant 3\max\{ab, bc, ca\}, y \leqslant (a+b)x - b, z \leqslant xy - a$$

(AMM 4883)

80. 设 $F = [1; a_1, a_2, \cdots, a_n, a_n, \cdots, a_2, a_1]$,$\frac{P_n}{Q_n}$ 是 F 的第 n 阶渐进分数,证明:

$$\operatorname{arccot} Q_{2n} = \operatorname{arccot} P_{2n} + \operatorname{arccot} P_{2n+1}$$

证明 由渐进分数的递归公式

$$Q_{2n+1} = a_1 Q_{2n} + Q_{2n-1}, Q_{2n} = a_2 Q_{2n-1} + Q_{2n-2}, \cdots,$$
$$Q_3 = a_2 Q_2 + Q_1, Q_2 = a_1 Q_1$$

我们有 $$\frac{Q_{2n+1}}{Q_{2n}} = [a_1; a_2, \cdots, a_n, a_n, \cdots, a_2, a_1] =$$
$$\frac{1}{F-1} = \frac{Q_{2n+1}}{P_{2n+1} - Q_{2n+1}}$$

这就得出 $$Q_{2n} = P_{2n+1} - Q_{2n+1}$$

从上面的式子中消去 Q_{2n+1},并利用 $P_{2n+1}Q_{2n} - P_{2n}Q_{2n+1} = -1$ 就得出

$$Q_{2n} = \frac{P_{2n}P_{2n+1} - 1}{P_{2n} + P_{2n+1}}$$

这个式子就等价于我们要证的式子.

(AMM 5111)

81. 证明:如果 $\frac{P_n}{Q_n}$ 是 $\sqrt{x^2+1}$ 的连分式展开式的第 n 阶渐近分数,那么

$$\operatorname{arccot} P_{2n-1} = 2\operatorname{arccot} Q_{2n} - \operatorname{arccot} P_{2n+1}$$

证明 题目中所说的连分数是 $[x; 2x, 2x, \cdots]$,我们需要利用以下关系:

(1) $P_{2n+1} = 2xP_{2n} + P_{2n-1}$;

(2) $P_{2n}^2 - P_{2n-1}P_{2n+1} = x^2 + 1$;

(3) $P_{2n}^2 - (x^2 + 1)Q_{2n}^2 = 1$;

(4) $(x^2 + 1)Q_{2n} = xP_{2n} + P_{2n-1}$.

((1)和(2)可以对 n 做归纳法得出,(3)和(4)可见 Barnard 和 Child 所著的 Higher Algebra,534-535).由上述四个式子不难得出

$$\frac{P_{2n-1}P_{2n+1} - 1}{P_{2n-1} + P_{2n+1}} = \frac{Q_{2n}^2 - 1}{2Q_{2n}}$$

这也就是

$$\cot(\operatorname{arccot} P_{2n-1} + \operatorname{arccot} P_{2n+1}) = \cot(\operatorname{arccot} Q_{2n})$$

由此即可得出欲证的结果.

(AMM E1371)

82. 把自然数顺序地写下来得到一个数列 12345678910111213141516171810202 1…,问在这个数列中的第 $10^{1\,000}$ 个数字是什么?

解 可以用数学归纳法证明在此数列中自然数 $n+1$ 之前共有 $S_n = \frac{(9n-1)10^n + 1}{9}$ 个数字.现在 $S_{997} < 10^{1\,000} < S_{998}$,因此第 $10^{1\,000}$ 个数字出现在一个998位的整数中.而事实上是 $10^{997} + q$ 的第 r 个数,其中 $10^{1\,000} - S_{997} = 998q + r, 0 \leqslant r < 998$.对 q 和 r 的估计表明第 $10^{1\,000}$ 个数字是整数

100 31 173 45 802 71 654 41 995 10 131 37 385…

的第31个数,因此所求的答案是3.

注 在1987年举办的普特南数学竞赛中有一道与此类似的题目(第48届普特南数学竞赛题 A-2)

(AMM E1180)

83. 把1 000!写成十进制数字后的第2 319位数是几?

解 由Stirling公式可求出1 000!的十进制数字共有2 568位数字.由于1 000!共含有249个因子5,500个以上的因子2,因此1 000!的十进制数字后面共有249个0.此外由于2 568 - 249 = 2 319,因此我们所求的数就是1 000!的十进制数字中最后一个非零数字.显然,这个数是偶数,并且依赖于1,2,3,…,1 000的每个数中去掉了因子5之后所得数字的末尾数.把这些因子每10个连续的数分成1组

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \equiv 6 \pmod{10}$$

一共有100个类似上式的乘积,其中有200个数可被5整除,并且

如果5以后每次分解因数后都被去掉，那么要去掉200!个5.那样，我们剩下20多个类似上面的乘积，剩下40个可被5整除的数.同理，如果5以后每次分解因数后都被去掉，那么要去掉40!个5.我们现在得到4个类似上面的乘积，剩下8个可被5整除的数，如果5以后每次分解因数后都被去掉，那么要去掉8!个5.再一次去掉5，我们剩下

$$1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\equiv4\pmod{10}$$

现在$4\cdot6^{124}\equiv4\pmod{10}$，因此$\frac{1\,000!}{5^{249}}$的最后一位数是4，但是$2^{249}$也必须除去，以补上$5^{249}$，由于$2^{249}\equiv2\pmod{10}$.这就可以得出$\frac{1\,000!}{10^{249}}$的最后一位数，也就是我们所求的数，这个数是2.

（AMM E1407）

84. 设$p>3$是素数，则ab^p-ba^p可被$6p$整除.

证明 由于$b(b^2-1)$是b^p-b的因子，所以$b^p-b\equiv0\pmod 6$，又由费马小定理知$b^p-b\equiv0\pmod p$.再由$(6,p)=1$就得出$b^p-b\equiv0\pmod{6p}$，再加上

$$ab^p-ab\equiv0\pmod{6p}$$

和

$$-ba^p+ab\equiv0\pmod{6p}$$

就得出

$$ab^p-a^pb\equiv0\pmod{6p}$$

（AMM E1354）

85. 设$p>3$是素数，$(1+x)^{p-2}=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{p-2}x^{p-2}$，那么$a_1+2,a_2-3,a_3+4,\cdots$都是$p$的倍数.

证法1 由明显的同余式$p-i\equiv-i\pmod p$，$i=2,3,\cdots,k+1$可以得出

$$(p-2)!(p-k-2)!\equiv(-1)^k(k+1)!\pmod p$$

又对$k<p$，我们有$(k!,p)=1$，那样就得出

$$\frac{(p-2)!}{(p-k-2)!k!}\equiv(-1)^k(k+1)\pmod p$$

这就说明$a_k+(-1)^{k+1}(k+1)$是p的倍数.

证法2 $a_k+(-1)^{k+1}(k+1)=C_{p-2}^k+(-1)^{k+1}=$

$$\frac{(p-2)(p-3)\cdots(p-(k+1))}{k!}+(-1)^{k+1}(k+1)$$

把上式中的分子看成p的多项式，则显然除了常数项之外，其余

所有的项都是 p 的倍数. 将两项通分后相加,常数项抵消,因此 $a_k+(-1)^{k+1}(k+1)$ 是 p 的倍数.

(AMM E1320)

86. (1) 设 $P(x)$ 是一个整系数多项式,m 是任意正整数. 证明:存在无限多个整数 t,使得 $P(t),P(t+1),\cdots,P(t+m)$ 都是合数.

(2) 设 $P(x)=x^2+1,m=5$,求出一个具有(1)中性质的 t.

证明　(1) 设 k 是任意使得 $|P(k)|>1$ 且 $x\geqslant k$ 蕴含 $|P(x)|$ 单调增加的整数. 又设 u 是 $|P(k)|,|P(k+1)|,\cdots,|P(k+m)|$ 的最小公倍数. 令 $t=u+k$,对 $i=0,1,2,\cdots,m$,考虑 $P(t+i)$. 我们有 $P(t+i)\equiv P(k+i)\pmod u$,那样 $P(k+i)$ 是 $P(t+i)$ 的真因子,因此 $P(t+i)$ 是合数.

(2) 在 $P(x)=x^2+1$ 和 $m=5$ 的情况,可选 $k=1,t=[2,5,10,17,26,37]+1=81\ 771$.

(AMM E1748)

87. 设 $P_1(x),P_2(x),\cdots,P_n(x)$ 是有限个都不是常数的整系数多项式. 证明:存在正整数 m,使得 $P_1(m),P_2(m),\cdots,P_n(m)$ 都是合数.

证明　由于 $P_i(m),i=1,2,\cdots,n$ 是合数的充分必要条件是 $-P_i(m)$ 是合数,因此我们可设 $P_1(x),P_2(x),\cdots,P_n(x)$ 的首项系数都是正整数. 由于当 $x\to\infty$ 时,$P_i(x)\to\infty$. 因此存在正整数 a,使得当 $x\geqslant a$ 时,$P_i(x)\geqslant 2,i=1,2,\cdots,n$. 现在设 M 是 $P_1(a),P_2(a),\cdots,P_n(a)$ 的最小公倍数,那么对每个正整数 k 和每个 $i,i=1,2,\cdots,n$,有

$$P_i(a+kM)=P_i(a)+N_iM\equiv 0\pmod{P_i(a)}$$

因此
$$P_i(a)\mid P_i(a+kM)$$

此外还有
$$2<P_i(a)<P_i(a+kM)$$

因此对每一个正整数 k,$P_1(a+kM),P_2(a+kM),\cdots,P_n(a+kM)$ 都是合数.

(AMM E3012)

88. 证明:(1) 不存在整数 $n>1$,使得 $2^n-1\mid 3^n-1$.

(2) 更一般的,当 $n>1$ 并且 m,n 的奇偶性相同时,2^n-1 不能整除 3^m-1.

证法1　假设对某个 $n>1,A_n=2^n-1\mid 3^n-1=B_n$. 如果

n 是偶数,我们有 $3 \mid A_n, 3 \nmid B_n$.

因此 n 必是奇数,比如说 $n = 2m - 1$. 由于 $2^4 \equiv 2^2 \pmod{12}$,因此我们有 $A_n \equiv -5 \pmod{12}$. 由于每个大于3的素数都同余于 ± 1 或 $\pm 5 \pmod{12}$,因此 A_n 必至少存在一个素因子 p 使得 $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$. 由于 $p \mid 3B_n$,我们有 $3 \equiv 3^{n+1} \equiv 3^{2m} \pmod{p}$,那就是说,3是模 p 的二次剩余,由于 $p \equiv \pm 5 \pmod{12}$,这与二次互反律矛盾.

证法2 如果 n 是偶数,那么 $3 \mid (2^n - 1)$,那样无论 m 是奇数还是偶数,$2^n - 1$ 都不可能整除 $3^m - 1$.

如果 n 是大于1的奇数,那么 $A = 2^n - 1 \equiv 1 \pmod{3}$,因而 A 是模3的二次剩余,所以 $\left(\frac{A}{3}\right) = 1$. 由二次互反律得出

$$\left(\frac{3}{A}\right) = \left(\frac{A}{3}\right) \cdot (-1)^{\frac{A-1}{2} \cdot \frac{3-1}{2}} = (-1)^{\frac{2^n-2}{2}} = (-1)^{2^{n-1}-1} = -1$$

所以3是模 A 的非二次剩余.

假设当 $m = 2k - 1$ 时,$(2^n - 1) \mid (3^m - 1)$,这就得出 $A \mid (3^{2k} - 3)$,因而 $(3^k)^2 \equiv 3 \pmod{A}$,这就说明3是模 A 的二次剩余,矛盾. 因此如果 m, n 都是奇数,则 $2^n - 1$ 不可能整除 $3^m - 1$.

89. 求出所有的构成等差数列的4元数 x, y, z, w 的集合,使得

$$\triangle x + \triangle y + \triangle z = \triangle w$$

其中 $\triangle a = \frac{1}{2} a(a+1)$ 是三角数.

(AMM E1976)

解 设 $y = x + d, z = x + 2d, w = x + 3d$,则从所给的方程可以得出

$$x(x+1) + (x+d)(x+d+1) + (x+2d)(x+2d+1) = (x+3d)(x+3d+1)$$

由此得出 $\triangle x = d^2$ 或 $(2x+1)^2 - 2(2d)^2 = 1$.

由佩尔方程 $p^2 - 2q^2 = 1$ 的基本解或生成元 $(3,2)$ 得出,所有其他的解都可由

$$p_n + q_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

得出,那样二项式展开就给出

$$p_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} 3^{n-2k} 2^{3k}, \quad q_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k+1} 3^{n-2k-1} 2^{3k+1}$$

因此由

$$x_n = \frac{1}{2}(p_n - 1), \quad d_n = \frac{1}{2} q_n$$

$$y_n = x_n + d_n, \quad z_n = x_n + 2d_n, \quad w_n = x_n + 3d_n$$

就给出所求的解.

(AMM E2132)

90. 设 r,s 是正整数,rs 不是平方数,那么存在无限多组三角数

$$\Delta_a = \frac{1}{2}a(a+1), \Delta_b = \frac{1}{2}b(b+1)$$

使得

$$\frac{\Delta_a}{\Delta_b} = \frac{s}{r}$$

证明 把所给的方程重写成

$$r(2a+1)^2 - s(2b+1)^2 = r - s$$

这个方程有一个解 $a = b = 0$. 由于 rs 不是平方数,故由佩尔方程的理论可知,方程 $x^2 - rsy^2 = 1$ 存在最小解 x_0, y_0,而 $x^2 - rsy^2 = 1$ 的所有解可通过公式 $x_n + y_n\sqrt{rs} = (x_0 + y_0\sqrt{rs})^n$ 由 x_0, y_0 生成.

那样,无限多组原方程的解就可由以下公式生成

$$(\sqrt{r} + \sqrt{s})(x_n + y_n\sqrt{rs}) = u_n\sqrt{r} + v_n\sqrt{s}$$

$$2a + 1 = u_n, 2b + 1 = v_n$$

$$(\sqrt{r} - \sqrt{s})(x_n + y_n\sqrt{rs}) = w_n\sqrt{r} + z_n\sqrt{s}$$

$$2a + 1 = w_n, 2b + 1 = z_n$$

除非 rs 是偶数而 x_0, y_0 都是奇数. 在这种情况下,只有当 n 是偶数时才能由上述公式给出解.

上述两组公式所给出的解是不同的,除非 $r - s = 1$.

(AMM E2016)

91. 设 $\triangle a = \frac{1}{2}a(a+1)$ 表示三角数. 求方程组

$$\triangle a + \triangle b = \triangle c + \triangle d, x^2 + y^2 = z^2 + w^2$$

$$\triangle a + x + \triangle b + y = \triangle c + z + \triangle d + w$$

解 令 $A = 2a+1, B = 2b+1, C = 2c+1, D = 2d+1$, 那么经过消去平方项后,我们得到下面的等价方程组

$$A^2 + B^2 = C^2 + D^2, x^2 + y^2 = z^2 + w^2$$

$$Ax + By = Cz + Dw$$

其中第二个方程已知有参数解为

$$x = \frac{1}{2}(rs + pq), y = \frac{1}{2}(qs - pr)$$

$$z = \frac{1}{2}(rs - pq), w = \frac{1}{2}(qs + pr)$$

其中 p,q,r,s 都是整数并且满足 $rs + pq \equiv qs + pr \pmod 2$. 同理第一个方程也有参数解

$$A = \frac{1}{2}(ij + gh), B = \frac{1}{2}(hj - gi)$$

$$C=\frac{1}{2}(ij-gh),D=\frac{1}{2}(hj+gi)$$

其中 g,h,i,j 都是整数并且由于 A,B,C,D 都是奇数因而满足

$$ij\pm gh\equiv hj\pm gi\equiv 2(\bmod 4)$$

把这些表达式代入第三个方程就得出

$$(gs-jp)(hr-iq)=0$$

我们可以选择任意两个不同时都是 4 的倍数的整数作为 g，i，然后再选择任意使得 $\frac{s}{p}=\frac{j}{q}$ 的整数来生成原方程组的解.

(AMM E2618)

92. 形如 $\frac{1}{2}k(k+1)$，k^2，$\frac{1}{2}k(3k-1)$ 的数分别称为三角数、正方形数和五边形数. 求出所有同时是这三种形式的数的正整数.

解 设对正整数 p,q,r 成立

$$p^2=\frac{1}{2}q(q+1)=\frac{1}{2}r(3r-1)$$

那么

$$(2q+1)^2=1+8p^2$$

$$(6r-1)^2=1+24p^2$$

以及

$$(6r-1)^2=(4p)^2+(2q+1)^2$$

由于由 $(2q+1)^2=1+8p^2$ 得出 $(2q+1,4p)=1$，由 $(6r-1)^2=1+24p^2$ 得出 $(6r-1,4p)=1$. 因此 $(4p,2q+1,6r-1)$ 是互素的勾股数，那样

$$4p=2mn,2q+1=m^2-n^2,6r-1=m^2+n^2$$

其中 m,n 是正整数，$(m,n)=1$，$m-n$ 是奇数. 把上面的式子代入 $(2q+1)^2=1+8p^2$ 得出

$$m^4-4m^2n^2+n^4=1$$

在 L. Mordell，Diophantine，Academic Press，1969，210，Theorem 9 中证明了方程

$$y^2=Dx^4+1$$

至多有两个正整数解，其中 $D>0$，并且 D 不是一个完全平方数. 把 $m^4-4m^2n^2+n^4=1$ 写成

$$(m^2-2n^2)^2=3n^4+1$$

那么由于方程 $y^2=3x^4+1$ 的仅有的正整数解为 $(x,y)=(2,7)$ 或 $(1,2)$，我们就得出上述方程的使得 $m>n>0$ 的解只有 $m=2,n=1$.

那样，同时具有三角数、正方形数和五边形数的正整数只有 1.

(AMM E1900)

93. 求出方程组 $x+y=z+u=w^2, x^2+y^2=z^2-u^2$ 的正整数解.

解 不妨设 $x\geqslant y$,那么

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{z^2-u^2}{z+u}=z-u$$

因此 $(x+y)\mid(x^2+y^2)$,因而

$$(x+y)\mid(2(x^2+y^2)-(x+y)^2)=(x-y)^2$$

那样,我们可设 $(x-y)^2=t(x+y)=tw^2$,因此 $t=s^2, s\geqslant 0$. 由于 $x\geqslant y$,故 $x-y=sw$. 由于 $x-y<x+y=w^2$,所以我们有 $s<w$.

我们又有

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}((x+y)^2+(x-y)^2)=\frac{1}{2}w^2(w^2+s^2)$$

因此

$$z-u=\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{1}{2}(w^2+s^2)$$

这说明 $s\equiv w \pmod 2$,因而我们可设 $w=s+2v, 0<v\leqslant\frac{w}{2}$,这样我们最后就得到

$$x=w^2-vw, y=vw, z=w^2-vw+v^2, u=vw-v^2$$

反过来,对每一对整数 $v, w, 0<v\leqslant\frac{w}{2}$,上述方程给出原方程组的一组使得 $x\geqslant y$ 的解. 易于看出 $(x,y,z,u)=(v,w)^2$,那样,$(v,w)=1$ 就对应了原方程组的互素解.

(AMM E1987)

94. 证明:方程

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^2=L^2$$

存在无穷多组解,其中 $L\neq 0$ 是有理数,而 a,b,x,y 都是两个整数的平方和.

证法1 设 a,b,x 是任意的两个整数的平方和,并且取 $y=x$,那么所给的方程就等价于 $L=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$,除了一些特殊情况之外,这确实提供了无穷多组解.

证法2 设 $L=\frac{L_1}{abxy}$,则所给的方程化为

$$(ax+by)(ax-by)(ay+bx)(ay-bx)=L_1^2$$

再设 $ax+by=m^2, ax-by=u^2, ay+bx=z^2, ay-bx=n^2$

则上面的方程又化为

$$m^4 + n^4 = z^4 + u^4, mnuz = L_1$$

再设 $m = A + B, n = C - D, z = C + D, u = A - B$

则上面的四次方程组又化为

$$AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2), (A^2 - B^2)(C^2 - D^2) = L_1$$

利用欧拉已给出的上述方程的解（见 R.D.Carmichael，Diophantine Analysis，Dover，82），并代回原变量，以及让他们都是平方和，经过很繁琐的计算，我们得到

$$x = (36(p^2 + q^2)^4 - 1)^2 + (216(p^2 + q^2)^6)^2$$
$$y = (1\,296(p^2 + q^2)^8 - 36(p^2 + q^2)^4)^2 + (6(p^2 + q^2)^2)^2$$
$$a = (216(p^2 + q^2)^6 + 12(p^2 + q^2)^2)^2 + 1$$
$$b = (36p^6 - 36q^6 - 540p^4q^2 + 540p^2q^4)^2 + (720p^3q^3 - 216pq^5 - 216p^5q)^2$$

（AMM E1416）

95. 证明：$x^2 + y^2 = z^n$ 总有非零解，其中 n 是一个正整数.

证法 1 如果 $n = 2k + 1, k = 0,1,2,\cdots$ 是奇数，那么 $(2^k)^2 + (2^k)^2 = 2^{2k+1} = 2^n$，如果 $n = 2k + 2, k = 0,1,2,\cdots$ 是偶数，那么

$$(4 \cdot 5^k)^2 + (3 \cdot 5^k)^2 = 5^{2k+2} = 5^n$$

证法 2 设 $z = a^2 + b^2$，那么由于两个平方和的积仍是一个平方和，因此 z^n 是一个平方和，即 $x^2 + y^2 = z^n$ 有非平凡整数解.

（AMM E2332）

96. 求出方程 $y^3 + 4y = x^2$ 的所有正整数解.

解 设 $y = nk^2$，其中 n 不是一个平方数. 由于 $k^2 \mid x^2$，这就得出 $x = mk$，因而原方程化为 $n(y^2 + 4) = m^2$. 由于 n 不是一个平方数，我们就有 $n \mid (y^2 + 4)$，但是 $n \mid y$，故 $n \mid 4$，因而 $n = 1$ 或 2. 当 $n = 1$ 时，我们有 $y^2 + 4 = m^2$，它显然没有正整数解. 当 $n = 2$ 时，我们有 $8k^4 + 8 = m^2$，由此得出 $8 \mid m^2$，因而 $m = 4z$，因而 $k^4 + 1 = 2z^2$. 已知方程 $u^4 + v^4 = 2w^2$ 的所有解具有形式 $u^2 = v^2 = w$.（例如见 Dickson，Introduction to the Theory of Number，1929，43，problem 4）那样就得出 $k = z = 1$，因而方程的唯一解是 $y = 2, x = 4$.

97. 考虑方程 $y^2+p^2=x^3$，其中 $p>2$ 是一个素数，x,y 是整数，$y\geqslant 0$. 又设 a 是一个正整数.

证明：(1) 如果 $p=12a^2-1$，那么 $(x,y)=(4a^2+1, 2a(4a^2-3))$ 是方程的解.

(2) 如果 $p=3a^2+1$，那么 $(x,y)=(4a^2+1, a(8a^2+3))$ 是方程的解.

(3) 如果 $p\equiv 3 \pmod 4$，那么(1)和(2)至多产生一个解.

(4) 如果 $p\equiv 1 \pmod 4$，那么(1)和(2)至多产生两个解.

(Hymie London，On the Diophantine equation $y^2+p^2=x^3$，AMM Vol.75，No.1:56).

证明 由于 $p>2$ 是素数，因此 p 是一个奇素数，且 $(y,p)=1$ 或 $p\mid y$.

如果 $(y,p)=1$，那么由 $y^2+p^2=x^3$ 就得出 $|y+pi|^2=y^2+p^2$ 是一个立方数，因此必有 $y+pi=(a+bi)^3$，由此得出 $p=b_1(3a_1^2-b_1^2)$，再由 p 是素数得出 $b_1=\pm 1$，因此 $y=a_1^3-3a_1$ 是偶数，因而又可设 $a_1=2a$，由此即得出(1).

如果 $p\mid y$，那么 $y=py_1$，这样我们得到 $p^2(y^2+1)=x^3$，这又蕴含 $x=px_1$，因而 $y_1^2+1=px_1^3$，由此又得出 p 是平方和因而 $p\equiv 1 \pmod 4$，这样 $y_1^2+1=px_1^3$ 又蕴含

$$y_1+i=(m+ni)(u+vi)^3$$

由此即可得出(2).

其余的结论可从初等数论的通常知识得出.

(AMM E2144)

98. 求方程 $\frac{x}{y}=\frac{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}+1}{(x^2-y^2)^{\frac{y}{x}}-1}$ 的正整数解.

解 容易把所给的方程简化为

$$(x-y)^{x+y}=(x+y)^{x-y}$$

$x-y$ 必须是正的，否则

$$(x+y)^{x-y}<1<(x-y)^{x+y}$$

考虑 $x-y$ 和 $x+y$ 的素因子，我们看出

$$x+y=k(x-y)$$

其中 k 是一个大于1的正整数，把此式代入上述方程，我们得出 $x-y=k^{\frac{1}{k-1}}$，如果 $k>2$，那么 $1<x-y<2$，这不可能. 因此只可能 $k=2$，这给出 $x-y=2$，$x+y=4$，因此我们得出唯一解 $x=3$，$y=1$.

(AMM E2532)

99. 解不定方程

(1) $x^m(x^2+y)=y^{m+1}$.

(2) $x^m(x^2+y^2)=y^{m+1}$.

解 (1) 如果 $m=0$, 解为 $x=0$, y 任意.

如果 $m\geqslant 1$, 我们断言解为

$$x=b(b^m-1),y=b^2(b^m-1)$$

其中 b 是任意整数. 容易检验上式确实给出(1)的解. 反过来设 (x,y) 是(1)的不同于 $(0,0)$ 的解, 那么 $xy\neq 0$, 并且可设 $x=ac$, $y=bc$, 其中 a,b 互素并且 $a\geqslant 1$, $c\neq 0$. 由(1)得出

$$a^m(a^2c+b)=b^{m+1}$$

这就蕴含 $a=1$, $c=b(b^m-1)$. 因而(1)的所有解都具有形式

$$x=b(b^m-1),y=b^2(b^m-1)$$

(2) 如果 $m=0$, 仅有的解为 $x=0$, $y=1$.

如果 $m\geqslant 1$, 则(2)只有平凡解 $(0,0)$.

假设(2)存在非平凡解 (x,y), 那么 $xy\neq 0$, 因此我们仍然可设 $x=ac$, $y=bc$, 其中 a,b 互素并且 $a\geqslant 1$, $c\neq 0$. 由(2)得出

$$a^mc(a^2+b^2)=b^{m+1}$$

这蕴含 $a=1$, 那么 $1+b^2$ 整除 b^{m+1}. 由于 $b\neq 0$, 因而我们得出矛盾.

(AMM 10873)

100. 求出不定方程 $3^m=2n^2+1$ 的所有解, 其中 m,n 是非负整数.

解 首先证明 $0\leqslant m\leqslant 5$, $m\neq 3,4$, 分两种情况进行讨论:

(1) m 是偶数, $m\geqslant 4$. 于是可设 $m=2a$, $x=3^a$, 假如所给的方程有解, 则

$$x^2-2n^2=1$$

这是一个佩尔方程, 其所有的解可由递推公式

$$P_0=1,P_1=3,P_k=2P_{k-1}+P_{k-2},k\geqslant 2$$

给出. 因而存在某个非负整数 j, 使得 $x=P_j$. 由于 $a\geqslant 2$, 因此 $9\mid P_j$. 另一方面, 我们有

$$P_{k+12}=9\cdot 11\cdot 140\cdot P_{k+1}+5\ 741\ P_k$$

以及 P_5 是 $\{P_0,\cdots,P_{11}\}$ 之中唯一能被 9 整除的数. 据此用数学归纳法可证明 $j\equiv 5 \pmod{12}$. 由于 $P_5=99$ 又可被 11 整除, 因此用数学归纳法还可证明 $11\mid P_j$, 这与 $P_j=x=3^a$ 矛盾.

(2) m 是奇数, 可以直接验证 $m\neq 3$, 假设 $m\geqslant 7$. 于是可设

$m = 2b + 1, y = 3^b, z = 2n$，假如所给的方程有解，则

$$z^2 - 6y^2 = -2$$

这也是一个佩尔方程，其所有的解可由递推公式

$$Q_0 = 1, Q_1 = 2, Q_{2k} = 4Q_{2k-1} + Q_{2k-2}, k \geq 1$$

和

$$Q_0 = 1, Q_1 = 2, Q_{2k+1} = 2Q_{2k} + Q_{2k-2}, k \geq 1$$

由 $Q_{2k}, k = 0, 1, 2, \cdots$ 给出．因而存在某个非负整数 j，使得 $y = Q_{2j}$．由于 $b \geq 3$，因此 $27 \mid Q_{2j}$．另一方面，我们有

$$Q_{2k+9} = 27 \cdot 17 \cdot 19 \cdot Q_{2k+1} + 1\ 960Q_{2k}$$

和

$$Q_{2k+10} = 27 \cdot 17 \cdot 19 \cdot Q_{2k+2} + 3\ 920Q_{2k+1}$$

以及 Q_8 是 $\{Q_0, Q_1, \cdots, Q_8\}$ 之中唯一能被27整除的数．据此用数学归纳法可证明 $j \equiv 8 \pmod 9$．由于 $Q_8 = 8\ 721 = 27 \cdot 17 \cdot 19$ 又可被17整除，因此用数学归纳法还可证明 $17 \mid Q_{2j}$，这与 $Q_{2j} = y = 3^b$ 矛盾．

这样，综合以上两种情况的论述，我们就证明了必有 $0 \leq m \leq 5, m \neq 3, 4$．然后通过简单的计算即可说明所给方程的所有的解为 $(m, n) = (0,0), (1,1), (2,2), (5,11)$．

(AMM 11023)

> 101．求出不定方程 $x^2 + 3xy + 4\ 006(x + y) + 2\ 003^2 = 0$ 的所有整数解．

解 从原方程解出 y 得

$$-9y = 9\frac{x^2 + 4\ 006x + 2\ 003^2}{3x + 4\ 006} =$$

$$3x + 8\ 012 + \frac{2\ 003^2}{3x + 4\ 006}$$

如果 (x, y) 是解，那么从上式可知 $3x + 4\ 006$ 整除 $2\ 003^2$．由于2 003是素数，因此 $3x + 4\ 006 \in \{\pm 1, \pm 2\ 003, \pm 2\ 003^2\}$，经检验可知，只有 $1, -2\ 003, 2\ 003^2$ 符合要求，因此原方程的所有解为 $(-1\ 335, -446\ 224), (-2\ 003, 0)$ 和 $(1\ 336\ 001, -446\ 224)$．

注 一般的，对正整数 q，方程 $x^2 + 3xy + 2q(x + y) + q^2 = 0$ 只有有限组解，具体的解数依赖于 q 的算术性质．作为对比，方程 $x^2 + y^2 + 3xy + 2q(x + y) + q^2 = 0$ 却有无限多组解．

(AMM 11054)

> 102．确定不定方程
>
> $$1\ 998^2x^2 + 1\ 997x + 1\ 995 - 1\ 998x^{1\ 998} =$$
>
> $$1\ 998y^4 + 1\ 993y^3 - 1\ 991y^{1\ 998} - 2\ 001y$$
>
> 的所有整数解集合．

解 所给的方程不存在整数解. 设(x, y)是解, 由于 1 997 是素数, 因此由费马小定理可知 $x^{1\,997} \equiv x(\bmod 1\,997)$ 和 $y^{1\,997} \equiv y(\bmod 1\,997)$, 因而有 $x^{1\,998} \equiv x^2(\bmod 1\,997)$ 和 $y^{1\,998} \equiv y(\bmod 1\,997)$, 故有

$$x^2 + 0 - 2 - x^2 \equiv y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y(\bmod 1\,997)$$

或

$$(y - 1)^4 \equiv -1(\bmod 1\,997)$$

特别, $y - 1$ 和 1 997 是互素的, 因此由费马小定理有

$$(y - 1)^{1\,996} \equiv 1(\bmod 1\,997)$$

但是另一方面, 把$(y - 1)^4 \equiv -1(\bmod 1\,997)$两边自乘 499 次方又得出

$$(y - 1)^{1\,996} \equiv -1(\bmod 1\,997)$$

这就得出矛盾, 所得的矛盾就说明原方程不存在整数解.

(AMM E2624)

103. 数字 3 025 有一个奇妙的巧合, 即它可以分裂成两部分 30 和 25, 这两部分的和是 55, 而 $55^2 = 3\,025$ 恰好又得到原来的数. 这种数可通过解不定方程

$$a + b \cdot 10^k = (a + b)^2$$

而得出, 其中 $0 < a, b < 10^k$. 对 $k \leqslant 5$, 求出上述方程的所有解.

解 令 $x = a + b$, 则从所给的不定方程得出

$$x(x - 1) = b(10^k - 1)$$

对给定的 k, 可以唯一地确定一对有序的互素的正整数(u, v)使得

$$10^k - 1 = uv, u \mid x, v \mid x - 1$$

反过来, 由孙子定理可知, 满足上述条件的每一对(u, v)确定了唯一的正整数 x 使得

$$1 \leqslant x \leqslant 10^k - 1, x \equiv 0(\bmod u), x \equiv 1(\bmod v)$$

这就得出对固定的 k, 所给方程的解的数目就等于 $2^m - 1$, 其中 m 是 $10^k - 1$ 的素因子的个数. 我们有

k	1	2	3	4	5
m	1	2	2	3	3
$2^m - 1$	1	3	3	7	7

求解将分两步: 首先求出 $10^k - 1$ 的所有满足上述条件的因数分解, 然后根据所得的(u, v)解同余式方程组 $x \equiv 0(\bmod u)$, $x \equiv 1(\bmod v)$ 而求出 x. 解 $a + 10^k b$ 列表如下

$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
81	2025	088209	04941729	0023804641
	3025	494209	07441984	0300814336
	9801	998001	24502500	0493817284
			25502500	6049417284
			52881984	6832014336
			60481729	9048004641
			99980001	9999800001

注 Groenewoud 求出了以下的有关例子：

$$(1+29+50+29)^3=1\ 295\ 029$$
$$(2+92+42+07)^3=2\ 924\ 207$$
$$(3+65+22+64)^3=3\ 652\ 264$$
$$(3+58+15+77)^3=3\ 581\ 577$$

他还给出了 3 个连续的立方数的例子。

104. 连续的整数 31 和 32 具有如下性质：较大的数是一个平方的两倍以及这两个数的数字之和也是一个平方.

(1) 有多少对连续整数也具有同样的性质?

(2) 在 3 进位数字中，是否也存在那种数?

(3) 是否存在一个异于 3 的基，使得在此基下也有那种数字?

解 我们给出一个更一般的结果. 设在基 b 下表出了正整数，那么

(1) 如果 $b=2m$，$m\geqslant 1$，则存在无限多个整数对 n，$n+1$ 具有所说的性质.

(2) 如果 $b\equiv 1 \pmod 4$ 或 $b\equiv 3 \pmod 4$ 并且 $\mu(b)\neq 0$，则不存在那种整数对.

(3) 如果 $b=75$，则存在无限多个那种整数对.

证明 设 T_b 表示在基 b 下 n 和 $n+1$ 的各位数字之和.

(1) 定义 $n+1=2m^2(2m)^{2k}$，其中 $k=(4m-2)r^2-1$，$r\in \mathbf{Z}^+$，显然 $T_b=(4m-2)^2r^2$.

(2) 设 n，$n+1$ 具有所说的性质

$$n+1=2m^2=\sum_{j=0}^{s} d_jb^j, 0\leqslant d_j<b, d_s\neq 0, s=\sum_{j=0}^{s} d_j$$

假设 $b\equiv 1 \pmod 4$，显然 $n+1\equiv s \pmod 4$. 还有 $T_b\equiv 2s-1\equiv -1\neq \square$（表示平方数）$\pmod 4$. 矛盾. 那样，我们假设 $b\equiv 3 \pmod 4$，$\mu(b)\neq 0$. 定义 $s'=\sum_{j=0}^{t}(-1)^j d_j\equiv n+1 \pmod 4$，显然 $2s\equiv 2s'\equiv 0 \pmod 4$. 如果 $d_0>0$，则同上面一样得出矛盾. 如果 $d_0=0$，那么 $b\mid 2m^2$，$b\mid m$ 并且 $n+1$ 以偶数个（比如说 $2v$ 个）0 结尾，因此

$$T_b\equiv 2s-1+2v(b-1)\equiv -1 \pmod 4$$

我们又得出矛盾.

(3) 设 $n+1=2(15)^2(75)^{2k}$，其中

$$k=\frac{((125+148r)^2-85)}{148}\in \mathbf{Z}^+, r\geqslant 0$$

那么 $T_{75}=(125+148r)^2$.

注　D. L. Shell 发现例子 $(b,x)=(27,90),(847,7\,007),(867,1\,071),(891,11\,187)$，提出者注意到例子 $(54\,675,14\,580)$.

105. 对固定的 $n\geqslant 3$，说明如何得出不定方程

$$\sum_{i=1}^{n}x_i-x_j=y_j^2, 1\leqslant j\leqslant n$$

的所有解.

对 $n=10$，求出一组使得 x_i 是不同的正整数并且 $x_1+\cdots+x_{10}$ 最小的解.

(AMM E2664)

解　设 $S=x_1+\cdots+x_n$，把所给的方程相加我们得出

$$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

因此

$$x_j=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2-y_j^2, 1\leqslant j\leqslant n$$

那样上式就给出所有的解，其中 $y_1,\cdots,y_n$ 是使得 $n-1$ 整除 $y_1^2+\cdots+y_n^2$ 的整数.

现在设 $n=10$，如果 $x_1,\cdots,x_n$ 是不同的正整数，那么 $y_1^2,\cdots,y_n^2$ 也是不同的，并且我们可取 $y_1>y_2\cdots>y_{10}\geqslant 0$. 设 $d_i=y_1-y_{i+1}(1\leqslant i\leqslant 9)$ 以及 $D_1=\sum_{i=1}^{9}d_i$，$D_2=\sum_{i=1}^{9}d_i^2$，那么我们有

$$9S=10y_1^2-2D_1y_1+D_2, 9x_1=$$
$$9S-9y_1^2=(y_1-D_1)^2+D_2-D_1^2>0$$

由于 $D_1-d_9<\sqrt{D_1^2-D_2}$，我们必须有

$$y_1 > D_1 + \sqrt{D_1^2 - D_2}$$

从上面的式子我们就得到

$$D_1^2 - D_2 \equiv 0,1,4 \text{ 或 } 7 \pmod 9$$

利用计算机,我们从$\{1,2,\cdots,12\}$的220个9元素子集中求上述同余式的解.作为$d_1,\cdots,d_9$,对所得的96个解再算出满足$y_1 > D_1 + \sqrt{D_1^2 - D_2}$和$(y_1 - D_1)^2 \equiv D_1^2 - D_2 \pmod 9$的最小的$y_1$.在所有这些解中最小的$S = 8\ 656$在下表所列的情况中发生.

d_i		1	2	3	4	5	6	7	9	11
y_i	93	92	91	90	89	88	87	85	84	82
x_i	7	192	375	556	735	912	1 087	1 260	1 600	1 932

对其他的解,我们有$d_9 \geqslant 13$以及

$$D_1^2 - D_2 = 2\sum_{i<j} d_i d_j \geqslant 1\ 092 + 72 \cdot 13 = 2\ 028$$

因此由$y_1 > D_1 + \sqrt{D_1^2 - D_2}$得出

$$y_1 > 49 + \sqrt{2\ 028} > 94, S > y_1^2 \geqslant 95^2 = 9\ 025 > 8\ 656$$

(AMM E3063)

106.求出所有使得$1!3!5!\cdot\cdots\cdot(2n-1)! = m!$的自然数$n > 1$和$m > 1$.

解 满足所给方程的仅有的整数对(n,m)是$(2,3)$,$(3,6)$和$(4,10)$.为证明这一点,设$n \geqslant 5$.注意,对$n = 5$,$1!3!\cdots9! > 10!$,因此如果对某个m,$1!3!\cdots9! = m!$,那么必须$m \geqslant 11$;因此$11 \mid m$,而$11 \nmid 1!3!\cdots9!$,矛盾,由于13是一个素数,类似的论证也适用于$n = 6$,$1!3!\cdots11! > 12!$.

对$n \geqslant 7$,容易用数学归纳法证明$1!3!\cdots(2n-1)! > (4n)!$,而对每个$n$,Bertrand假定保证存在素数$p$,$2n < p < 4n$,因而可用类似上面的论证得出矛盾.

(AMM E3064)

107.求出所有大于1的整数m,使得m^3是m个连续整数的平方和.

解 我们要求所有的正整数m,使得对某个整数k

$$m^3 = (k+1)^2 + \cdots + (k+m)^2$$

把右边展开,化简后就得出一个二次方程

$$k^2+(m+1)k+\frac{1}{6}(m+1)(2m+1)-m^2=0$$

其解为 $k=-\frac{1}{2}(m+1)\pm\frac{1}{6}t$，其中 $t=\sqrt{33m^2+3}$.

从上面的方程可以得出当且仅当 t 是一个整数时，m 是一个整数，k 是一个整数.如果 k 是一个整数，那么 t 是一个有理数并且是一个整数的平方根，所以 t 是一个整数；反过来，如果 t 是一个整数，那么3整除 t^2，因此3整除 t，并且 $m+1$ 和 $\frac{t}{3}$ 的奇偶性相同.但是 $\frac{m+1}{2}$ 和 $\frac{t}{6}$ 或者都是整数，或者都是奇数的一半，因此 k 是一个整数.

那样，为了求出原方程的整数解，只须解不定方程

$$t^2-33m^2=3$$

就可以了.

由观察法可以得出 $t^2-33m^2=3$ 有一组显然解(6,1).为了求出其一般解，考虑佩尔方程

$$x^2-33y^2=1$$

其基本解(即使得 $x+\sqrt{33}y$ 最小的正解 (x,y))是 $(x,y)=(23,4)$.因此上面的佩尔方程的所有解是$(\pm 1,0)$和$(\pm x_n,\pm y_n)$，其中 $x_n+y_n\sqrt{33}=(23+4\sqrt{33})^n$，$n$ 是任意正整数.

从 $x^2-33y^2=1$ 的每个解 (x,y)，利用 $t^2-33m^2=3$ 的特解(6,1)就可得出 $t^2-33m^2=3$ 的形如

$$(6+\sqrt{33})(x+y\sqrt{33})=t+m\sqrt{33}$$

的解，其中 $t=6x+33y$，$m=x+6y$.

那样

$$t-m\sqrt{33}=(6-\sqrt{33})(x-y\sqrt{33})$$

因此

$$\begin{aligned}t^2-33m^2&=(t-m\sqrt{33})(t+m\sqrt{33})=\\&(6-\sqrt{33})(6+\sqrt{33})(x-y\sqrt{33})(x+y\sqrt{33})=\\&(6^2-1^2\cdot 33)(x^2-33y^2)=3\cdot 1=3\end{aligned}$$

因此 (t,m) 是 $t^2-33m^2=3$ 的解.

事实上 $t^2-33m^2=3$ 的每个解都可用这种方法获得.为此，设 (t,m) 是 $t^2-33m^2=3$ 的任意解，并设 $x=2t-11m$，$y=\frac{6m-t}{3}$.由于 $t^2-33m^2=3$，3整除 t^2，因此3整除 t，因而 x,y 都是整数.容易验证 (x,y) 是 $x^2-33y^2=1$ 的解，那样 $t=6x+33$，$m=x+6y$.从两个方程的解的变换公式显然可以看出 $t^2-33m^2=3$ 的每个使得 $m>1$ 的解都可从 $x^2-33y^2=1$ 的解 $(+x_n,+y_n)$ 获得，并且出现在解中的所有的 m 值都是奇的. x^2-

$33y^2=1$ 的平凡解(1,0)导致了 $t^2-33m^2=3$ 的平凡解(6,1).

这样我们得出问题中的 m 值由 $m_n=x_n+6y_n$ 给出,其中 $x_n+y_n\sqrt{33}=(23+4\sqrt{33})^n$,$n$ 是任意正整数.

为了计算的目的,我们容易获得下面的循环关系:

$$(x_1,y_1)=(23,4),(x_{n+1},y_{n+1})=(23x_n+132y_n,23y_n+4x_n)$$

$$(t_0,m_0)=(6,1),(t_{n+1},m_{n+1})=(23t_n+132m_n,23m_n+4t_n)$$

利用上面的循环关系,我们得出前 6 个 $m>1$ 的值为

$$m_1=47,m_2=2\ 161,m_3=99\ 359,m_4=4\ 568\ 353$$

$$m_5=210\ 044\ 879,m_6=9\ 657\ 496\ 081$$

我们注意在 $k=-\frac{1}{2}(m+1)\pm\frac{1}{6}t$ 中两种符号的选择将导致 m^3 的等价的分解.由于如果

$$k=-\frac{1}{2}(m+1)+\frac{t}{6},k'=-\frac{1}{2}(m+1)-\frac{t}{6}$$

那么

$$k'+1=-(k+m)$$

例 对 $n=1$,我们有 $m_1=47,k_1=21,k'_1=-69$,这产生一个等价的分解

$$47^3=22^2+\cdots+68^2=(-68)^2+\cdots+(-22)^2$$

对 $n=2$,我们有 $m_2=2\ 161,k_2=988,k'_2=-3\ 150$,这产生一个等价的分解

$$2\ 161^3=989^2+\cdots+3\ 149^2=(-3\ 149)^2+\cdots+(-989)^2$$

108.设 x,y,z 是使得

$$x^2+y^2=z^{2m},(x,y)=1$$

的整数,其中 m 是一个正整数.证明:如果 $4m-1=p$ 是一个素数,则 $p\mid xy$.

(AMM E2641)

证明 由于$(x,y)=1$,故 x 或 y 必须是奇数.但是它们不可能都是奇数,否则将有 $x^2+y^2\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$,而平方和不可能是一个 $\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$ 的数,因此 z 必是一个奇数.

现在我们将使用高斯整数(也就是复整数)环中的唯一分解定理来证明结论.设 t 是一个高斯整数,$t\mid x+\mathrm{i}y$,$t\mid x-\mathrm{i}y$,那么 $t\mid 2x$,$t\mid 2y$.由于$(x,y)=1$,我们就得出 $t\mid 2$.

另一方面,由于

$$(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)=z^{2m}$$

t 必须整除奇整数 z^{2m},由这两个事实得出 t 是一个单位数,即 $x+\mathrm{i}y$ 和 $x-\mathrm{i}y$ 是互素的.那样由上式得出对某一个 k

$$x + iy = i^k(a + ib)^{2m}$$

由费马定理知

$$(a + ib)^{4m} = (a + ib)(a + ib)^p \equiv$$
$$(a + ib)(a^p - ib^p) \equiv$$
$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 \pmod p$$

因此由 $x + iy = i^k(a + ib)^{2m}$

得出 $(x^2 - y^2) + 2ixy \equiv (-1)^k(a^2 + b^2) \pmod p$

因此 $p \mid xy$.

(AMM 6176)

109. 设 x, y 表示整数,证明

(1) $x^3 - 1 = 4y^2 \Rightarrow x = 1$.

(2) $x^3 - 1 = 2y^2 \Rightarrow x = 1$.

(3) $x^4 + 1 = 2y^2 \Rightarrow x = \pm 1$.

证明 (1) $x^3 - 1 = 4y^2 \Rightarrow x^3 = 4y^2 + 1 = (2y + i)(2y - i)$,那么由于 $Z[i]$ 是唯一分解整环,在此环中,1 是一个立方数,以及从 $(2y + i)(-y) + (2y - i)(y + i) = 1$ 得出 $2y + i$ 和 $2y - i$ 是互素的,因此存在 $a, b \in \mathbf{Z}$ 使得

$$2y + i = (a + bi)^3 = a(a^2 - 3b^2) + ib(3a^2 - b^2)$$

那样 $b(3a^2 - b^2) = 1$,因此 $b = 1, 3a^2 - 1 = \pm 1, 3a^2 = 0$ 或 2,因而 $a = 0, y = 0, x = 1$.

(2) $x^3 - 1 = 2y^2 \Rightarrow x^3 = 2y^2 + 1 =$

$$(1 + \sqrt{-2}y)(1 - \sqrt{-2}y)$$

那么由于 $Z[\sqrt{-2}]$ 是唯一分解整环,在此环中,1 是一个立方数,以及从

$$(1 + \sqrt{-2}y)(1 - \sqrt{-2}y - y^2) - y^2(1 - \sqrt{-2}y) = 1$$

得出 $1 + \sqrt{-2}y$ 和 $1 - \sqrt{-2}y$ 是互素的,因此存在 $a, b \in \mathbf{Z}$ 使得

$$1 + \sqrt{-2}y = (a + b\sqrt{-2})^3 =$$
$$a(a^2 - 6b^2) + b(3a^2 - 2b^2)\sqrt{-2}$$

因此 $a = 1, 1 - 6b^2 = \pm 1, 6b^2 = 0$ 或 2,因而 $b = 0, y = 0, x = 1$.

(3) 由 $x^4 + 1 = 2y^2$ 得出 x 是奇数,并且

$$(x^4 - 1)^2 = (x^4 + 1)^2 - 4x^4 = 4(y^4 - x^4)$$

$$y^4 - x^4 = u^2, u = \frac{x^4 - 1}{2} \in \mathbf{Z}$$

那么由 T. Nagell, Introduction to Number Theory, John Wiley, New York, 1951, 227, 定理 114 可知 $uxy = 0$,由此即可得出 $x = \pm 1$.

(AMM E2749)

110. 证明:(1) 方程 $3^a+1=5^b+7^c$ 和方程 $5^a+1=3^b+7^c$ 都有非平凡解(即异于 $a=b=c=0$ 的解).

(2) 方程

$$7^a+1=3^b+5^c$$

的整数解只有 $(a,b,c)=(0,0,0)$ 或 $(1,1,1)$.

证明 (1) 如果3的指数不等于0,那么这两个方程在模3下都是可解的.

(2) 设 (a,b,c) 是方程 $7^a+1=3^b+5^c$ 的解,显然 $c\neq 0$, $7^a\equiv 3^b+4 \pmod{20}$,因此 $a\equiv b\equiv 1 \pmod 4$,那样 $5^c\equiv 5 \pmod{16}$ 而 $c\equiv 1 \pmod 4$. 检验模13的所有可能性我们易于推出 $b\equiv 1 \pmod 3$, $a\equiv 1 \pmod{12}$. 所以 $b\equiv 1 \pmod 6$, $5^c\equiv 5 \pmod 7$,因而 $c\equiv 1 \pmod 6$. 这样当 $b>1$ 时,此方程对模9是矛盾的,而如果 $b=1$, $c>1$,此方程对模25是矛盾的. 这就说明除了 $(a,b,c)=(0,0,0)$ 或 $(1,1,1)$ 之外,此方程不可能再有其他解.

(AMM E2750)

111. 求出不定方程 $5^a+9=3^b+7^c$ 的所有整数解.

解 这个方程的仅有的整数解为 $(a,b,c)=(0,1,1)$, $(0,2,0)$ 或 $(2,3,1)$.

显然 $a,b,c\geqslant 0$. 设 (a,b,c) 是方程的除上述3组解之外的整数解,那么易证 $a>0$,因此 $3^b+7^c\equiv 14 \pmod{20}$, $b\equiv 3$, $c\equiv 1 \pmod 4$,那样 $5^a\equiv 9 \pmod{16}$, $a\equiv 2 \pmod 4$,所以 $5^a\equiv 8$, $7^c\equiv 7,11$ 或 8, $3^b\equiv 3,9$ 或 $1 \pmod{13}$. 由此易于推出 $3\mid b$, $c\equiv 1 \pmod{12}$. 那样 $b\equiv 3 \pmod 6$, $5^a\equiv 4 \pmod 7$, $a\equiv 2 \pmod 6$. 设 $c>1$ 以及 $5^a+9\equiv 3^b \pmod{49}$,那么 $(a,b)=(2,9),(8,27),(14,3),(20,21),(26,39),(32,15)$ 或 $(38,33) \pmod{42}$. 然而在上述每种情况中在模43下 5^a+9-3^b 都不是7的幂(注意:3,5是模49和43的原根). 这就说明必有 $c=1$, $b>3$, $5^a\equiv -2 \pmod{81}$, $a\equiv 20 \pmod{54}$, $3^b\equiv 5^{20}+2\equiv 37 \pmod{109}$,这仍然是一个矛盾(注意:3,5在模109下的阶是27). 这就证明了结论.

(AMM E2880)

112. 求出不定方程

$$x^2+15^a=2^b \qquad (*)$$

的所有整数解 x,a,b.

解 设 N 是一个奇整数并且含有一个使得 $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$ 的素因数 p，则方程（*）的所有整数解可以用以下方式通过分解因式求得．此外方程（*）的所有整数解满足 $a\leqslant 1$．

如果 $b=0$，则 $b=a=0$；

如果 $b=1$，则 $a=0,x=\pm 1$．

以下设 $b\geqslant 2$．如果 $N\equiv 1(\bmod 4)$（或者 $a=0$），那么显然仅有的解是 $(0,0,0)$，$(\pm 1,0,1)$．因此我们假设 $N>0,N\equiv 3(\bmod 4)$，这时 a 必须是奇数，故可设 $a=2c+1$．因而 $a\geqslant 1$，那样由关系式

$$x^2+N^a\equiv 2^b(\bmod p)$$

推出 b 必须是偶数，故可设 $b=2d$．

那么 $N^a=(2^d+x)(2^d-x)$，由于 $(2^d+x,2^d-x)=1$，因此我们有

$$2^d+x=N_1^a,2^d-x=N_2^a$$

$$N=N_1N_2,N_1>N_2,(N_1,N_2)=1$$

因此 $\quad 2^{d+1}=N_1^a+N_2^a=(N_1+N_2)(N_1^{2c}-\cdots+N_2^{2c})$

由于上式后面一个因数是奇数，因此必须等于1．

$c\geqslant 1$ 或 $c=0$．如果 $c\geqslant 1$，则

$$N_1^{2c-1}(N_1-N_2)+\cdots+N_2^{2c}>1$$

矛盾，因而 $c=0,a=1,2^{d+1}=N_1+N_2$．

那样，每个分解 $N=N_1N_2,(N_1,N_2)=1,N_1+N_2=2^{d+1}$ 就确定了 d．取 $b=2d$，则

$$x=N_1-2^d=2^d-N_2$$

$$(\pm x)^2+N^a=(N_1-2^d)(2^d-N_2+N_1N_2)=$$
$$(N_1+N_2)2^d-2^{2d}=2^{2d+1}-2^{2d}=2^{2d}=2^b$$

在 $N=15$ 的情况下，$5\mid 15,\left(\frac{2}{5}\right)=-1$．解由 $N_1=5,N_2=3$ 或 $N_1=15,N_2=1$ 给出，这就是所有的非平凡解．

（AMM E2929）

113．求出不定方程 $1+3^a=5^b+3^c$ 的所有整数解．

解 方程的仅有的整数解是 $(a,b,c)=(a,0,a),(3,2,1)$．

假设 (a,b,c) 是其他的解．显然 $a,b,c>0,b\neq 0$，因此 $3^a\equiv 4+3^c(\bmod 20)$ 并且 $(a,c)\equiv(3,1)(\bmod 4)$．所以 $5^b\equiv 9(\bmod 16)$，$b\equiv 2(\bmod 4)$．利用模13，我们得出 $(a,c)\equiv(0,1)(\bmod 3)$，那样 $a\equiv 3,c\equiv 1(\bmod 6),5^b\equiv 4(\bmod 7),b\equiv 2(\bmod 6)$．如果 $c>1$，

这与 mod 9 矛盾，如果 $c=1,a>3$，那么 $5^b\equiv-2\pmod{81}$，$b\equiv 20\pmod{5^4}$. 这说明 $3^a\equiv5^{20}+2\equiv37\pmod{109}$，这是不可能的.（注意在模 109 下，3，5 具有周期 27）

（AMM 6411）

114. 求出不定方程 $1+3^a=5^b+3^c5^d$ 的所有整数解.

解 我们证明方程仅有的整数解是 $(a,b,c,d)=(t,0,t,0)$，$(2,1,0,1)$ 或 $(3,2,1,0)$. 证明这个结果的关键是 R. J. Stroeker and R. Tijdeman, Diophantine Equations, Computational Methods in Number Theory, MC Tract 154 (part I), MC Tract 155 (part II), (1983), 321-369 中的工作.

引理 如果 $0<|3^u-5^v|<3^{\frac{u}{2}}$，其中 u,v 是整数，则 $u=3$，$v=2$.

现在考虑所给的方程. 如果 $b=0$，那么 $a=c,d=0$，即 $(a,b,c,d)=(t,0,t,0)$. 因此我们不妨假设 $b>0$，那么 $a>c$ 并且 $5^b\equiv1\pmod{3^c}$. 由于 $5^2\not\equiv1\pmod{3^2}$，因此 5 是模 3^c 的原根. 这就得出当 $c>0$ 时，$2\cdot3^{c-1}\mid b$，并且因此 $3^c\leqslant\frac{3b}{2}$. 下面分两种情况讨论.

(1) $b\geqslant d$. 这时 $3^a\equiv-1\pmod{5^d}$ 并且由于 3 是模 5^d 的原根，故当 $d>0$ 时，$2\cdot5^{d-1}\mid a$. 因此 $5^d\leqslant\frac{5a}{2}$，因而 $0<3^a-5^b\leqslant\frac{15ab}{4}$，所以 $b\leqslant\frac{\ln3}{\ln5}a$ 并且 $0<3^a-5^b\leqslant2\cdot6a^2$. 由引理可知，如果 $a\neq3,b\neq2$，则 $|3^a-5^b|>3^{\frac{a}{2}}$，因此 $2\cdot6a^2>3^{\frac{a}{2}}$，因而 $a\leqslant10,b\leqslant6,c\leqslant2,d\leqslant2$. 由此容易得出 $(a,b,c,d)=(2,1,0,1)$ 或 $(3,2,1,0)$.

(2) $b<d$. 这时我们有当 $5^b\leqslant\frac{5a}{2}$ 时，$3^a\equiv-1\pmod{5^b}$. 那样 $0<3^a-3^c5^d<5^b\leqslant\frac{5a}{2}$，并且因此 $0<3^{a-c}-5^d\leqslant\frac{5a}{2\cdot3^c}$. 首先假设 $a-c\neq3,d\neq2$，因此由引理有 $|3^{a-c}-5^d|>3^{\frac{a-c}{2}}$. 那样 $3^{\frac{a}{2}}\leqslant\frac{5a}{2}$，因而 $a\leqslant4,b=1,d\geqslant2$. 由于 $5\mid3^a+1$，我们就得出 $a=2$，矛盾，然后设 $a-c=3,d=2$，那么 $b=1,c=0$，因而 $3^a=2a$，我们又得出矛盾. 因此在这种情况下，方程无解.

(AMM E3019)

115. 求出下列方程的所有解：

(1) $1 + 3^a = 7^b + 3^c$.

(2) $1 + 5^a = 7^b + 5^c$.

解 (1) 显然如果 $b = 0$，那么 $a = c$. 如果 $b < 0$，那么 $0 < 7^b = 1 + 3^a - 3^c < 1$，这蕴含 $a < c < 0$，而此式导致 $1 < 1 + 3^a = 7^b + 3^c < 1$，矛盾. 对 $b = 1$，我们得到解 $a = 2, c = 1$. 设 $b > 1$，那么 $a > 3, c \geqslant 1$，在方程两边用27做模，我们得出如果分别取 $c = 1, 2, \geqslant 3$，那么 $b \equiv 4, 3, 0 \pmod 9$. 用37做模可以排除前两种情况. 在第三种情况下，这得出 $a \equiv c \pmod{18}$，而在方程两边取7做模可证明这是不可能的. 因而，方程的仅有的解就是 $(a, 0, a)$ 和 $(2, 1, 1)$.

(2) 用与(1)类似的方法可证方程有显然解 $b = 0, a = c$ 以及当 $b < 0$ 时没有解. 设 $b > 0$，在方程两边用5做模，我们得出 $b \equiv 0 \pmod 4$，那样用21做模导致 $a \equiv 1, c \equiv 3 \pmod 6$ 或 $a \equiv 0, c \equiv 4 \pmod 6$，而用9做模，导致 $b \equiv 1 \pmod 3$，最后用13做模，我们得出方程不存在除 $b = 0, a = c$ 之外的解.

(AMM E2913)

116. 给了有理数 N 和 P，求出所有满足关系 $a + y = b + x$ 并使得

$$N = \frac{ay - bx}{xy - ab}, P = \frac{xy - ab}{ax - by}$$

的整数 a, b, x, y.

证明 把 $y = b + x - a$ 代入 N 和 P 的表达式，可把这两个表达式化简为

$$N = \frac{a - b}{x + b}, P = \frac{x - a}{a - b}$$

设 $N = \frac{c}{d}, P = \frac{h}{j}, e = [c, j]$ 并设 $N = \frac{e}{f}, P = \frac{g}{e}$，那么就存在 k 使得

$$a - b = ke$$

$$x + b = kf$$

$$x - a = kg$$

易于求出此方程组的解为

$$x = \frac{k(f + e + g)}{2}$$

$$a = \frac{k(f + e - g)}{2}$$

$$b=\frac{k(f-e+g)}{2}$$

因此
$$y=\frac{k(f-e+3g)}{2}$$

如果 a,b,x,y 之中有一个不是整数,那么由于上面式子的圆括号中的数具有同样的奇偶性,那么 a,b,x,y 就都不是整数.这样,我们所要去除的非整数解为 k 是奇数,并且 $\{e,fg\}$ 中包含了奇整数的情况.

(AMM E1221)

117.证明:如果 n 是一个大于 1 的整数,那么 2^n-1 不可能是一个完全平方、立方或更高次的方幂.

证明 当 $n>1$ 时,$2^n-1\equiv 3(\bmod 4)$,因此 2^n-1 不可能是完全平方数(因为任何一个完全平方数不可能 $\equiv 3(\bmod 4)$),因而如果 $2^n-1=x^m$,那么 x 和 m 必须都是奇数,而这又导致

$$2^n=x^m+1=(x+1)(x^{m-1}-x^{m-1}+\cdots-x+1)$$

由于上式右边中的第二个因子是一个大于 1 的奇数,这就得出矛盾,所得的矛盾就证明了要证的命题.

(AMM E1281)

118.证明:任何一个完全立方数与 7 的和不可能是一个完全平方数.

证明 如果 $y^2=x^3+7$,并且 x 是偶数,那么 y 是奇数,因此 $y^2=x^3+7\equiv 7(\bmod 8)$,但是另一方面有任何奇数的平方 $\equiv 1(\bmod 8)$,这就得出矛盾,所得的矛盾说明,x 必须是奇数,y 是偶数.现在

$$y^2+1=x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)((x-1)^2+3)$$

上式最右端是一个形如 $4n+3$ 形式的数,因此必有一个 $4n+3$ 形式的素因子,然而由初等数论中把数表示为平方和的理论可知,奇数 y^2+1 不可能有 $4n+3$ 形式的素因子,所得的矛盾便说明 $y^2=x^3+7$ 不可能成立.

(AMM E2621)

119.证明:不定方程 $x^n+1=y^{n+1}$ 不存在满足条件 $n\geq 2$,$(x,n+1)=1$ 的正整数解.

证明 假设方程存在那种解.$y-1$ 的每个素因子 p 整除 x,并且由于 $(x,n+1)=1$,所以 $p\nmid(n+1)$.由于

$$1 + y + \cdots + y^n \equiv n + 1 \pmod{y - 1}$$

这就得出 $y - 1$ 和 $1 + y + \cdots + y^n$ 是互素的，那样

$$x^n = (y - 1)(1 + y + \cdots + y^n)$$

蕴含 $1 + y + \cdots + y^n$ 是一个 n 次幂，这与 $y^n < 1 + y + \cdots + y^n < (y + 1)^n$ 矛盾.

120. 证明：$x^2 + 36 = y^5$ 没有整数解.

(AMM E1442)

证明 假设在 $x^2 + 36 = y^5$ 中 x 是一个偶数，那么 y 也必须是一个偶数. 由于 $x = 4m$ 或 $x = 4m + 2$，因此 $x^2 \equiv 0, 4 \pmod{16}$，因而 $x^2 + 36 \equiv 4, 8 \pmod{16}$，但是 $y = 2k$ 蕴含 $y^5 \equiv 0 \pmod{16}$，这就说明 $x^2 + 36 = y^5$ 不可能存在 x 是偶数的解.

现在假设 x 是一个奇数，那么 $x = 2m + 1$ 蕴含 $x^2 \equiv 1 \pmod 4$，因而 $x^2 + 36 \equiv 1 \pmod 4$. 由于 $y^5 \equiv 1 \pmod 4$，因而 $y \equiv 1 \pmod 4$，而 $y = 4k + 1$. 但是从 $x^2 + 4 = y^5 - 2^5$ 又可看出 $n = x^2 + 4 = y^5 - 2^5$ 可被 $y - 2 = 4k - 1$ 整除，由初等数论中关于平方和的结果可知 n 不可能表示为 $a^2 + b^2$，$(a, b) = 1$ 的形式. 但是由于 x 是一个奇数，因此 $(x, 2) = 1$，这又得出 $n = x^2 + 4 = x^2 + 2^2$ 可以表示成 $a^2 + b^2$，$(a, b) = 1$ 的形式. 所得的矛盾说明 $x^2 + 36 = y^5$ 也不可能存在 x 是奇数的解.

注 这一问题建议了一些与此相关的问题和猜测如下：

(1) $x^2 + 9 = y^3$ 没有整数解.

(2) $x^2 + 81 = y^5$ 没有整数解.

在上面的问题中，利用 $x^2 + 1 = y^3 - 2^3$ 和 $x^2 + 49 = y^5 - 2^5$ 可以得出类似的证明.

(3) $x^2 + 4 = y^5$ 没有整数解.

这里，利用 11 作为模表明如果 $u \equiv 4 \pmod{11}$，例如 $u = (11m \pm 2)^2$，那么 $x^2 + u \not\equiv y^5 \pmod{11}$，因此(2)是(3)的特殊情况.

下面的猜测带有更一般的性质，因此如果成立，其证明将可能更困难.

猜测：方程 $x^2 + b = y^5$，$b < 38$ 没有使得 $(x, y) = 1$ 的整数解.

这里 b 的边界是由 $41^2 + 38^2 = 5^5$ 建议的，对此边界，条件 $(x, y) = 1$ 是必要的，由于 $4^2 + 4^2 = 2^5$ 以及 $55^2 + 10^2 = 5^5$.

最后，此问题的提出者说明，用与此题类似的证法，可以证明方程

$$x^2 + 4(2^{2n-1} + 1) = y^{2n+1}, n > 2$$

没有整数解.

(AMM E2194)

121. 方程 $a^2+b^2=c^2-d^2$，$ab=cd$ 是否可能存在非零的整数解？

解 利用费马的无穷递降法，我们对此问题给出否定的回答。

显然只要证明不存在正整数解就够了。假设所给的方程组存在正整数解，那么在这些正整数解中必存在一组解使得 d 最小。由于 $ab=cd$，因此必存在正整数 x,y,z,w 满足条件

$$(x,z)=1,(y,w)=1$$

并且使得 $a=kxy,b=kzw,c=kxw,d=kzy$。由

$$a^2+b^2=c^2-d^2$$

就得出
$$(x^2+z^2)(y^2+w^2)=2x^2w^2$$

上面的互素条件蕴含只有 z 或 y 是偶数，并且 $(x^2+z^2,x^2)=1$ 以及 $(y^2+w^2,w^2)=1$，那么我们有

$$x^2+z^2=w^2,y^2+w^2=2x^2,z\text{ 是偶数}$$

或
$$x^2+z^2=2w^2,y^2+w^2=x^2,y\text{ 是偶数}$$

我们考虑第一个方程组(第二个方程组可以类似地考虑)。从第一个方程组得出存在互素的奇偶性不同的正整数 m,n 满足 $m>n$ 以及

$$x=m^2-n^2,z=2mn,w=m^2+n^2$$

把上面的式子代入方程组的另一个方程得

$$y^2+(2mn)^2=(m^2-n^2)^2$$

并且由于 $(2mn,m^2-n^2)=1$，因此存在正整数 $r,s,r^2>s^2$ 使得

$$y=r^2-s^2,mn=rs,m^2-n^2=r^2+s^2$$

这样 r,s,m,n 也是所给方程组的一组正整数解。但是由 $d=k(2mn)(r^2-s^2)$ 得出 $n<d$，这与 d 的最小性矛盾。所得的矛盾就说明所给的方程组不可能存在正整数解。

(AMM E2615)

122. 证明：不定方程

$$x^2+y^2=u^2+v^2,x^3+y^3=u^3+v^3$$

和
$$x^2+y^2=u^2+v^2,x^5+y^5=u^5+v^5$$

除了平凡解 $x=u,y=v$ 或 $x=v,y=u$ 之外，不存在正整数解。

证明 我们证明更一般的结果。设 a 和 b 是不同的正实数，那么方程组

$$x^a+y^a=u^a+v^a,x^b+y^b=u^b+v^b$$

的实数解只有平凡解. 为证明这一点, 假设 $a < b$ 并且上述方程组存在一组非平凡解 $x \geqslant y, u \geqslant v$, 比如说 $x > u$, 因此 $x > u \geqslant v > y > 0$. 我们定义

$$x_1 = x^a, y_1 = y^a, u_1 = u^a, v_1 = v^a, c = \frac{b}{a} > 1$$

那么, 上述方程组可写成

$$x_1 - u_1 = v_1 - y_1 \neq 0, x_1^c - u_1^c = v_1^c - y_1^c$$

对函数 x^c 应用中值定理, 我们看出上面的后一个方程蕴含

$$(x_1 - u_1)r^{c-1} = (v_1 - y_1)s^{c-1}$$

并且因此有 $r^{c-1} = s^{c-1}$, 其中 r 和 s 是满足 $u_1 < r < x_1, y_1 < s < v_1$ 的中值. 因而 $r > s > 0$, 这显然与 $r^{c-1} = s^{c-1}$ 矛盾.

(AMM E2891)

123. 在"初等数论 250 题"(250 problems in elementary number theory) 问题 140,141 中, Sierpinski 表明如果 $k = 2$ 或者 $k = p^n$, 那么不定方程

$$x(x+1) = k^2y(y+1) \qquad (*)$$

不存在 $xy \neq 0$的解. 求出 k 的使得同样结论成立的其他的值.

解 如果 $k = mp^n > 6$, 其中 p 是一个素数, $n \in \mathbf{N}$, $m = 3$ 或 4, 即 $k = 24$, 方程 $(*)$ 没有正整数解.

假设不然, 取 $k = 3p^n$ 或 $4p^n (k > 6)$, 那么

$x(x+1) = k^2y(y+1) \Leftrightarrow (ky + x)(ky - x) = x - ky^2$

上式存在使得 $ky - x \geqslant 0$ 的正整数解将蕴含

$$ky - x + x - k^2y = ky(1-k) \geqslant 0$$

那样对一个 $(*)$ 的解, 满足关系 $x = ky + b, b = 1,2,\cdots$ 的 x 将导致解必须满足

$$b(b+1) = k(k-(2b+1))y \qquad (**)$$

我们分以下几种情况讨论:

(1) $b = cp^n, c \geqslant 2$. 那么 $2b + 1 \geqslant k$, 与在 $(**)$ 中 $b(b+1) > 0$ 矛盾.

(2) $b = p^n$. 那么

$p^n + 1 = m(mp^n - 2p^n - 1)y = ((m^2 - 2m)p^n - m)y$

由于 $y \geqslant 1, m + 1 \geqslant (m^2 - 2m - 1)p^n$, 其中 $m = 3, p = 2, n = 1$ 与 $k > 6$ 矛盾.

(3) $b + 1 = cp^n, c > 2$. 那么 $2b + 1 \geqslant k$, 但是 $b(b+1) > 0$.

(4) $b + 1 = 2p^n$. 那么 $2b + 1 \geqslant k - 1$, 因此 $2(b+1) = k$, 因而 $m = 4$, 但是那样 $2p^n - 1 = 2y$.

(5) $b + 1 = p^n$. 那么 $p^n - 1 = m(mp^n - (2p^n - 1))y \geqslant (m^2 - 2m)p^n + m$, 但是对 $m \geqslant 3$ 这不可能.

注 上述结果对 $m = 5$ 不成立，取 $k = 35$，那么 $x = 49$，$y = 1$ 是解.

除非 $p = 2$，对 $m = 2$ 也不成立，由于更一般的，如果 $k = 2(2y + 1)$，我们有解 $x = 4y(y + 1)$，y.

Sakmar 发现如果 $k = 3,4,5,7,8,9$，方程无解. Fisher 注意到如果 $k = 6$，则 $8 \cdot 9 = k^2 \cdot 1 \cdot 2$；如果 $k = 10$，则 $24 \cdot 25 = k^2 \cdot 2 \cdot 3$；如果 $k = 14$，则 $48 \cdot 49 = k^2 \cdot 3 \cdot 4$. Bernstein，Grosswald 和 Nelsen 注意到如果 $k - 1$，$k + 1$ 都是素数，则方程无解.

(AMM E1776)

> 124. 证明：对于任何偶整数 $m > 2$，存在无穷多个奇整数，它不是一个素数和 m 的大于1的幂的和.

证明 对 $k > 0$，奇数 $m(m-1)^k + 1$ 不可能写成 $p + m^b$ 的形式，其中 p 是一个素数，$b \geq 1$. 由于 $m > 2$，那么从 $m(m-1)^k + 1 = p + m^b$ 就得出 $p \equiv 1 \pmod m$ 以及 $(m-1)$ 整除 p，因而 $p = m - 1$，这是不可能的.

(AMM 4637)

> 125. 设 $F_1 = F_2 = 1$，$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，$n \geq 3$ 表示斐波那契数列，$f(n)$ 表示最小的使得 $n \mid F_{f(n)}$ 的正整数，证明（或者否定）：对任意大于2的素数和所有的 n 都成立
>
> $$f(p^n) = p^{n-1}f(p)$$

证明 下面的4个命题，有的是众所周知的（如果你不知道，也很容易用数学归纳法证明），有的即使你不知道，也很容易用数学归纳法证明.

性质1：$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$.

性质2：$F_{mn} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_m^k F_{m-k} F_n^{m-k} F_{n-1}^k$；

$$F_{mn-1} = \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k F_{m-k-1} F_n^{m-k} F_{n-1}^k + F_{n-1}^m.$$

性质3：如果 $n > 1$ 整除 F_p，那么 n 不能整除 F_{p-1}.

性质4：如果 p^a 整除 F_k，那么当且仅当 p^a 整除 F_h 时，p^a 整除 F_{h+k}.

由于 $F_{f(p^{s+1})}$ 可被 p^s 整除，那么从性质4得出 $f(p^{s+1})$ 是 $f(p^s)$ 的倍数. 设 $f(p^{s+1}) = tf(p^s)$，在性质2的第一个式子中除了最后一项，所有的项都能被 p^s 整除，其中 $n = f(p^s)$，最后一项是 $mF_{f(p^s)-1}^{m-1}F_{f(p^s)}$. 现在 p 不能整除 $F_{f(kp)-1}$. 因此如果 p^λ 是 p 的整除 $F_{f(p)}$ 的最高次幂，那么当且仅当 p 整除 t 时，$p^{\lambda+1}$ 整除 $F_{tf(p)}$. 因此

如果 $f(p^k)=f(p^t)$，那么 $f(p^{k+1})=pf(p^t)$. 这就得出如果 $f(p)=f(p^k)$，那么 $f(p^{k+1})=pf(p)$，并且经过有限步之后，我们得出 $f(p^{k+s})=p^sf(p)$. 这样我们已经证明了，如果对一个素数 $p>2$，$F_{f(p)}$ 不能被 p^2 整除，那么对每一个 n，$f(p^n)=p^{n-1}f(p)$.

目前还不清楚 $F_{f(p)}$ 是否能是 p^2 的倍数. 对 $p=2$，结果稍微有些差别. 我们发现 $f(2)=3$，$f(2^2)=f(2^3)=6$，对 $n>2$，$f(2^n)=2^{n-2}f(2)$.

(AMM E2151)

126. 如果 a,b 是两个连续的整数，那么 $a^2+b^2+(ab)^2$ 总是一个完全平方数. 求出具有此性质的其他整数对. 实际上，对任意选出的 a，有无限多个 b 使得 $a^2+b^2+(ab)^2$ 是一个完全平方数.

解 佩尔方程 $x^2-(a^2+1)y^2=-1$ 有最小解 $x=a$，$y=1$，因此当 $n=1,2,3,\cdots$ 时

$$(x+y\sqrt{a^2+1})^{2n}(x-y\sqrt{a^2+1})^{2n}=(-1)^{2n}=1$$

给出佩尔方程 $X^2-(a^2+1)Y^2=1$ 的无限多组解，其中我们取 $(a+\sqrt{a^2+1})^{2n}$ 的有理部分作为 X_{2n}，并且取 $\sqrt{a^2+1}$ 的系数作为 Y_{2n}，因此

$$X_{2n}^2a^2=a^2+(a^2+1)Y_{2n}^2a^2=a^2+(Y_{2n}a)^2+(a\cdot Y_{2n}a)^2$$

即 $Y_{2n}a$ 就给出无限多个对应于 a 的 b 值. 但是这并不意味着问题的全部解就是这些，由于 $b=a+1$ 就不属于这一组解.

(AMM E2264)

127. 设 F_n 表示第 n 个斐波那契数（$F_1=F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n\geqslant 3$）. 证明

(1) $F_{7m}(1-F_{7k+1})\equiv F_{7k}(1-F_{7m+1})\pmod{377}$.

(2) $5(F_{k-1}^2+F_{k+1}^2)\equiv 2(-1)^{k+1}(\bmod(F_{k-1}+F_{k+1}))$.

证明 由于 $F_7=13$ 整除 F_{7m} 和 F_{7k}，因此

$$F_{7m}(1-F_{7k+1})\equiv F_{7k}(1-F_{7m+1})\pmod{13}$$

由于 $F_0\equiv F_{14}\pmod{29}$ 以及 $F_1\equiv F_{15}\pmod{29}$，因此由数学归纳法即可得出对所有的 n 成立 $F_n\equiv F_{n+14}\pmod{29}$，因此对所有的 n 和 q 成立 $F_n\equiv F_{n+14q}\pmod{29}$. 如果 m 和 q 都是奇数，那么此式蕴含 $F_{7m}\equiv F_{7k}\pmod{29}$ 以及 $F_{7m+1}\equiv F_{7k+1}\pmod{29}$，如果 m 和 q 之一是偶数，比如说 m，我们就类似地得到 $F_{7m}\equiv F_0\equiv 0\pmod{29}$ 以及 $F_{7m+1}\equiv F_1\equiv 1\pmod{29}$，在两种情况下都得出

$$F_{7m}(1-F_{7k+1})\equiv F_{7k}(1-F_{7m+1})\pmod{29}$$

由于 $(13,29)=1,13\cdot 29=377$

因此 $F_{7m}(1-F_{7k+1})\equiv F_{7k}(1-F_{7m+1})\pmod{377}$

这就证明了(1).

(2) 可从恒等式

$$5(F_{k-1}^2+F_{k+1}^2)=3(F_{k-1}+F_{k+1})^2+2(-1)^{k+1}$$

得出.

注 Bloom 对(2)给出了一个不需要应用上述恒等式的证明,但是这一证明需要用到一个更基本的恒等式

$$F_k^2-F_{k-1}F_{k+1}=(-1)^{k+1}$$

现在考虑 $3(F_{k-1}+F_{k+1})^2+2(-1)^{k+1}$,将此式展开,并将上式代入得出

$$3F_{k-1}^2+3F_{k+1}^2+6F_{k-1}F_{k+1}+2F_k^2-2F_{k-1}F_{k+1}$$

合并同类项并应用斐波那契数的递推关系 $F_{k+1}-F_{k-1}=F_k$,即得出

$$3F_{k-1}^2+3F_{k+1}^2+4F_{k-1}F_{k+1}+2(F_{k+1}-F_{k-1})^2=5(F_{k-1}+F_{k+1})^2$$

由上式即可得出(2).

(AMM 5080)

128. 在斐波那契叙列($F_1=F_2=1,F_n=F_{n-1}+F_{n-2},n\geqslant 3$)中,第1项,第2项和第12项都是完全平方数,是否还有其他的项也能是完全平方数?

解 除了题目中所给出的几项之外,在斐波那契叙列中不存在其它的完全平方数.我们分成以下几步加以证明:

(1) F_n 之间的关系:设 $\omega=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,因而 $\omega^2=\omega+1$.如果设 $F_0=0$,那么由数学归纳法就得出对所有的正整数成立 $\omega^n=F_n\omega+F_{n-1}$,利用此式和指数律就得出对任意正整数 m,n,k 成立

$$F_{m+n}=F_mF_n+F_mF_{n-1}+F_{m-1}F_n$$

$$F_{kn}=kF_n(F_{n-1})^{k-1}+(F_n)^2P_k(F_n,F_{n-1})\quad ①$$

$$F_{kn-1}=(F_{n-1})^k+(F_n)^2Q_k(F_n,F_{n-1})$$

其中 $P_k(x,y)$ 和 $Q_k(x,y)$ 都是 x,y 的整系数 k 次齐次多项式.特别

$$F_{2n}=F_n(2F_{n-1}+F_n),F_{2n-1}=(F_{n-1})^2+(F_n)^2\quad ②$$

令 $\bar{\omega}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,并且将 ω^n 和 $\bar{\omega}^n=F_n\bar{\omega}+F_{n-1}$ 相乘,我们就得出对任意正整数 n 成立

$$(F_{n-1})^2+F_nF_{n-1}-(F_n)^2=(-1)^n\quad ③$$

(2) 关于素因子:从③得出 F_n 和 F_{n-1} 是互素的.由此和(1.1)又得出 F_n 的任意素因子 p,如果不是 k 的因子,就必然同时出现在 F_n 和 F_{kn} 的因子中,并且带有相同的指数.

从 ① 还得出，如果 $p \mid F_n$，那么当且仅当 $p \mid F_m$ 时有 $p \mid F_{m+n}$. 由此又得出对任意整数 n，当且仅当 n 是一个最小的使得 $p \mid F_m$ 的整数 m 的倍数时，$p \mid F_n$. 特别当且仅当 $3 \mid n$ 时，$2 \mid F_n$，当且仅当 $4 \mid n$ 时，$3 \mid F_n$.

(3) **引理** 设 p 是一个素数，且让 m 是最小的使得 $p \mid F_m$ 的整数. 如果 m 是偶数，那么 $p \neq 13$ 或 $17 \pmod{20}$；而如果 $p \equiv 3$ 或 $7 \pmod{20}$，那么 $F_{m-1} \equiv -1 \pmod p$.

引理的证明 设 $m = 2m'$，$F_{m'} \equiv a \pmod p$，$F_{m'-1} \equiv b \pmod p$，那么由 ② 得出 $a + 2b \equiv 0 \pmod p$，并且 $F_{m-1} \equiv a^2 + b^2 \pmod p$. 那样 $F_{m-1} \equiv 5b^2 \pmod p$. 由 ③ 又得出 $(F_{m-1})^2 \equiv 1 \pmod p$，因而 $F_{m-1} \equiv 5b^2 \equiv \pm 1 \pmod p$. 如果 $p \equiv 13$ 或 $17 \pmod{20}$，那么 1 和 -1 在模 p 下就都是二次剩余，而 5 不是，这是不可能的. 如果 $p \equiv 3$ 或 $7 \pmod{20}$，那么 5 和 -1 都不是模 p 下的二次剩余，因此我们必须有 $F_{m-1} \equiv -1 \pmod p$.

我们不加证明的注明如果 m 是 4 的倍数，那么 $p \equiv 11$ 或 $19 \pmod{20}$ 的情况也可以排除.

(4) F_n 对 2 的幂：如果 $n = 2^m$，利用 ② 我们可以获得以下的 F_n 和 F_{n-1} 在模 20 下的值：

m	2	3	4	5	6
F_{n-1}	2	13	10	9	2
F_n	3	1	7	9	3

对 $m \geqslant 6$，表中的值以周期 4 重复.（为方便起见，有时我们用 $F(x)$ 代表 F_x）现在 $F(2^m) = F(2^{m-1})G_m$，其中 $F(2^{m-1})$ 和 $G_m = 2F(2^{m-1}-1) + F(2^{m-1})$ 互素. 如果 p 是 G_m 的素因子，那么 $n = 2^m$ 是最小的使得 $p \mid F_n$ 的整数 n. 那样由 (3) 就得出 $p \neq 13$ 或 $17 \pmod{20}$. 另一方面，上表显示 $G_2 = 3$ 和对所有 $m > 2$ 有 $G_m \equiv 7 \pmod{20}$. 那就得出不是所有的 G_m 的素因子都能 $\equiv \pm 1 \pmod 5$ 的. 这也就是说当 $m > 2$ 时，至少要有一个 G_m 的素因子 p 要使得 $p \equiv 3$ 或 $7 \pmod{20}$. 那样由 (3) 就得出 $F(2^m - 1) \equiv -1 \pmod p$，因此 -1 不是模 p 的二次剩余.

设 n 是奇数. 如果 $n \geqslant 3$，那么我们可以把 n 写成 $n = 2^m k \pm 1$ 的形式，其中 k 是奇数而 $m \geqslant 2$. 由 (4)，$F(2^m)$ 存在一个素因子 p 使得 $F(2^m \pm 1) \equiv -1 \pmod p$，并且 -1 不是模 p 的二次剩余. 由 ① 我们就得出

$$F_n = F(2^m k \pm 1) \equiv (-1)^k \equiv -1 \pmod p$$

这就得出 F_n 不可能是一个完全平方数.

ⅱ $n \neq 2^k3^l$. 我们称素数 p 是 F_n 的一个好的素因子，如果 $p \geqslant 3$ 并且其指数是奇数. 从(2)得出，如果 p 是 F_n 的一个好的素因子，那么 p 就是 F_{2n} 和 F_{3n} 的一个好的素因子. 如果 $m > 1$ 和 6 互素，$n = m2^k3^l$，那么由 ⅰ 可知 F_m 不是完全平方数，由(2)可知，它也不可能是 2 或 3 的倍数，那样 F_m 有一个好的素因子. 由此和前面的注就得出 F_n 也有一个好的素因子，因此不可能是完全平方数.

ⅲ $n = 2^k3^l$. 由于 $F_8 = 21$ 以及都有好的素因子，因此由 ⅱ 可知如果 $k \geqslant 3$ 或者 $l \geqslant 2$，F_n 就有一个好的素因子. 这样就只剩下 6 种情况有待检验，这 6 种情况是 $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_6 = 8, F_{12} = 144$，由此自然得出只有 F_1, F_2 和 F_{12} 是完全平方数.

129. 求出斐波那契叙列($F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geqslant 3$)中的所有孪生素数(一对孪生素数中的任何一个都称为是一个孪生素数).

(AMM 10844)

解　我们证明斐波那契数列中的孪生素数只有 3，5 和 13. 设 $\{f_n\}$ 表示斐波那契数列，为方便起见，令 $f_{-1} = 1, f_0 = 0$，因而递推关系 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ 对所有正整数 $n \geqslant 1$ 都成立. 再令

$$F_n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}$$

则

$$F_0 = I, F_{n+1} = F_1 \cdot F_n$$

因此对所有 $n \geqslant 0$，有 $F_n = F^n$，其中 $F = F_1$. 并且由于 $\det F = -1$，因此有 $\det F_n = (-1)^n$.

由于 F_n 的非对角线元素是 f_n，我们就得出 F_n 的所有的幂在模 f_n 下都是对角阵，因而 $F_n^k \pmod{f_n}$ 也是对角阵. 而由上面的公式可得

$$F_n^k \equiv (F^n)^k \equiv F^{nk} \equiv F_{nk} \pmod{f_n}$$

故对所有的 $k \geqslant 1$，f_n 整除 f_{nk}.

由于 $f_2 = 1, f_3 = 2 > 1$ 以及 $f_4 = 3$，因此由 f_n 整除 f_{nk}，就得出如果 f_n 是素数，那么 n 必是一个奇素数或等于 4.

下面我们证明对所有的奇数 $n \geqslant 9$，$f_n + 2$ 和 $f_n - 2$ 都存在非平凡的因子分解.

对 $n \geqslant 1$，令 $G_n = \begin{pmatrix} f_{n-2} & f_n \\ f_n & f_{n+2} \end{pmatrix}$，因此 $G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. 现在

$$f_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} = 2f_{n+2} + f_{n+1} = 3f_{n+2} - f_n$$

因此 $G_{n+2}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}G_n$，而 $\det G_n=(-1)^{n-1}$.

由 $F^{2n}=F^n\cdot F^n$ 可得

$$f_{2n-1}=f_{n-1}^2+f_n^2$$

将上面的等式加上 $\det F_n=(-1)^n$ 和 $\det G_{n-1}=(-1)^n$ 就得出

$$f_{2n-1}+2(-1)^n=f_{n+1}(f_{n-1}+f_{n-3})$$

而将 $f_{2n-1}=f_{n-1}^2+f_n^2$ 加上 $\det F_{n-1}=(-1)^{n-1}$ 和 $\det G_n=(-1)^{n-1}$ 就得出

$$f_{2n-1}+2(-1)^{n-1}=f_{n-2}(f_{n+2}+f_n)$$

这就证明了当 $n>5$ 时，f_n+2 和 f_n-2 都存在非平凡的因子分解，因而斐波那契数列中的孪生素数只可能是 $f_4=3$，$f_5=5$ 和 $f_7=13$.

130. 设 $F_1=F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，$n\geqslant 3$ 表示斐波那契叙列，$n\geqslant 2k+1$，证明：当 F_n 不是 k 次幂时

$$[\sqrt[k]{F_n}]-[\sqrt[k]{F_{n-k}}+\sqrt[k]{F_{n-2k}}]=0$$

而当 F_n 是 k 次幂时

$$[\sqrt[k]{F_n}]-[\sqrt[k]{F_{n-k}}+\sqrt[k]{F_{n-2k}}]=1$$

(AMM 10765)

证明　首先假设 F_n 是一个 k 次幂，其中 k 可被2或3整除. 因而 F_n 是一个完全平方数或立方数. 已知斐波那契数中的平方数只有 $F_1=F_2=1$ 和 $F_{12}=144$.(J.H.E.Cohn, On Square Fibonacci numbers, J. London Math. Soc. 39(1964), 537-540)而仅有的立方数是 $F_1=F_2=1$ 和 $F_6=8$.(H.Kondon and R. Finkelstein, On Fibonacci and Lucas numbers which are perfect powers, Fibonacci Quart. 7 (1969) 476-481; errata, ibid. 8(1970), 248)在这些情况中容易直接验证结论.

现在设 F_n 不是一个完全 k 次幂，其中 $k\geqslant 2$，$n\geqslant 4k-3$. 我们证明 $\sqrt[k]{F_{n-k}}+\sqrt[k]{F_{n-2k}}$ 对于 $\sqrt[k]{F_n}$ 要比 $\sqrt[k]{F_n}$ 对于一个整数更加接近. 对 $n\leqslant 11$，这时 k 等于2或3，这容易直接验证，因此以下设 $n\geqslant 12$. 应用 Binet 公式

$$F_n=\frac{\alpha^n+(-1)^{n+1}\alpha^{-n}}{\sqrt5}=\frac{\alpha^n}{\sqrt5}(1+(-1)^{n+1}\alpha^{-2n})$$

其中 $\alpha=\frac{1+\sqrt5}{2}=1.61\cdots$. 我们得到对 $n\geqslant 12$，我们有 $F_n\geqslant 144$，而对 $n\geqslant 5$，从不等式

$$\frac{1}{1.01}<1-\alpha^{-10}\leqslant 1-\alpha^{-2n}\leqslant 1+\alpha^{-2n}\leqslant 1+\alpha^{-10}<1.01$$

我们有

$$\frac{\alpha^n}{1.01\sqrt{5}} < F_n < 1.01 \cdot \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \qquad ①$$

由中值定理可得不等式

$$\frac{y-x}{k}y^{\frac{1}{k}-1} \leqslant y^{\frac{1}{k}} - x^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{y-x}{k}x^{\frac{1}{k}-1}, 0 < x < y \qquad ②$$

设 m 是一个整数，首先设 $F_n \geqslant m^k + 1$，在上式中的第一个不等式中令 $x = m^k, y = F_n$ 就得出

$$F_n^{1/k} - m \geqslant \frac{1}{k}F_n^{(1/k)-1} \geqslant \frac{5^{\frac{k-10}{2k}}}{1.01k}\alpha^{\frac{k}{n}-n}$$

其次设 $F_n \geqslant m^k - 1$，在上式中的第一个不等式中令 $x = F_n$，$y = m^k$ 就得出

$$m - F_n^{1/k} \geqslant (F_n + 1)^{1/k} - F_n^{1/k} \geqslant$$
$$\frac{1}{k}F_n^{(1/k)-1} \geqslant \frac{144}{145k}F_n^{(1/k)-1} \geqslant \frac{5^{\frac{k-1}{2k}}}{1.01k}\alpha^{\frac{n}{k}-n}$$

联合这两个不等式就得出

$$\left| F_n^{1/k} - m \right| \geqslant \frac{2 \cdot 19}{k5^{\frac{1}{2k}}}\alpha^{\frac{n}{k}-n} \qquad ③$$

对 $x = F_r, y = \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}}$ 应用式②得出

$$\left| F_r^{1/k} - \frac{\alpha^{\frac{r}{k}}}{5^{\frac{1}{2k}}} \right| \leqslant \frac{\alpha^{-r}}{k\sqrt{5}}\min\left(F_r, \frac{\alpha^r}{\sqrt{5}} \right)^{\frac{1}{k}-1}$$

当 $r \geqslant 5$ 时，应用式①得出

$$\left| F_r^{1/k} - \frac{\alpha^{\frac{r}{k}}}{5^{\frac{1}{2k}}} \right| \leqslant \frac{1.01}{k5^{\frac{1}{2k}}}\alpha^{\frac{r}{k}-2r} \qquad ④$$

由于 $\alpha^2 = \alpha + 1$，因此 $\alpha^{\frac{n}{k}} = \alpha^{\frac{n-k}{k}} + \alpha^{\frac{n-2k}{k}}$，那样

$$\left| F_n^{1/k} - (F_{n-k}^{1/k} + F_{n-2k}^{1/k}) \right| \leqslant \left| F_n^{1/k} - \frac{\alpha^{\frac{n}{k}}}{5^{\frac{1}{2k}}} \right| +$$
$$\left| F_{n-k}^{1/k} - \frac{\alpha^{\frac{n-k}{k}}}{5^{\frac{1}{2k}}} \right| + \left| F_{n-2k}^{1/k} - \frac{\alpha^{\frac{n-2k}{k}}}{5^{\frac{1}{2k}}} \right|$$

由于 $n \geqslant 12$ 以及 $n \geqslant 4k - 3$，因此 $2n - k \geqslant 5$. 在④中分别令 $r = n, r = n - k$ 和 $r = n - 2k$ 就得出

$$\left| F_n^{1/k} - (F_{n-k}^{1/k} + F_{n-2k}^{1/k}) \right| \leqslant \frac{1.01}{k5^{\frac{1}{2k}}}\alpha^{\frac{n}{k}-n}\alpha^{4k-n-2}$$
$$(1 + \alpha^{1-2k} + \alpha^{2-4k}) \leqslant \frac{2 \cdot 12}{k5^{\frac{1}{2k}}}\alpha^{\frac{n}{k}-n} \qquad ⑤$$

联合③和⑤就看出 $\sqrt[k]{F_{n-k}} + \sqrt[k]{F_{n-2k}}$ 对于 $\sqrt[k]{F_n}$ 要比 $\sqrt[k]{F_n}$ 对于一个

整数更加接近.

注 对固定的 k,容易证明结论当 n 充分大时成立.

131. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,证明:对任意正整数 n,成立恒等式

$$\sum_{k=1}^{n}[kx]=[nx]+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{i}\left[x+\frac{k}{i+1}\right]$$

证明 熟知恒等式 $\sum_{i=0}^{k-1}\left[x+\frac{i}{k}\right]=[kx]$,因此

$$\sum_{k=1}^{n}[kx]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}\left[x+\frac{i}{k}\right]=$$

$$[nx]+\sum_{k=2}^{n}\sum_{i=0}^{k-1}\left[x+\frac{i}{k}\right]=$$

$$[nx]+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{k}\left[x+\frac{i}{k+1}\right]$$

(AMM E2242)

132. 设 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数,证明:

(1) 设 $d\mid n$,那么在小于或者等于 n 的正整数中,共有 $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ 个正整数使得 $(x,n)=d$.

(2) 设 k,n 是任意正整数,则 $\sum_{i=1}^{n}k^{(i,n)}=\sum_{d\mid n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)k^{d}$.

(3) $\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n$.

证明 (1) $(x,n)=d\Leftrightarrow\left(\frac{x}{d},\frac{n}{d}\right)=1$

因此使得 $(x,n)=d$ 的 x 和使得 $\left(y,\frac{n}{d}\right)=1$ 的 y 是 1-1 对应的,而由欧拉函数的定义可知,共有 $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ 个 y 使得 $\left(y,\frac{n}{d}\right)=1$,因此共有 $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ 个 x 使得 $(x,n)=d$.

(2) 把 $\sum_{i=1}^{n}k^{(i,n)}$ 中所有使得 $(i,n)=d$ 的项合并起来,并且由 (1) 的结果可知,对每个 $d\mid n$,共有 $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ 个 i 使得 $(i,n)=d$.这就得出

$$\sum_{i=1}^{n} k^{(i,n)} = \sum_{d\mid n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right)k^{d}$$

(3) 在(2)中令 $k = 1$，并注意当 d 跑过 n 的所有的约数时，$\frac{n}{d}$ 也跑过 n 的所有的约数，就得出

$$\sum_{d\mid n}\varphi(d) = \sum_{d\mid n}\varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{i=1}^{n} 1^{(i,n)} = n$$

(AMM E2317)

> 133. 设 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数，求出所有使得
> $$\varphi(mn) = \varphi(m) + \varphi(n)$$
> 成立的正整数.

解 利用已知的关系式 $\varphi(mn) = \frac{d\varphi(m)\varphi(n)}{\varphi(d)}$，其中 $d = (m,n)$ 可把所给的关系写成

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d}$$

其中 $a = \frac{\varphi(m)}{\varphi(d)}$，$b = \frac{\varphi(n)}{\varphi(d)}$. 由于 a 和 b 都是正整数，这就得出或者 $d = 2$，$a = b = 1$，或者 $d = 1$，$a = b = 2$. 在第一种情况下 $\varphi(m) = \varphi(n) = 1$，因此 $m = n = 2$；而在第二种情况下，$\varphi(m) = \varphi(n) = 2$，这时 $m = n = 3$ 或 $m = n = 4$.

(AMM E2316)

> 134. 设 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数，证明：
> (1) 当 $m,n > 2$ 时
> $$\varphi(mn) + \varphi((m+1)(n+1)) < 2mn$$
> (2) 当 $n > 2, k \geqslant 2$ 时
> $$\varphi(n^k) + \varphi((n+1)^k) < 2n^2(n+1)^{k-2}$$

证明 (1)
$$\begin{aligned}&\varphi(mn) + \varphi((m+1)(n+1)) \leqslant\\ &m\varphi(n) + (m+1)\varphi(n+1) <\\ &m(n-1) + (m+1)n =\\ &2mn - (m-n) \leqslant 2mn\end{aligned}$$

(2) 由(1)可知(2)对 $k = 2$ 成立. 假设(2)对正整数 k 成立，那么

$$\begin{aligned}\varphi(n^{k+1}) + \varphi((n+1)^{k+1}) &= n\varphi(n^k) + (n+1)\varphi((n+1)^k) <\\ &(n+1)[\varphi(n^k) + \varphi((n+1)^k)] <\\ &(n+1)2n^2(n+1)^{k-2} =\\ &2n^2(n+1)^{k-1}\end{aligned}$$

因而由数学归纳法就证明了(2).

(AMM E3361)

135. 证明下面所说的关于欧拉函数的猜测或者给出反例：对每个正整数 n 都存在一个奇的正整数 k，使得 $\varphi(n)=\varphi(k)$.

解 我们证明方程 $\varphi(x)=2^{16}\cdot 257$ 有偶数解，但是没有奇数解.

方程的偶数解是 $x=2^{9-\epsilon_0-2\epsilon_1-4\epsilon_2}\cdot 3^{\epsilon_0}\cdot 5^{\epsilon_1}\cdot 17^{\epsilon_2}\cdot 257^2$，其中 ϵ_i 是0或1. 假设存在奇数 k 使得 $\varphi(k)=2^{16}\cdot 257$. 如果 p 是 k 的素因子，那么或者 $p-1=2^j$，或者 $p-1=2^j\cdot 257$，其中 $1\leqslant j\leqslant 16$. 但是可以直接验证对 $j=1,2,\cdots,16$, $2^j\cdot 257+1$ 都是合数(当 $j=7$ 时可被67整除，当 $j=15$ 时可被1 123整除，当 j 是其他值时，可被3,5,7或17整除). 那样 k 的任何素因子只可能形如3,5,17,257,65 537和257这些数的乘积，其中恰含两个257，而其他素因数至多包含一次，但是65 537显然不可能和257同时都在乘积中. 并且由于 ϵ_i 只能是0或1，因此

$$\varphi(3^{\epsilon_0}\cdot 5^{\epsilon_1}\cdot 17^{\epsilon_2}\cdot 257^2)=2^{8+\epsilon_0+2\epsilon_1+4\epsilon_2}\cdot 257<2^{16}\cdot 257$$

因此这就说明不可能存在奇数 k，使得

$$\varphi(k)=2^{16}\cdot 257=\varphi(2^9\cdot 257^2)$$

因此 $n=2^9\cdot 257^2=33\ 817\ 088$ 就是一个反例. 不难用计算机直接验证，这是最小的反例.

(AMM E3452)

136. 设 n 是一个大于3的奇整数，而 φ 是欧拉函数. 证明：存在一个素数 p 使得 $p\mid(2^{\varphi(n)}-1)$，但是 $p\nmid n$.

证法1 设 n 有 k 个不同的素因子，那么 $\varphi(n)$ 可被 2^k 整除，而因此

$$2^{\varphi(n)}-1=Y^{2^k}-1$$

其中 Y 是一个大于3的偶整数. 但是

$$Y^{2^k}-1=(Y-1)\prod_{i=0}^{k-1}(Y^{2^i}+1)$$

是 $k+1$ 个因子的乘积. 这 $k+1$ 个因子是两两互素的. 因此 $2^{\varphi(n)}-1$ 的素因子的数目大于 k. 由此即可得出所要的结果.

证法2 如果 n 至少有两个不同的素因子，设其中之一为 p. 那么 $(p-1)\left|\dfrac{\varphi(n)}{2}\right.$，因此 $p\mid(2^{\frac{\varphi(n)}{2}}-1)$. 由于 $2^{\varphi(n)}-1=(2^{\frac{\varphi(n)}{2}}-1)(2^{\frac{\varphi(n)}{2}}+1)$，并且这两个因子是互素的，我们就有 $(2^{\frac{\varphi(n)}{2}}+1,n)=1$；因此 $2^{\frac{\varphi(n)}{2}}+1$ 的每个素因子都与 n 互素，但是

可以整除 $2^{\varphi(n)}-1$. 如果 n 只有一个素因子,那么 $n=p^m$,这时又分两种情况:

ⅰ $n=3^m, m\geqslant 2$,那么 $3\mid\varphi(n)$,因此 7 整除 $2^{\varphi(n)}-1$ 但是不能整除 n.

ⅱ $n=p^m, p>3$,那么 $2\mid\varphi(n)$,因此 3 整除 $2^{\varphi(n)}-1$ 但是不能整除 n.

注　Volker Strehl 和 P. G. Walsh 互相独立地对所有除了 $\{1,2,3,6\}$ 之外的 n 解决了问题. D. W. Kosler, Gerry Myerson 和 Hongbing Yu 进一步研究了使得 $(a,n)=1, a>1, n>2$ 的有序对 a,n 的集合,对这些有序对,存在素数 p,使得 $p\mid(a^{\varphi(n)}-1)$,但是 $p\nmid n$. 这种有序对共有 $(3,2),(4,3),(6,2),(6,3),(6,5),(6,7),(6,17)$ 和 $(10,3)$.

137. 求出所有使得 $\varphi(m)\mid n, \varphi(n)\mid m$ 的正整数对 (m,n),其中 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数.

(AMM E3398)

解　如果 m 和 n 的最大公因数不是完全平方数,则称正整数对 (m,n) 是本原的. 我们将证明恰有 11 个本原解如下:

$(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(2,4),(2,6),(4,6),(4,10),(6,6),(6,14),(6,18)$

由于当 p 是 n 的素因子时,$\varphi(pn)=p\varphi(n)$,因此问题的所有解都可按下述法则从本原解得出:如果 p 既整除 m 又整除 n,那么当且仅当 (m,n) 是解时,(pm,pn) 也是解. 那样,比如 $(6,18)$ 产生无数多组解 $\{(2^r3^s,2^r3^{s+1})\mid r,s\geqslant 1\}$,$(4,10)$ 产生无数多组解 $\{(2^{r+1},2^r5)\mid r\geqslant 1\}$,而 $(2,3)$ 不产生任何解.

现在设 (m,n) 是本原的. 如果 $m=2^r$,那么由于 $\varphi(m)=2^{r-1}$ 整除,但是 4 不整除 m 和 n 的最大公因数,因此必须有 $r\leqslant 2$. 那样 $\varphi(n)\mid m$ 就要求 (m,n) 是上述 11 个解中的前 8 个之一.

由对称性,我们现在可设 m 和 n 都有奇的素因子. 因此 $\varphi(m),\varphi(n)$ 都是偶数,从而 m 和 n 也都是偶的. 如果 $4\mid m$,那么 $4\mid\varphi(m)\mid n$,矛盾. 因此由对称性可设 m 和 n 都不能被 4 整除. 那么 m 不可能有两个不同的奇的素因子,否则将有 $4\mid\varphi(m)\mid n$,又得出矛盾. 因此必须 $m=2p^r$ 以及 $n=2q^s$,其中 p,q 都是奇素数而 $r,s\geqslant 1$. 假设 $p\leqslant q$,那么从 $(p-1)\mid n$,我们得出 $p=3$. 如果 $q=3$,那么我们得出本原解 $(6,6)$ 和 $(6,18)$. 如果 $q\neq 3$,那么从假设得出 $r=s=1$ 和 $q-1=2p$,因此 $(m,n)=(6,14)$.

注　R. J. Chapman 和 J. H. Steelman 都证明了问题的条件蕴含 $\varphi(\varphi(n))\mid n$,而这一式子当且仅当 $n\in\{1,2^r,3,2^r3^s,2^r5,2^r7\mid r,s\geqslant 1\}$ 时

成立.

(AMM 10626)

138. 设 m,n 是互素的正整数,$\varphi(n)$ 是欧拉函数. 证明:$\varphi(5^m-1)\neq 5^n-1$.

证明 我们利用熟知的公式

$$(a^m-1,a^n-1)=a^{(m,n)}-1$$

如果$(m,n)=1$,那么由上面的公式有$(5^m-1,5^n-1)=4$. 5^m-1 的素因子不可能都是2. 不然将有 $5^m=2^k+1$,k 不可能是奇数,否则 $3\mid 5^m$,矛盾. 因此 $5^m=2^{2k}+1=4^k+1$,由此得出$(-1)^k+1\equiv 0(\bmod 5)$,这又说明在这个式子中 k 仍是偶数,故 $5^m=4^{2k}+1=16^k+1$,由此得出 $2=1^k+1\equiv 0(\bmod 5)$,矛盾. 因此可设 5^m-1 有素因子分解式 $2^{e_0}\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{e_i}$,其中所有的指数都是正的,因此我们有

$$\varphi(5^m-1)=2^{e_0-1}\prod_{i=1}^{s}p_i^{e_i-1}(p_i-1)$$

假设 $\varphi(5^m-1)=5^n-1$,那么由于$(5^m-1,5^n-1)=4$,因此必须有 $e_i=1$,$1\leqslant i\leqslant s$.

如果 m 是偶数,那么 $5^m-1=25^{\frac{m}{2}}-1\equiv 0(\bmod 8)$,因此 5^m-1 可被8整除,因而 $e_0\geqslant 3$. 由于$(m,n)=1$,因此 n 是奇数,那样 $5^n-1=5\cdot 25^k-1\equiv 4(\bmod 8)$,如果 $e_0-1>2$ 或 $s>2$ 或 $e_0-1=s=1$,我们都将有 $5^n-1=\varphi(5^m-1)\equiv 0(\bmod 8)$,与 $5^n-1\equiv 4(\bmod 8)$ 矛盾,因此必须 $e_0=3$,$s=0$,也就是 $5^m-1=8$,$5^m=9$,矛盾.

故 m 必须是奇数,由

$$5^m-1=(5-1)(5^{m-1}+5^{m-2}+\cdots+5+1)$$

可知

$$5^m-1=4\prod_{i=1}^{s}p_i$$

那样 $5^m\equiv 1(\bmod p_i)$,$1\leqslant i\leqslant s$. 由于 m 是奇数,故5是模 p_i 的二次剩余. 由二次互反律可知,每个 p_i 都是模5的二次剩余,那样 $p_i\equiv\pm 1(\bmod 5)$. 如果 $p_i\equiv 1(\bmod 5)$,那么 $p_i-1\equiv 0(\bmod 5)$,因而 $5^n-1\equiv 0(\bmod 5)$,矛盾. 因此必须 $p_i\equiv -1(\bmod 5)$,$1\leqslant i\leqslant s$. 那样,由 5^m-1 的素因子分解式得出 $-1\equiv(-1)^{s+1}(\bmod 5)$,由此得出 s 是偶数.

另一方面,由 $e_i=1$,$1\leqslant i\leqslant s$ 又得出

$$5^n-1=2\prod_{i=1}^{s}(p_i-1)$$

由此及 $p_i \equiv -1 \pmod 5$ 又得出 $-1 \equiv 2(-2)^s \pmod 5$，这要求 $s \equiv 3 \pmod 4$，和 s 是偶数矛盾.

所得的矛盾就说明如果 $(m,n)=1$，则不可能成立

$$\varphi(5^m-1)=5^n-1$$

(AMM 1962)

139. 设 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数，$\tau(n)$ 是 n 的正因数的个数. 证明：$\varphi(n)\tau(n) \geqslant n$.

证明 对 $d \mid n$ 有 $n \geqslant d$，因此

$$\varphi(n) \geqslant \varphi(d), \sum_{d \mid n}\varphi(n) \geqslant \sum_{d \mid n}\varphi(d)$$

$$\tau(n)\varphi(n)=\sum_{i=1}^{\tau(n)}\varphi(n)=\sum_{d \mid n}\varphi(n) \geqslant \sum_{d \mid n}\varphi(d)=n$$

(AMM E2351)

140. 设 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数，$\tau(n)$ 是 n 的正因数的个数. 证明：除了4之外，对所有的正整数 n，成立 $\varphi(n)[\tau(n)]^2 \leqslant n^2$. 等号什么时候成立？

证明 设 $\dfrac{\varphi(n)[\tau(n)]^2}{n^2}=f(n)$.

(1) 显然 $f(1)=1, f(2)=1, f(4)=\dfrac{9}{8}, f(3)=\dfrac{8}{9}$.

(2) 对奇素数 p，$f(p)=\dfrac{4(p-1)}{p^2}<1$.

对 $\alpha>0$，也有

$$\frac{f(p^{\alpha+1})}{f(p^\alpha)}=\frac{p(\alpha+2)^2}{p^2(\alpha+1)^2} \leqslant \frac{9}{4p}$$

因此由数学归纳法可以得出对所有正数 α，成立 $f(p^\alpha)<1$.

(3) 对 $\alpha>3$，$f(2^\alpha)=\dfrac{(\alpha+1)^2}{2^{\alpha+1}}<1, f(8)=1$.

(4) 从(1)，(3)得出 $f(4k)=1$，要求 $k=2$ 或者 $(k,2)=1$. 在后一种情况中，$f(k)=\dfrac{1}{f(4)}=\dfrac{8}{9}$，因此 $3 \mid k$. 由于由(2)，当 $\alpha>1$ 时，$f(3^\alpha)<\dfrac{8}{9}$ 以及 $f(p^\alpha)=1$ 要求 $p=2$，而 f 是积性的，因此 $f(k)=\dfrac{8}{9}$ 的仅有的解是 $k=3$.

因此等号仅在 $n=1,2,8,12$ 时成立.

(AMM E1725)

141. 设 $\varphi(x)$ 表示欧拉函数，n 是一个正整数，其素因子分解式为 $n=\prod_{p|n}p^h$，证明

$$\sum_{d|n}d\varphi(d)=\prod_{d|n}\frac{p^{2h+1}+1}{p+1}$$

证明 如果 x 表示任意复数而 k 是一个正整数，我们证明

$$\sum_{d|n}d^x\varphi(d^k)=\prod_{d|n}\left(1+\frac{p^{x+k-1}(p-1)(p^{h(x+k)}-1)}{p^{x+k}-1}\right)$$

考虑

$$\sum_{d|n}d^x\varphi(d^k)=n^x\sum_{d|n}\left(\frac{n}{d}\right)^x\varphi(d^k) \quad ①$$

由于算数函数 $f(n)=\frac{1}{n^x}$ 和 $g(n)=\varphi(n^k)$ 显然都是积性函数，因此它们的迪利克雷乘积 $\sum_{d|n}\left(\frac{d}{n}\right)^x\varphi(d^k)$ 也是积性函数. 这就得出式 ① 也是积性函数，因此我们只须对素因子的幂 p^h 计算即可.

$$\sum_{d|p^h}d^x\varphi(d^k)=\sum_{i=0}^{h}p^{xi}\varphi(p^{ki})=1+\sum_{i=1}^{h}p^{xi}p^{ki-1}(p-1)=$$
$$1+\frac{p^{x+k-1}(p-1)(p^{(x+k)h}-1)}{p^{x+k}-1}$$

当让指标跑过 n 的所有素因子，并把所有上式形式的因子相乘即得出所要证的结论.

(AMM E1984)

142. 设 n 的因数是 $d_1,d_2,\cdots,d_k$，$\varphi(n)$ 是欧拉函数，证明：

$$\prod_{i=1}^{k}\varphi(d_i)\leqslant\left(\frac{n}{k}\right)^k$$

证明 设 $f(n)$ 是一个定义在整数上的函数，当 $n\geqslant1$ 时 $f(n)>0$. $d_1=1,d_2,\cdots,d_k=n$ 是 n 的正的因数. $F(n)=\sum_{i=1}^{k}f(d_i)$，那么由平均值不等式可以得出

$$\left(\prod_{i=1}^{k}f(d_i)\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}f(d_i)=\frac{F(n)}{k}$$

故

$$\prod_{i=1}^{k}f(d_i)\leqslant\left(\frac{F(n)}{k}\right)^k$$

由于当 $n\geqslant1$ 时 $\varphi(n)>0$，并且 $\sum_{i=1}^{k}\varphi(d_i)=n$，因此令 $f(n)=\varphi(n)$，那么从 $F(n)=n$ 就得出所需的不等式. 如果 $\varphi(d_1)=\varphi(d_2)\cdots=\varphi(d_k)$，那么 $\varphi(n)=\varphi(1)=1$，因此等号仅

在 $n=1$ 或 $n=2$ 时成立.

(AMM E1767)

143. 设 $\mu(n)$ 是麦比乌斯(Möbius)函数,$\varphi(n)$ 是欧拉函数,证明:当且仅当 n 是偶数时

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)\varphi(d)=0$$

证法1 设 $F(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\varphi(d)$. 由于 $\mu(n)$ 和 $\varphi(n)$ 都是积性函数,因此 $F(n)$ 也是. 现在设 p^m 是一个素数的幂,那么

$$F(p^m)=1-(p-1)=2-p$$

因此在一般情况下,$F(n)=\prod_{p\mid n}(2-p)$,这就证明了结论.

证法2 也可以不使用 $\mu(n)$ 和 $\varphi(n)$ 都是积性函数的结果.

除了 $d=1$ 和 $d=2$ 之外,对所有其他的 d,$\varphi(d)$ 都是偶数. 这蕴含当 $d>2$ 时,$\mu(d)\varphi(d)$ 都是偶数. 而 $\mu(1)\varphi(1)=1$,$\mu(2)\varphi(2)=-1$,因此 $\sum\mu(d)\varphi(d)$ 总是奇数,除了当 $d=1$ 和 $d=2$ 都包括时,也就是,除了当 n 是偶数时.

反过来,如果 d 是一个偶数 n 的奇因数,那么

$$\varphi(2d)=\varphi(d),\mu(2d)=-\mu(d),\mu(4d)=0$$

因而
$$\mu(2d)\varphi(2d)+\mu(d)\varphi(d)=0$$

那样,忽略 n 的是4的倍数的因数后(因为这些因数对合数没有任何贡献),和数中所有其他的项都可以被消去,因而总的和数为零.

(AMM E3106)

144. 设 $S(n)$ 是所有使得 $\frac{n}{k}$ 的分数部分大于或等于 $\frac{1}{2}$ 的正整数 k 的集合,例如

$$S(17)=\{2,3,6,9,10,11,18,19,20,\cdots,34\}$$

证明
$$\sum_{k\in S(n)}\varphi(k)=n^2$$

其中 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数.

证明 设 $\{x\}=x-[x]$ 表示 x 的分数部分,那么当且仅当 $\left\{\frac{n}{k}\right\}\geqslant\frac{1}{2}$ 时,$k\in S(n)$. 如果 $k>2n$,那么 $\frac{n}{k}<\frac{1}{2}$,因此 $k\overline{\in}S(n)$,所以 $k\in S(n)$ 蕴含 $k\leqslant 2n$. 现在如果 $\{x\}<\frac{1}{2}$,那么 $[2x]-2[x]=0$,否则 $[2x]-2[x]=1$. 由于当 $k>n$ 时 $\left[\frac{n}{k}\right]=0$,因此我们有

$$\sum_{k\in S(n)}\varphi(k)=\sum_{k=1}^{2n}\varphi(k)\left(\left[\frac{2n}{k}\right]-2\left[\frac{n}{k}\right]\right)=\sum_{k=1}^{2n}\varphi(k)\left[\frac{2n}{k}\right]-2\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\left[\frac{n}{k}\right]$$

但是熟知
$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\left[\frac{n}{k}\right]=\frac{n(n+1)}{2}$$
(例如,见T. M. Apostol, Introduction to Analytic NumberTheory, Theorem 3.11),因此
$$\sum_{k\in S(n)}\varphi(k)=\frac{2n(2n+1)}{2}-2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)=n^2$$

(AMM E3215)

145. 设 φ 表示欧拉函数,并设 A 是使得方程 $\varphi(x+n)=3\varphi(x)$ 有解的正整数 n 的集合. 证明:对任意正整数 N, $[1,N]$ 中至少有一半的数属于 A.

证明 我们证明 A 包含1以及3的倍数和4的倍数. 由于 $\varphi(7)=3\varphi(6)$,故 $1\in A$. 如果 n 是一个奇的3的倍数,则我们有
$$\varphi(2n+n)=\varphi(3n)=3\varphi(n)=3\varphi(2n)$$
故 $n\in A$;如果 n 是一个偶的3的倍数,那么 $n=2k, 3\mid k$,因此
$$\varphi(k+n)=\varphi(3k)=3\varphi(k)$$
因此也有 $n\in A$. 这就证明了3的倍数都属于 A.

设 n 是4的倍数,但不是3的倍数,不能被7整除. 那么我们有 $n=4k, 3\nmid k, 7\nmid k$,那样
$$\varphi(3k+n)=\varphi(7k)=6\varphi(k)=3\varphi(3k)$$
故 $n\in A$;如果 $7\mid n$,则我们有 $n=28k, 3\nmid k$. 由于 $3\nmid k$,我们有 $\varphi(12k)=2\varphi(4k)=\varphi(8k)$. 因而也故有 $n\in A$; $\varphi(8k+n)=\varphi(36k)=3\varphi(12k)=3\varphi(8k)$. 这就证明了4的倍数都属于 A.

(AMM E1669)

146. 设 $\varphi_0(n)=\varphi(n)$ 表示欧拉函数, $\varphi_k(n)=\varphi(\varphi_{k-1}(n))$. 证明:对任意固定的 k,当 $n\to\infty$ 时, $\varphi_k(n)\to\infty$.

证明 设 n 的素因子分解式为 $n=q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}, \alpha_i\geqslant 1$,则我们有
$$n=q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}>2^{r-1}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{q_1}{q_1-1}\cdot\cdots\cdot\frac{q_r}{q_r-1}$$
那样 $\varphi(n)=\frac{q_1}{q_1-1}\cdots\frac{q_r}{q_r-1}\cdot q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{q_1^{\alpha_1}\cdots q_r^{\alpha_r}}{q_1^{\alpha_1/2}\cdots q_r^{\alpha_r/2}}=\frac{1}{2}\sqrt{n}$

因而 $\varphi_1(n)>\frac{1}{2}\sqrt{\varphi(n)}>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{n}}=\frac{1}{4}n^{\frac{1}{4}}$

一般的 $$\varphi_k(n) > \frac{1}{4}n^{1/2^{k+1}}$$

这就证明了结论.

(AMM E5239)

147. 设 $\varphi_1(m) = \varphi(m)$ 表示欧拉函数, $\varphi_n(m) = \varphi(\varphi_{n-1}(m))$. 又设 $\omega(m) = n$ 表示使得 $\varphi_n(m) = 1$ 的最小的 n. 证明:如果 $m < 2^a$,那么 $\omega(m) \leqslant a$.

证明 设 $\varphi_j(m) = 1$,而 j 是最小的那种整数,那么 $\varphi_{j-1}(m) = 2$. 又有 $\varphi_1(m) < m < 2^a$,而由于 $\varphi_1(m)$ 是偶数,因此 $\varphi_2(m) \leqslant \frac{1}{2}\varphi_1(m) < 2^{a-1}$. 连续应用这一不等式,我们求得 $\varphi_{j-1}(m) < 2^{a-(j-2)}$ 或 $2 < 2^{a-(j-2)}$,那样就得出 $j < a+1$ 或 $j \leqslant a$.

(AMM 5076)

148. 设 $\varphi_0(n) = \varphi(n)$ 表示欧拉函数,证明
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \infty,\ \liminf_{n\to\infty}\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = 0$$

证明 设 p_i 是第 i 个素数, r 是一个正整数, $n = p_1p_2\cdots p_r$. 由迪利克雷定理可知,对某个正整数 k, $q = kn+1$ 是素数,而
$$\varphi(q) = kn$$
$$\varphi(q-1) = kn\prod_{p\mid kn}\left(1-\frac{1}{p}\right) \leqslant kn\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

因此
$$\frac{\varphi(q)}{\varphi(q-1)} \geqslant \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}$$

而众所周知 $\prod\limits_{p}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 收敛到零,那样,当 r 变大时,我们就得出
$$\limsup\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = \infty$$

为证明第二部分,对某个 k, $q = kn-1$ 是素数,那么 $\varphi(q) = kn-2$,而
$$\varphi(q+1) = kn\prod_{p\mid kn}\left(1-\frac{1}{p}\right) \leqslant kn\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

那样
$$\frac{\varphi(q+1)}{\varphi(q)} \leqslant \frac{kn}{kn-2}\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

让 r 变大就得出 $$\liminf\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = 0$$

(AMM E2581)

149. 设 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数，F_n 是斐波那契叙列：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant 1)$，证明：当 $n\geqslant 5$ 时，$\varphi(F_n)$ 可被 4 整除.

证明 当 $n\geqslant 5$ 时，四个整数 ± 1，$\pm F_{n-1}$ 在模 F_n 下是互不同余的. 而熟知 $F_{n-1}^2-F_{n-2}F_n=(-1)^n$，因此上面四个整数构成模 F_n 的有单位元的整数环的乘法群 G 的子群，由于 $|G|=\varphi(F_n)$，那样，由拉格朗日定理即可得出所要的结论.

150. 设 $\varphi(m)$ 表示欧拉函数，$1<m<\varphi(m)+n$，证明：$\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i\mathrm{C}_n^i i^m$ 可被 m 整除.

证明 令 $k=m-\varphi(m)$，则由已知条件可得 $n>k$. 费马小定理的一个推广是对每个整数 a 成立 $a^m\equiv a^{m-\varphi(m)}(\bmod m)$.

(见 I. Niven and Zuckerman, An Introduction to Theory of Numbers, John Wiley & Sons, 4th ed., p 51, problem 22)(编译者注：中文可见潘承洞，潘承彪. 初等数论. 北京：北京大学出版社，1992 年第一版，第三章习题三第 15 题)，那样

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\mathrm{C}_n^i i^m\equiv\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\mathrm{C}_n^i i^k(\bmod m)$$

我们现在证明当 $k<n$ 时，上式右边的和是 0. 考虑生成函数 $f_0(x)=\sum\mathrm{C}_n^i x^i$，设 $f_r(x)=xf'_r(x)$，那么对 $r>0$ 就有 $f_r(x)=\sum i^r\mathrm{C}_n^i x^i$. 由于 $f_0(x)=(x+1)^n$，利用数学归纳法可证只要 $r<n$，每个 f_r 都有因子 $(x+1)^{n-r}$，因此在 f_k 中令 $x=-1$ 即可得出结果.

(AMM 5224)

151. 设 $\psi(a)=\left(\frac{a}{p}\right)$ 表示勒让德符号，证明：如果 $abcd\not\equiv 0(\bmod p)$，则

$$S=\sum_{x,y,z=0}^{p-1}\psi(ax^2+by^2+cz^2-2dxyz)=-p(\psi(a)+\psi(b)+\psi(c)+\psi(-abc))$$

证明 我们利用由 Ernst Jacobsthal 所证明的公式

$$\sum_{x=0}^{p-1}\psi(x^2+n)=p-1-p\psi^2(n) \qquad ①$$

(J. Reine Angew, Math., 1932 (1907), 238-245). 那样，我们有

$$\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1}\psi(ax^2+by^2+cz^2-2dxyz)=$$

$$\psi(c)\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\sum_{z=0}^{p-1}\psi\left(\left(z-\frac{dxy}{c}\right)^2-\frac{d^2x^2y^2}{c^2}+\frac{ax^2}{c}+\frac{by^2}{c}\right)=$$

$$\psi(c)\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\left(p-1-p\psi^2\left(-\frac{d^2x^2y^2}{c^2}+\frac{ax^2}{c}+\frac{by^2}{c}\right)\right)=$$

$$\psi(c)p\left(p(p-1)-\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{y=0}^{p-1}\psi^2(by^2c-d^2x^2y^2+ax^2c)\right)=$$

$$\psi(c)p\begin{pmatrix}p(p-1)-\sum\limits_{d^2x^2\neq bc}^{p-1}\psi^2(y^2(bc-d^2x^2)+acx^2)-\\ \sum\limits_{d^2x^2=bc}^{p-1}\sum\limits_{y=0}^{p-1}\psi^2(acx^2)\end{pmatrix}=$$

$$\psi(c)p\begin{pmatrix}p(p-1)-\\ \sum\limits_{d^2x^2\neq bc}^{p-1}\left(p-1-\psi\left(-\frac{acx^2}{bc-d^2x^2}\right)\right)-p\sum\limits_{d^2x^2=bc}^{p-1}1\end{pmatrix}=$$

$$p\psi(c)(p(p-1)-(p-1)(p-1-\psi(bc)+$$

$$\sum_{\substack{x=0\\ d^2x^2\neq bc}}^{p-1}\psi(-acx^2\psi(bc-d^2x^2)-p(1+\psi(bc)))=$$

$$p\psi(c)(-1-\psi(bc)+\psi(ac)\sum_{x=1}^{p-1}\psi(d^2x^2-bc))=$$

$$p\psi(c)\Big(-1-\psi(bc)+\psi(ac)\Big(-\psi(-bc)+$$

$$\psi(d^2)\sum_{x=0}^{p-1}\psi\left(x^2-\frac{bc}{d^2}\right)\Big)\Big)=$$

$$p\Big(-\psi(c)-\psi(b)+\psi(a)\Big(-\psi(-bc)+p-$$

$$1-p\psi^2\left(-\frac{bc}{d^2}\right)\Big)\Big)=$$

$$p\begin{pmatrix}-\psi(c)-\psi(b)-\psi(-abc)+\\ \psi(a)(p-1-p)\end{pmatrix}=$$

$$-p(\psi(a)+\psi(b)+\psi(c)+\psi(-abc))$$

(AMM E1900)

152. 设 $\tau(n)$ 是 n 的正的因数的数目，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，证明：

$$\sum_{k=1}^{2n}\tau(k)=n+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2n}{k}\right]$$

证明　我们有

$$\left[\frac{2n+2}{k}\right]-\left[\frac{2n}{k}\right]=\varepsilon_k$$

其中，当 $k=1$ 时，$\varepsilon_k=2$；当 k 是 $2n+1$ 或 $2n+2$ 的因数时，$\varepsilon_k=1$；在其他情况下 $\varepsilon_k=0$，同时注意 $2n+1$ 和 $2n+2$ 是互素的，因此当 $k>1$ 时，k 不可能既是 $2n+1$ 的因数又是 $2n+2$ 的因数，最后再注意 $n+1$ 是 $2n+2$ 的除了它本身的最大因数，因此当 k 从2跑到 n 时，k 一共经过了 $2n+2$ 的 $\tau(2n+2)-3$ 个因数(除了1，$n+1$ 和 $2n+2$ 这两个因数)，也一共经过了 $2n+1$ 的 $\tau(2n+1)-2$ 个因数(除了1和 $2n+1$ 这两个因数)，这样当 k 从2跑到 n 时，ε_k 中共有

$$\tau(2n+2)-3+\tau(2n+1)-2=\tau(2n+2)+\tau(2n+1)-5$$

个1，其余的全是0，因此

$$\sum_{k=1}^{n+1}\left[\frac{2n+2}{k}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2n}{k}\right]=\varepsilon_1+(\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n)+\left[\frac{2n+2}{n+1}\right]=$$
$$2+\tau(2n+2)+\tau(2n+1)-5+2=$$
$$\tau(2n+2)+\tau(2n+1)-1$$

令 $f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\tau(k)-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2n}{k}\right]$，则由上式得出 $f(n+1)-f(n)=1$，再由 $f(1)=1$ 即可得出

$$f(n)=\sum_{k=1}^{2n}\tau(k)-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{2n}{k}\right]=n$$

这就证明了所要的等式.

153. 设 $\tau(n)$ 是 n 的正因数的个数，证明：

(1) $D(n)=\sum_{k\leqslant n}\tau(k)=\sum_{d\mid n}\left[\frac{n}{d}\right]$.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$\frac{D(n)}{n}\to\infty$.

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{D(n)}{n^2}=0$.

(Eckford Cohen, Legendre Identity , AMM V01.76(1969), No.6, 614)

证明 (1) 画一个 n 行 n 列的正方形，如果 $i\mid j$，$1\leqslant i\leqslant n$，$1\leqslant j\leqslant n$，则在第 i 行，第 j 列处填上1，否则填上0. 那么根据填法的意义可知第一列之和为 $\tau(1)$，第2列之和为 $\tau(2)$，…，第 n 列之和为 $\tau(n)$. 第1行之和为 $\left[\frac{n}{1}\right]$，第2行之和为 $\left[\frac{n}{2}\right]$，…，第 n 行之和为 $\left[\frac{n}{n}\right]$，因此

$$D(n)=\sum_{k\leqslant n}\tau(k)=\sum_{d\mid n}\left[\frac{n}{d}\right]$$

(2) 由于

$$D(n)=\sum_{k\leqslant n}\tau(k)=\sum_{d\mid n}\left[\frac{n}{d}\right]>\frac{n}{2}\sum_{d\leqslant n}\frac{1}{d}$$

故 $\frac{D(n)}{n}>\sum_{d\leqslant n}\frac{1}{d}$，因而当 $n\to\infty$ 时，$\frac{D(n)}{n}\to\infty$.

(3) $$0<D(n)=\sum_{d\leqslant n}\left[\frac{n}{d}\right]\leqslant\sum_{d\leqslant n}\frac{n}{d}=n\sum_{d\leqslant n}\frac{1}{d}$$

故 $$0<\frac{D(n)}{n^2}<\frac{\sum_{d\leqslant n}\frac{1}{d}}{n}$$

由史笃兹定理可知当 $n\to\infty$ 时，$\frac{\sum_{d\leqslant n}\frac{1}{d}}{n}\to 0$，因此 $\frac{D(n)}{n^2}\to 0$.

(AMM 5591)

154. 设 $n>1$，$\sigma(n)$ 是 n 的正的因数之和，$\varphi(n)$ 是欧拉函数. 证明

$$\varphi\left(n\left[\frac{\sigma(n)}{n}\right]\right)<n$$

证明 首先注意，从 $\varphi(n)=n\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)$，其中 p 遍历 n 的所有素因数可以得出对任何 $a,b\geqslant 1$ 成立 $\varphi(ab)\leqslant b\varphi(a)$. 再利用 $\varphi(n)\sigma(n)<n^2$ 就得出

$$\varphi\left(n\left[\frac{\sigma(n)}{n}\right]\right)\leqslant\varphi(n)\left[\frac{\sigma(n)}{n}\right]\leqslant\varphi(n)\frac{\sigma(n)}{n}<n$$

(AMM E1749)

155. 证明：当 $n>1$ 时，$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}\leqslant\frac{3n}{4}$，其中 $\tau(n)$ 是 n 的正的因数的数目，$\sigma(n)$ 是 n 的正的因数之和.

证明 称 $\frac{n}{d}$ 是 n 的因数 d 的余因数. n 是 n 的因数中唯一使得 $d\geqslant\frac{3n}{4}$ 的因数，其余因数为 1. n 和 n 的余因数的算术平均是 $\frac{n+1}{2}$. 如果 n 是合数，那么 n 的所有其他的因数和余因数的算术平均都将小于 $\frac{3n}{4}$，由于这些因数都小于 $\frac{3n}{4}$. 又 $\frac{n+1}{2}\leqslant\frac{3n}{4}$，等号仅在 $n=2$ 时成立，因而

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}=\frac{1+d_2+\cdots+d_{\tau(n)-1}+n}{\tau(n)}=$$

$$\frac{(1+n)+d_2+\cdots+d_{\tau(n)-1}}{\tau(n)}\leqslant$$

$$\frac{2\frac{3n}{4}+(\tau(n)-2)\frac{3n}{4}}{\tau(n)}\leqslant\frac{3n}{4}$$

(AMM E2376)

156. 设 $\sigma(n)$ 是 n 的正的因数之和，p,q 是奇素数，a,b 是使得 $p^a > q^b$ 成立的正整数. 证明：如果 p^a 整除乘积 $\sigma(p^a)\sigma(q^b)$，那么 $p^a = \sigma(q^b)$.

证明 我们有

$$\sigma(p^a) = 1 + p + \cdots + p^a \equiv 1(\bmod p)$$

因此 $(p^a,\sigma(p^a)) = 1$，那样，如果 p^a 整除 $\sigma(p^a)\sigma(q^b)$，那么 $p^a \mid \sigma(q^b)$. 注意

$$\sigma(q^b) = 1 + q + \cdots + q^b = \frac{q^b - 1}{q - 1} + q^b < 2q^b$$

但是 $q^b < p^a$，因此 $\sigma(q^b) < 2p^a$，还有 $1 < \sigma(q^b)$，因此 $p^a \mid \sigma(q^b)$ 蕴含 $p^a = \sigma(q^b)$.

(AMM E2493)

157. 设 $\sigma(n)$ 是 n 的正的因数之和，证明：当且仅当 n 是不同的梅森(Mersenne)素数时，$\sigma(n)$ 是 2 的幂.

证明 $\sigma(n)$ 是积性函数，即如果 r,s 互素，则 $\sigma(rs) = \sigma(r)\sigma(s)$. 此外还有，如果 n 的素因子分解式为 $n = \prod_p p^a$，那么

$$\sigma(n) = \prod \sigma(p^a) = \prod (1 + p + p^2 + \cdots + p^a)$$

如果 n 的每个素因数都是梅森素数 $(p = 2^k - 1)$，并且每个素因数的指数都是 $a = 1$，那么我们就有

$$\sigma(n) = \prod (1 + p) = \prod 2^k = 2^c$$

是一个 2 的幂.

反过来，假设 $\sigma(n) = \prod (1 + p + p^2 + \cdots + p^a) = 2^r$，那么乘积中的每个因子都是 2 的幂，$1 + p + p^2 + \cdots + p^a = 2^s (s \leqslant r)$，那么为了避免 $1 + p + p^2 + \cdots + p^a$ 是一个奇数，a 就必须是一个奇数，比如说是 $2q + 1$，这样就有

$$1 + p + \cdots + p^{2q+1} = (1 + p)(1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{2q}) = 2^s$$

由上式就得出必存在适当的整数 t 和 u 使得

$$1 + p = 2^t, 1 + p^2 + p^4 + \cdots + p^{2q} = 2^u$$

$1 + p = 2^t$ 蕴含 $p = 2^t - 1$ 是一个梅森素数，如果第二个因数是真因数，即 $q > 0$，那么从上式得出

$$1 + (p^2) + (p^2)^2 + \cdots + (p^2)^q = 2^u$$

就像上面我们说明 a 必须是一个奇数那样，上式说明 q 也必须是一个奇数，因此 $q = 2q_1 + 1$，这又得出

$$(1 + p^2)(1 + p^4 + p^8 + \cdots + p^{4q_1}) = 2^u$$

因此必有 $1+p^2=2^w$，但是我们已证 $1+p=2^t$，由于

$$1+p<1+p^2$$

因此必有

$$(1+p)\mid(1+p^2)$$

同时又有 $(1+p)\mid(1-p^2)$，因此连同 $(1+p)\mid(1+p^2)$ 就得出

$$(1+p)\mid(1+p^2)+(1-p^2)=2$$

由于 $p\geq 2$，因此这就得出矛盾，所得的矛盾说明 q 必须是零. 这就证明了 n 是不同的梅森素数的乘积.

(AMM E1918)

> 158. 设 p 是一个大于 3 的素数，$\sigma_k(n)$ 表示 n 的正的因数的 k 次幂之和，证明：对任意正整数 k，$3p$ 不可能整除 $\sigma_k(3p)$.

证明 $3p$ 的仅有的因数为 $1,3,p$ 和 $3p$. 如果

$$3p\mid\sigma_k(3p)=1+3^k+p^k+3^kp^k$$

由此得出

$$3\mid p^k+1,\ p\mid 1+3^k$$

从 $3\mid p^k+1$ 又得出 $p\equiv 2\pmod 3$ 以及 k 是奇数. 另一方面，从 $p\mid 1+3^k$ 又得出 $3^{k+1}\equiv -3\pmod p$，其中 $k+1$ 是偶数，但是这和如果 $p\equiv 2\pmod 3$，那么 -3 不可能是模 p 的二次剩余这一事实矛盾(见问题 3721，1936，583).

注 关于当 $p\equiv 2\pmod 3$ 时，-3 不可能是模 p 的二次剩余这一结果，也可用勒让德符号直接验证如下：由于 p 是大于 3 的素数，所以 $p-1$ 是偶数，故

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{3-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)=$$

$$(-1)^{p-1}\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)$$

当 $p\equiv 2\pmod 3\equiv -1\pmod 3$ 时

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\left(\frac{p}{3}\right)=\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$$

故 -3 不可能是模 p 的二次剩余.

(AMM 6065)

> 159. 设 $\varphi(n)$ 是欧拉函数，熟知 φ 的自然密度是 0. 设 $\sigma(n)$ 是 n 的正的因数之和，证明：$\sigma(n)$ 的密度也是 0.

证明 在 Niven and Zuckerman，An Introduction to the Theory of Numbers 一书中可以找到一个 $\varphi(n)$ 的密度是 0 的证明，将此证明稍加修改也可证明 $\sigma(n)$ 的密度是 0.

设 $B^k=\{n\mid n=p_1\cdots p_q p_{q+1}^{\alpha_1}\cdots p_{q+s}^{\alpha_s},\alpha_i\geqslant 2,1\leqslant i\leqslant s,r\leqslant k\}$.

那么在文献中已证明 B^k 的密度是0. 如果 $n\overline{\in}B^k$,那么 n 至少要有 $k+1$ 个指数为1的素因数,因此 $\sigma(n)$ 有 2^k 个因数. 设 $\varepsilon>0$ 并选 k 使得 $\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\sigma(N)=B\cup C$,其中 $B=\{m\in\sigma(N)\mid 2^k\mid m\}$,$B\cap C=\varnothing$. 显然 $B(x)\leqslant\frac{x}{2^k}<\frac{\varepsilon x}{2}$. 设 $C^*=\sigma^{-1}(C)$,那么 $n\in C^*\Rightarrow\sigma(n)\in C\Rightarrow\sigma(n)$ 至多有 k 个指数为1的素因数,因此 $C^*\subset B^k$,这就说明密度为0. 但是 $\sigma(n)>n\vee n$,因此 $C(x)\leqslant C^*(x)<\frac{\varepsilon x}{2}$,那样对充分大的 x 成立 $\sigma(N)(x)<\varepsilon x$,这就得出所要的结论.

(AMM E2611)

160. D. H. Lehmer 所给出的一个已有很长时期的猜想是如果 $n\geqslant 2$ 是一个正整数并且 $\varphi(n)\mid(n-1)$,那么 n 是一个素数. 证明:当且仅当 $\varphi(n)\mid(n-1)$ 并且 $(n+1)\mid\sigma(n)$ 时,正整数 $n\geqslant 2$ 是一个素数.

证明 如果 n 是一个素数,那么 $\varphi(n)=n-1$ 并且 $\sigma(n)=n+1$.

反过来,设 $n>2$ 并且假设 $\varphi(n)\mid(n-1)$ 以及 $(n+1)\mid\sigma(n)$. 由于 $\varphi(n)$ 是偶数,n 必须是奇数. 如果 p 是 n 的使得 $p^r\mid n$,$r\geqslant 2$ 的奇素因数,那么 $p^{r-1}\mid\varphi(n)$,这蕴含 $p^{r-1}\mid n-1$,显然这是一个矛盾. 因此 n 必是不同素数的乘积:$n=p_1p_2\cdots p_k$. 这样我们有

$$\varphi(n)=(p_1-1)\cdots(p_k-1),\sigma(n)=(p_1+1)\cdots(p_k+1)$$

因而 2^k 整除 $\varphi(n)$ 和 $\sigma(n)$. 如果 $k\geqslant 2$,那么 $4\mid\varphi(n)\mid n-1$,因而 $4\nmid n+1$. 这就得出 2^{k-1} 整除 $\frac{\sigma(n)}{n+1}$,并且因此

$$2^{k-1}<\frac{\sigma(n)}{n}=\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_k}\right)<\left(\frac{4}{3}\right)^k$$

这一矛盾说明必须有 $k=1$,因而 n 是一个素数.

(AMM 6363)

161. 设 φ 表示欧拉函数,$D(\alpha)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}\#\left\{n\leqslant x\,\middle|\,\frac{\varphi(n)}{n}\leqslant\alpha\right\}$是 $\frac{\varphi(n)}{n}$ 的分布函数,证明:

$$D\left(\frac{1}{2}\right)-D\left(\frac{1}{4}\right)+D\left(\frac{1}{8}\right)-D\left(\frac{1}{16}\right)+\cdots=\frac{1}{2}$$

证明 对 $l\geqslant 0$,定义

$$D_l(\alpha, x) = \frac{1}{x}\#\left\{n \leqslant x \mid n = 2^l m, m \text{odd and } \frac{\varphi(n)}{n} \leqslant \alpha\right\}$$

$$D_l(\alpha) = \lim_{x\to\infty} D_l(\alpha, x)$$

$D_l(\alpha)$ 的存在性可以用与 $D(\alpha)$ 的存在性十分类似的方式建立.见 I. J. Schoenberg, Uber die Asympotische Verleitung Reeler Zahlenmod I, Math. Z. 28 (1928) 171-199.显然

$$\frac{1}{x}\#\left\{n \leqslant x \,\middle|\, \frac{\varphi(n)}{n} \leqslant \alpha\right\} = \sum_{l=0}^{\infty} D_l(\alpha, x) \quad ①$$

对 $n = 2^l m$, m 是奇数, $l \geqslant 1$.我们有$\frac{\varphi(n)}{n} = \frac{\varphi(m)}{2m}$,并且因此

$$D_l(\alpha, x) = \frac{D_0(2\alpha, x)}{2^l}, l \geqslant 1 \quad ②$$

由于 $D_0(2\alpha, x) \leqslant 1$,从 ① 和 ② 以及魏尔斯特拉斯(Weierstrass)大 M 检验法就有

$$D(\alpha) = D_0(\alpha) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{D_0(2\alpha)}{2^l} = D_0(\alpha) + D_0(2\alpha)$$

因此当 $n \to \infty$ 时

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\frac{\alpha}{2^k}\right) = D_0(\alpha) + (-1)^{n-1} D\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) \to D_0(\alpha)$$

分布函数 $D_0(\alpha)$ 在 0 处是上半连续的,因此

$$D\left(\frac{\alpha}{2}\right) - D\left(\frac{\alpha}{4}\right) + D\left(\frac{\alpha}{8}\right) - D\left(\frac{\alpha}{16}\right) + \cdots = D_0(\alpha)$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 时,此式等于 1.

162. 设 $n \geqslant 2$ 是整数,证明:$\sum \frac{1}{pq} = \frac{1}{2}$,其中的和号表示对所有满足 $0 < p < q \leqslant n$, $p + q > n$, $(p, q) = 1$ 的整数 p, q 求和.

(AMM E2079)

解 设所求的和为 $f(n)$,那么求和中所有在 $f(n)$ 中出现但是在 $f(n-1)$ 中不出现的项可表为 $a_p = \frac{1}{pn}$, $1 \leqslant p < n$, $(p, n) = 1$;而所有在 $f(n-1)$ 中出现但是在 $f(n)$ 中不出现的项可表为 $b_p = \frac{1}{p(n-p)}$, $1 \leqslant p < n - p$, $(p, n-p) = 1$(等价的 $(p, n) = 1$);因此在求和时仅对 $(p, n) = 1$ 求和.这样,我们有

$$f(n) - f(n-1) = \sum_{p<n} a_p - \sum_{2p<n} b_p = \sum_{2p<n} (a_p + a_{n-p} - b_p)$$

但是

$$a_p + a_{n-p} - b_p = 0$$

因此对 $n \geqslant 3$, $f(n) = f(n-1)$,由此即可得出结果.

注 由于$(p,n)=1$，因此当$p=\frac{n}{2}$，$n\geq 3$时，$f(n)-f(n-1)$中实际上没有任何项.

(AMM 5357)

163. 设 n 是一个正整数，$f(n)$ 表示把 n 表示成两个互素的正整数的乘积的方法的数目（不区分乘积中因子的顺序），$\nu(n)=(-1)^{r(n)}$，其中 $r(n)$ 表示 n 的正的不同的素因数的数目. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)f^3(n)}{n^2}=\frac{7}{8}$$

证明 可以用很多方法证明（例如用数学归纳法）：如果 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，那么 $f(n)=2^{k-1}=2^{r(n)-1}$. 又显然 $f(1)=1$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu(n)f^3(n)}{n^2}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{r(n)}2^{3r(n)-3}}{n^2}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-8)^{r(n)}}{n^2}$$

由于 $r(n)$ 是加性函数，故$(-8)^{r(n)}$ 是积性函数，因此我们可以把上述和式转换为一个通过所有素数的乘积

$$=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\prod_p\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-8)^{r(p^k)}}{p^{2k}}=\frac{7}{8}+\prod_p\left(1-\frac{8}{p^2-1}\right)$$

由于当 $p=3$ 时，$1-\frac{8}{p^2-1}=0$，并且当 $p>3$ 时，上面的乘积绝对收敛，因此整个乘积的值就是 0. 这就证明了所给级数的和就是 $\frac{7}{8}$.

(AMM E1963)

164. 对任意正整数 q 和 n，定义 $S_q(0)=1$，$S_q(n+1)=q^{S_q(n)}$，求出最大的能整除 $S_3(n+1)-S_3(n)$ 的 2 的幂.

解 我们考虑更一般的对任意奇数 q 的问题，尽管这要稍微多费一点时间. 如果 $q=q_0 2^k\pm 1$，q_0 是奇数，$k>1$，那么容易用归纳法证明对 $r>0$，$q^{2^r}=2^{k+r}q_r+1$，其中 q_r 是奇数. 现在设

$$S_q(n)-S_q(n-1)=2^rQ$$

其中 Q 是奇数，那么

$$S_q(n+1)-S_q(n)=q^{S_q(n-1)}(q^{2^rQ}-1)=R(q^{2^r}-1)=2^{r+k}R'$$

其中 R 和 R' 是奇数.

那样，如果 r_n 是 $S_q(n+1)-S_q(n)$ 的素因子分解式中2的指数，那么对所有的 n 就有

$$r_n = r_{n-1} + k = kn + r_0$$

如果 $q \equiv 1 \pmod 4$，那么 $r_0 = k$，如果 $q \equiv 3 \pmod 4$，那么 $r_0 = 1$。

对 $q = 3, r_0 = 1$ 和 $k = 2$，因此对所有的 n，$r_n = 2n + 1$。

（AMM E1964）

165. 设 $\varphi(n)$ 是欧拉函数，$\{n_i\}$ 是小于 n 且和 n 互素的正整数的集合，如果 $n > 2$，证明

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} \frac{1}{n_i}$$

不是一个整数。

证明 对 $n > 2$，由众所周知的波特兰（Bertrand）假定，在 $\frac{n}{2}$ 和 n 之间存在一个素数 p。把所给的式子写成

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} \frac{1}{n_i} = \frac{\sum_{i=1}^{\varphi(n)} \frac{1}{n_i} \prod_{k=1}^{\varphi(n)} n_k}{\prod_{k=1}^{\varphi(n)} n_k}$$

那么显然 p 作为某个 n_k 将整除分母但是不能整除分子（由于除了一项之外，它能整除每一项），因而分母不可能整除分子。

（AMM E2946）

166. 设 $f(n)$ 是 n 的所有正因数的乘积。例如 $f(3)=3$，$f(4)=8$。是否 $f(m)=f(n)$ 蕴含 $m=n$。

解 答案是正确的。假设 $f(m)=f(n)$，我们证明 $m=n$。对任意 m 的素因数 p，设 p^a 和 p^b 分别是整除 m 和 n 的 p 的最高次幂。令 $m = p^aM$。如果 p^k 是整除 $f(m)$ 的最高次幂，那么由直接计算可得 $k = \frac{a(a+1)d(M)}{2}$，其中 $d(M)$ 表示 M 的正因数的个数，还有 $d(m) = (a+1)d(M)$，因此 $k = \frac{ad(m)}{2}$。由于 $f(m)=f(n)$，这就得出 $k = \frac{bd(n)}{2}$ 以及 $\frac{a}{b} = \frac{d(n)}{d(m)}$。那样对 m 的每个素因数，比 $\frac{a}{b}$ 是相同的。$\frac{a}{b} < 1$ 蕴含 m 是 n 的真因数，因此 $f(m) < f(n)$，同理从 $\frac{a}{b} > 1$ 可以得出 $f(m) > f(n)$。因而我们得出 $\frac{a}{b} = 1$，因此 $m = n$。

(AMM E2039)

167. 设正整数 n 标准素因子分解式为 $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$，$F(n)=\sum_{i=1}^{n}(i,n)$，给出用 p_i 和 α_i 表示 $F(n)$ 的式子.

解 设 d 是 n 的因数. 为了求出 $(i,n)=d$ 的解的个数，我们看出如果 $i=hd$，那么对每个 h，$\left(h,\frac{n}{d}\right)=1$ 恰存在一个解. 对每个 d，共有 $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$ 个 h. 因此

$$F(n)=\sum_{d\mid n}d\varphi\left(\frac{n}{d}\right)=n\sum_{d\mid n}\frac{\varphi(d)}{d}$$

由于 $\frac{\varphi(d)}{d}$ 是积性函数，因此 $F(n)=\prod F(p_i^{\alpha_i})$，但是

$$F(p^k)=p^k\sum_{j=1}^{k}\frac{\varphi(p^j)}{p^j}=p^k\left[1+\frac{(p-1)k}{p}\right]$$

因此
$$F(n)=\prod_{i=1}^{r}\left[(\alpha_i+1)p_i^{\alpha_i}-\alpha_ip_i^{\alpha_i-1}\right]$$

注 Verkataraman 注意到 S. S. Pillai 在 J. Annamalai Univ (India), 2, 2433 - 2438 上 *On an arithmetic* 一文中所给出的下述形式的结果

$$F(n)=n\prod_{i=1}^{r}\left(\alpha_i+1-\frac{\alpha_i}{p_i}\right)$$

(AMM E1922)

168. 求出一个最小的素数，使它同时具有 x^2+y^2，x^2+2y^2，$\cdots$，x^2+10y^2 的形式.

解 如果 $x^2+ry^2=p$，那么 $x^2\equiv -ry^2 \pmod p$，因此 $-ry^2$ 因而 $-r$ 是模 p 的二次剩余. 那样，所求的素数必须对 $1\leqslant r\leqslant 10$ 满足 $\left(-\frac{r}{p}\right)=1$，由此得出 $-1,2,3,5$ 和 7 是模 p 的二次剩余. 这就导致同余式 $p\equiv 1\pmod 8$，$p\equiv 1\pmod 3$，$p\equiv 1$ 或 $-1\pmod 5$ 以及 $p\equiv 1,2$ 或 $4\pmod 7$. 这些同余式又可合并成 $p\equiv 1,121,169,289,361$ 或 $529\pmod{840}$. 满足这一要求的最小素数是 1 009，而我们有

$$\begin{aligned}1\,009&=15^2+28^2=19^2+2\cdot 18^2=31^2+3\cdot 4^2=\\&15^2+4\cdot 14^2=17^2+5\cdot 12^2=\\&25^2+6\cdot 8^2=1^2+7\cdot 12^2=19^2+8\cdot 9^2=\\&28^2+9\cdot 5^2=3^2+10\cdot 10^2\end{aligned}$$

169. 证明：(1) $\sqrt[n]{n!} \leqslant \prod\limits_{p \leqslant n} p^{\frac{1}{p-1}}$，其中 p 表示小于或等于 n 的素数.

(2) $\sum\limits_{p} \dfrac{\ln p}{p}$ 发散到无穷大.

(Eckford Cohen, Legendre Identity, AMM V01.76(1969), No.6, 614)

证明　(1) 由初等数论可知 $n! = \prod\limits_{p \mid n!} p^{\alpha(p)}$，其中 $\alpha(p) = \sum\limits_{e=1}^{\infty}\left[\dfrac{n}{p^e}\right]$. 我们有

$$\alpha(p) = \sum_{e=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^e}\right] \leqslant \sum_{e=1}^{\infty}\frac{n}{p^e} = n\sum_{e=1}^{\infty}\frac{1}{p^e} = \frac{n}{p-1}$$

这就得出(1).

(2) 在(1)中式子的两边取对数就得出

$$\frac{\ln n!}{n} \leqslant \sum_{p \leqslant n}\frac{\ln p}{p-1} \leqslant 2\sum_{p \leqslant n}\frac{\ln p}{p}$$

由此即可得出(2).

(AMM E2164)

170. 设 $x_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$，其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 表示前 n 个素数. 证明：在 x_n 和 x_{n+1} 之间总有一个平方数.

证明　首先易于验证，对 $n = 1,2,3,4$，命题成立，因此以下可设 $n > 4$.

其次，易于验证，$n = 1,2,3,4$ 成立 $p_{n+1} > 2n + 1$，又注意当 $n > 2$ 时，$p_{n+1} \geqslant p_n + 2$. 因此由此式和数学归纳法可证对任意正整数 n，都成立 $x_n > n^2$. 因此必然存在一个 k 使得

$$(n+k)^2 \leqslant x_n < (n+k+1)^2$$

以下分两种情况进行讨论：

(1) $k = 0$. 这时由 k 的定义即可知成立 $n^2 < x_n < (n+1)^2 < x_{n+1}$，因此在 x_n 和 x_{n+1} 之间已存在一个平方数，所以命题已成立.

(2) $k \neq 0$. 这时必有 $p_{n+1} > 2(n+k) + 1$，否则对 $j = 0,1,2,\cdots,n-1$ 将有

$$p_{n-j} \leqslant 2(n+k) - (2j+1)$$

因而

$$x_n \leqslant n^2 + 2nk < (n+k)^2$$

与 k 的定义矛盾. 这样，从 $(n+k)^2 \leqslant x_n < (n+k+1)^2$ 和 $p_{n+1} > 2(n+k) + 1$ 就得出

$$x_n < (n + k + 1)^2 < x_{n+1}$$

因此在 x_n 和 x_{n+1} 之间也存在一个平方数，命题仍然成立.

这样综合以上两种情况的讨论，我们就证明了所要的命题.

注 设 q_n 是任意的当 $n \geqslant 2$ 时为正奇数的叙列，满足

$$q_{n+1} \geqslant 2n + 1$$

$y_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$，则仿照上述证明可证此命题对此更一般的叙列 y_n，问题的断言成立.

(AMM E2137)

171. 证明：每一个整数 q 都可以唯一地表示成以下形式

$$q = \sum_{j=0}^{n} d_j 2^j, d_j \in \{-1,0,1\}$$

并且没有两个连续的 d_j 都是非零的. 进一步证明：如果 f 是任意从非负整数到非负实数的不增函数，并且如果 $q = \sum_{j=0}^{n} c_j 2^j$，那么

$$\sum_{j=0}^{n} |d_j| f(j) \leqslant \sum_{j=0}^{n} |c_j| f(j)$$

证明 我们有唯一的表示法

$$q = 2^{j_1} + 2^{j_2} + \cdots + 2^{j_r}, 0 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_r$$

设 $N = \{0,1,2,\cdots\}$，并且对任何 $X \subset N$，设 $X' = N \setminus X$，现在，只要可能进行下去，我们就用下列等式之一来变换上面的式子

$$2^p + 2^{p+1} = -2^p + 2^{p+2}$$

$$2^p - 2^{p+1} = -2^p, 2^p + 2^p = 2^{p+1}$$

直到不可能再变换下去为止. 这时，上式将被变换为以下形式

$$q = \sum_{a \in A} 2^a - \sum_{b \in B} 2^b$$

其中 A 和 B 都是 N 的互不相交的子集，使得 $A \cup B$ 中不包含两个相邻的整数. 假如 q 还有一个具有同样性质的表示

$$q = \sum_{c \in C} 2^c - \sum_{d \in D} 2^d$$

那么
$$\sum_{a \in A} 2^a + \sum_{d \in D} 2^d = \sum_{b \in B} 2^b + \sum_{c \in C} 2^c$$

如果 $x \in A \cap D$，我们就在上式的左边用 2^{x+1} 代替 $2^x + 2^x$. 由于 $x + 1 \in A' \cap D'$，因此这些替代将不会连续再进行下去，并且是互相无关的. 同理如果 $y \in B \cap C$，我们就在上式的右边用 2^{y+1} 代替 $2^y + 2^y$. 等所有那种替换都完成后，上面的式子将成为

$$\sum_{x \in X} 2^x = \sum_{y \in Y} 2^y$$

由于形如 $q=2^{j_1}+2^{j_2}+\cdots+2^{j_r},0\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r$ 的表示是唯一的，因此 $X=Y$.

现在设 $a\in A$，分以下两种情况讨论：

(1) $a\in D'$，那么 2^a 将出现在 $\sum_{x\in X}2^x=\sum_{y\in Y}2^y$ 的左边，因而也必须出现在右边．由于 $a-1\overline{\in}B$，$\sum_{x\in X}2^x=\sum_{y\in Y}2^y$ 中的 2^a 不可能是 $2^{a-1}+2^{a-1}$ 替换的结果．因此 2^a 必然已经在 $\sum_{a\in A}2^a+\sum_{d\in D}2^d=\sum_{b\in B}2^b+\sum_{c\in C}2^c$ 的右边出现．而由于 $A\cap B=\varnothing$，因此 2^a 必然出现在后一和号中，故我们有 $a\in C$.

(2) $a\in D$．那么 2^{a+1} 将出现在 $\sum_{x\in X}2^x=\sum_{y\in Y}2^y$ 的左边，因而也必须出现在右边．由于 $a\in A\cap D$，我们有 $a+1\in B'\cap C'$．这说明出现在 $\sum_{x\in X}2^x=\sum_{y\in Y}2^y$ 右边的 2^{a+1} 必然是 $\sum_{b\in B}2^b$ 中的 2^a 和 $\sum_{c\in C}2^c$ 中的 2^a 相加的结果，因此 $a\in C$.

综合以上两种情况的讨论就得出 $A\subset C$．用完全同样的方法，我们可以证明 $C\subset A,B\subset D,D\subset B$，因而就有 $A=C,B=D$，这就证明了表示法 $q=\sum_{a\in A}2^a-\sum_{b\in B}2^b$ 是唯一的．

现在让我们考虑 q 的一个任意的表示

$$q=\sum_{s\in S}c_s2^s-\sum_{t\in T}c_t2^t$$

其中 S 和 T 是 $\mathbf{N}$ 的互不相交的子集．并且对所有的 $u\in S\cup T$，c_u 是一个正整数．我们同时还考虑一个数 $\sum_{u\in S\cup T}c_uf(u)$，其中 f 是上述的不增函数．在上面的两个式子中，我们将把 $2^u+2^u+\cdots+2^u$ 和 $f(u)+f(u)+\cdots+f(u)$ 简化的表示成 c_u2^u 和 $c_uf(u)$．我们现在可以用下列几种替换来变换 $q=\sum_{s\in S}c_s2^s-\sum_{t\in T}c_t2^t$：

(1) 用 2^{x+1} 代替 2^x+2^x；

(2) 用0代替 2^x-2^x；

(3) 用 $2^{x+2}-2^x$ 代替 2^x+2^{x+1}；

(4) 用 -2^x 代替 2^x-2^{x+1}.

这就以唯一的方法将 q 表示为 $q=\sum_{j=0}^{n}d_j2^j,d_j\in\{-1,0,1\}$ 的形式，并且没有两个连续的 d_j 都是非零的．每一次变换都不会增加 $\sum_{u\in S\cup T}c_uf(u)$ 的值，由于对应于这些替换，有：

(1) $f(x)+f(x)\geqslant 0+f(x+1)$；

(2) $f(x)+f(x)\geqslant 0$；

(3) $f(x+1)\geqslant f(x+2)$；

(4) $f(x+1)\geqslant 0$.

这就证明所说的不等式.

172. p 是一个素数，$p\neq 2,3,5,11$ 或 17，那么就存在三个模 p 的非平方剩余，使得 p 可整除它们之和.

证明　由于 $7\mid 3+5+6$，$13\mid 2+5+6$，因此我们可设 $p\geqslant 19$. 设 g 是一个固定的模 p 的余数，a,b,c 是模 p 的三个不同的余数，那么当且仅当 $ga+gb+gc\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 时，$a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$，其中 ga,gb,gc 是模 p 的三个不同的余数. 以下分三种情况进行讨论.

(1) $\left(\frac{-1}{p}\right)=-1$，这时又分两种情况：

i $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$，那么 $\left(\frac{4}{p}\right)=1$，$\left(\frac{8}{p}\right)=-1$. 如果 $\left(\frac{5}{p}\right)$，$\left(\frac{6}{p}\right)$，$\left(\frac{7}{p}\right)$ 之中有一个等于 -1，则我们可从取 4,5,6 之中取一个数 n 使得 $\left(\frac{n}{p}\right)=1$，$\left(\frac{n+1}{p}\right)=-1$，如果 $\left(\frac{5}{p}\right)$，$\left(\frac{6}{p}\right)$，$\left(\frac{7}{p}\right)$ 都等于 1，则我们可取 $n=7$ 而使得 $\left(\frac{n}{p}\right)=1$，$\left(\frac{n+1}{p}\right)=-1$，总之我们可在 4,5,6,7 之中取一个数使得 $\left(\frac{n}{p}\right)=1$，$\left(\frac{n+1}{p}\right)=-1$. 由于 $p\geqslant 19$，故 $n+1\leqslant 8<\frac{p-1}{2}$，因而 $-1,-n,n+1$ 是 p 的三个不同的非平方剩余而使得 $-1-n+n+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

ii $\left(\frac{2}{p}\right)=1$，设 n 是最小的使得 $\left(\frac{n+1}{p}\right)=-1$ 的数，由于 $\frac{p-1}{2}$ 是不等于 0 的余数，因此 $n\leqslant\frac{1}{2}(p-1)$. 又由于剩余在乘法下是封闭的，故 $n<\frac{p-1}{2}$，因而 $-1,-n,n+1$ 是不同的余数.

(2) $\left(\frac{-1}{p}\right)=1$. 在这种情况下，对任意模 p 的剩余 a，成立 $\left(\frac{-a}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$，也就是说剩余 a 和 $-a$ 或同时为模 p 的平方剩余，或同时为模 p 的平方非剩余.

如果 $\left(\frac{5}{p}\right)=1$，那么 $1+4+(-5)=0$，并且 $1,4,-5$ 是不同的平方剩余数. 将此式两边同乘以任意一个使得 $\left(\frac{h}{p}\right)=-1$ 的模 p 的剩余 h，即可得到三个不同的平方非剩余数 a,b,c，且 $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. 如果 $\left(\frac{10}{p}\right)=1$，那么 $1+9+(-10)=0$，以后可类

似处理. 如果$\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{10}{p}\right)=-1$,那么$\left(\frac{2}{p}\right)=1$;因此$\left(\frac{8}{p}\right)=1$,并且 $1+8+(-9)=0$. 以后可类似处理.

(AMM E2275)

> 173. 设 p_n 表示第 n 个素数($p_1=2$). 证明:对 $n=1,2,\cdots$ 成立
> $$p_k\leqslant\frac{k^2+3k+4}{4}$$

证明 已知(见 W. Sierpinski, Elementary Theory of Numbers, Warsaw, 1964, 150) $p_n\leqslant 36n\ln n$. 设 $f(n)=\frac{n^2+3n+4}{4}$,那么容易验证当 $n\geqslant 991$ 时,$36n\ln n<f(n)$. 因此只要验证前 991 个素数即可,这并不像初看上去那样麻烦. 实际上

$$p_{176}<\cdots<p_{990}=7\ 829<7\ 877=f(176)<\cdots<f(990)$$

因此对 $176\leqslant n\leqslant 990$,所说的不等式成立,类似的,我们有

$$p_{175}=1\ 039<1\ 040\cdot 5=f(63)$$

$$p_{62}=293<298=f(33)$$

等.

注 等号仅对 $p_1=2$ 和 $p_5=11$ 成立.

(AMM E2355)

> 174. 任给奇的正整数 $n>3$,设 k 和 h 是最小的使得 $kn+1$ 和 hn 都是平方数的正整数. 证明:当且仅当 k 和 h 都大于$\frac{n}{4}$时,n 是一个素数.

证明 以下所有的变量都代表正整数. 设 n 是素数. 那么 $n\mid h$,因此 $h\geqslant n>\frac{n}{4}$,此外也有对某个 a,$kn=(a+1)(a-1)$,因此对某个 b,$a\pm 1=bn$,那样

$$kn\geqslant bn(bn-2)\geqslant n(n-2)$$

因而

$$k\geqslant n-2>\frac{n}{4}$$

反过来,设 n 是合数. 如果 n 是一个素数的幂 $n=p^r$,那么根据 r 是偶数还是奇数,$h=1$ 或者 $h=p$. 在两种情况下都有 $h<\frac{n}{4}$. 现在设 n 不是一个素数的幂,因此存在大于 1 的互素的奇素数 p,q 使得 $n=pq$. 由中国剩余定理可知存在 x 使得 $1<x<n-1$,$p\mid(x-1)$,$q\mid(x-1)$. 设 $a=\min(x,n-x)$,那么对某个 k_1,

$a^2-1=k_1n$.那样 $k_1n<a^2<\left(\frac{n}{2}\right)^2$,因此 $k\leqslant k_1<\frac{n}{4}$.

175.设 c 是一个正奇数.证明:当且仅当存在一个正整数 $a\leqslant\frac{c-3}{3}$ 使得 $(2a-1)^2+8c$ 是一个平方数时,c 是合数.

证明 如果

$$c=(2k-1)Q,k\geqslant 2,Q\geqslant 2k-1$$

设

$$a=Q-k+1\leqslant\frac{c}{2k-1}-1\leqslant\frac{c-3}{3}$$

那么

$$(2a-1)^2+8c=(2Q+2k-1)^2$$

另一方面,如果

$$(2a-1)^2+8c=(2t+1)^2 \qquad (*)$$

那么

$$c=\frac{(t+a)(t-a+1)}{2}$$

因此 c 是一个合数.实际上从 $c\geqslant 3a+3>a+1$ 和 $(*)$ 我们得出 $t-a+1>2$,Q 可以是偶的.

(AMM E2415)

176.求出所有的正整数 n,n 具有性质,它的每个正的因数都具有 a^r+1 的形式,其中 a,r 都是整数,且 $r>1$.

解 设 S 是题目中所要求的那种整数的集合.

设 $n=a^r+1\in S$,我们设 a 是这种表示中的最小者,因此不可能被表示成 b^s,$s>1$ 的形式.如果 r 是奇数,那么 $a+1$ 是 n 的正因数,因此对某个 b,s,$s>1$,有 $a+1=b^s+1$,这与 a 的最小性相矛盾.那样 r 必定是偶数,因此 S 中的每个元素具有形式 a^2+1.

奇数 $m\in S$ 必须具有形式 $4a^2+1$.设 p,q 是 S 中的奇素数,其中 $p\leqslant q$,$p=4a^2+1$,$q=4b^2+1$,那么显然可设 $pq=4c^2+1$,并且 $a\leqslant b<c$.那样 $q(p-1)=4(c^2-b^2)$,因此 $q\mid(c+b)$ 或 $q\mid(c-b)$,无论哪种情况都有 $p\leqslant q<2c$,因此 $pq<4c^2$,与 $pq=4c^2+1$ 矛盾.因此 S 中的每个合数都是偶数.

设 $p=a^2+1$ 是 S 中的素元素,并且设 $2p=b^2+1\in S$,那么

$$p=b^2-a^2=(b+a)(b-a)$$

因此

$$b-a=1,b+a=p$$

因而 $p-1=2a$.但是 $p=a^2+1$,因此 $a=2$ 而 $p=5$.

那样 S 中仅有的可表为两个素数的乘积的合数就是 10,因此

S 中不可能有三个以上的素数的乘积，因而 S 中不存在其他的合数. 这样，S 中的元素只有 1,10 两个数和所有具有形式 n^2+1 的素数.

（AMM E3081）

177. 证明：一个有 n 个不同素因数的完全数至少要有一个不超过 n 的素因数.

证明 设

$$m=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_n^{a_n},p_1<p_2<\cdots<p_n$$

是一个完全数，那么 $\sigma(m)=2m$，其中

$$\sigma(m)=(1+p_1+\cdots+p_1^{a_1})\cdots(1+p_n+\cdots+p_n^{a_n})$$

假设 m 不存在不超过 n 的素因数，那么 $p_1\geqslant n+1$，因此 $p_i\geqslant n+i$，那样就有

$$\frac{\sigma(m)}{m}=\left(1+\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_1^{a_1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_n}+\cdots+\frac{1}{p_n^{a_n}}\right)<$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p_1^i}\right)\cdots\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^i}\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{p_j-1}\right)<$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+j-1}\right)=\frac{2n}{n}=2$$

这与 $\sigma(m)=2m$ 矛盾，这就说明 $p_1\leqslant n$.

178. 设 $\pi(n)$ 表示不超过正整数 n 的素数的数目，证明：$\pi(n)\geqslant\frac{\ln n}{\ln 2}+C(n\geqslant1)$，其中 C 是一个不依赖于 n 的常数.（Robert E. Dressler, A lower bound for π(n), AMM V01. 82(1975), N02: 151）

证明 设 $s(n)$ 表示不超过正整数 n 的非平方数的数目. 又设 p 是一个素数，那么 p^2 的不超过正整数 n 的倍数至多有 $\frac{n}{p^2}$ 个. 但是

$$\frac{1}{p^2}<\sum_p\frac{1}{p^2}<\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=1$$

于是 $s(n)>n-\frac{n}{p^2}=n\left(1-\frac{1}{p^2}\right)>\left(1-\sum_p\frac{1}{p^2}\right)n=C_1n$

其中 $C_1=1-\sum_p\frac{1}{p^2}$ 是一个与 n 无关的常数.

另一方面，显然有 $s(n)\leqslant2^{\pi(n)}$，由此即得出 $Cn\leqslant2^{\pi(n)}$，因而

$$\pi(n)\geqslant\log_2C_1n=\frac{\ln n+\ln C_1}{\ln 2}=\frac{\ln n}{\ln 2}+C$$

注 如果允许应用著名的等式 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,那么用上面的方法可以进一步给出一个 C 的具体数值.

(AMM E2425)

179. 对正实数 x,设 $\pi_2(x)$ 表示不超过 x 的孪生素数的数目,即使得 $p\leqslant x$ 的孪生素数 $(p,p+2)$ 的数目,证明:

$$\pi_2(x)=2+\sum_{7\leqslant n\leqslant x}\sin\frac{\pi}{2}(n+2)\left[\frac{n!}{n+2}\right]\cdot$$
$$\sin\frac{\pi}{2}n\left[\frac{(n-2)!}{n}\right]$$

证明 如果 $n>5$ 是合数,那么 $\frac{(n-1)!}{n}$ 是偶数,因此

$$\sin\frac{\pi}{2}n\left[\frac{(n-2)!}{n}\right]=0$$

如果 p 是素数,那么由 Wilson 定理知

$$(p-2)!\equiv-(p-1)!\equiv 1(\bmod p)$$

这蕴含 $$\left[\frac{(p-2)!}{p}\right]=\frac{(p-2)!-1}{p}$$

如果 $p>5$,那么 $4\mid(p-2)!$,并且因此

$$\sin\frac{\pi}{2}p\left[\frac{(p-2)!}{p}\right]=\sin\frac{\pi}{2}((p-2)!-1)=-1$$

这就说明,当 $n>5$ 时,如果 n 或 $n+2$ 其中之一是合数,那么在和式中的项就是0,而如果 n 和 $n+2$ 都是素数,那么和式中的项就是 $(-1)(-1)=1$. 为了包括孪生素数(3,5)和(5,7),因此还必须再在上述式子中加2.

(AMM E2488)

180. 设 p 是一个奇素数,$p\equiv 1(\bmod 4)$ 并且 $p-1<3\varphi(p-1)$,其中 $\varphi(n)$ 表示欧拉函数. 证明:存在一个正整数 $k\leqslant p-1$,使得 k 是模 p 的原根并且 $(k,p-1)=1$.

证明 事实上,当 $p\equiv 1(\bmod 4)$,$p-1<3\varphi(p-1)$ 时,至少存在 $\frac{3\varphi(p-1)-(p-1)}{2}$ 个那种 k.

设 $S=\{1,\cdots,p-1\}$,A 是模 p 的原根组成的 S 的子集,B 是 S 中与 $p-1$ 互素的数组成的子集. $f(n)=p-n$. 注意 $f(S)$ 是 S 的一个排列. 我们证明当 $p\equiv 1(\bmod 4)$ 时,如果 a 是 p 的原根,那么 $p-a$ 也是;设 $(p-a)^r\equiv 1(\bmod p)$,那么

$$a^{2r}\equiv(p-a)^{2r}\equiv 1(\bmod p)$$

因此 $(p-1)\mid 2r$,再加上 $4\mid(p-1)$,因此 r 是偶数. 由此得出 $a^r\equiv(p-a)^r\equiv 1(\bmod p)$,因而 $(p-1)\mid r$. 这就证明了 $p-a$ 也是 p 的原根. 那样我们有 $f(A)=A$. 由于 $p-1$ 是偶数,因此 B 中

的元素都是奇数,而 $f(B)$ 中的元素都是偶数,这就说明 B 和 $f(B)$ 是不相交的.

设 $|X|$ 表示集合 X 的元素的个数,那么

$$|S| = p-1, |A| = |B| = |f(B)| = \varphi(p-1)$$

由容斥原理,A,B 和 $f(B)$ 的并中的元素个数是

$$|A|+|B|+|f(B)|-|A\cap B|-|A\cap f(B)|$$

由于另外两项 $-|B\cap f(B)|$ 和 $+|A\cap B\cap f(B)|$ 都是零.但是

$$|A\cap f(B)| = |f(A)\cap f(B)| = |f(A\cap B)| = |A\cap B|$$

因此　$|A\cup B\cup f(B)| = 3\varphi(p-1)-2|A\cap B|$

由于　$|S| \geqslant |A\cup B\cup f(B)|$

所以我们有

$$|A\cap B| \geqslant \frac{3\varphi(p-1)-(p-1)}{2}$$

这就证明了至少存在 $\frac{3\varphi(p-1)-(p-1)}{2}$ 个那种 k.

注　这里所使用的公式是下述结果的一个特例:设 A,B 是有限集 S 的子集,那么当且仅当 $|A| \geqslant 2|A\cap B| \geqslant |A|+2|B|-|S|$ 时,存在一个 S 的排列,使得 A 在此排列下不动而 B 的排列和 B 不相交.

(AMM E2511)

181. 已知

$$\frac{1}{3} = 0.333\,333\cdots = 3[(0.1)+(0.1)^2+(0.1)^3+\cdots]$$

$$\frac{1}{7} = 0.142\,857\cdots = 7[(0.02)+(0.02)^2+(0.02)^3+\cdots]$$

问是否还有其它正整数 x 使得对适当的整数 m,n 成立

$$\frac{1}{x} = x\left[\sum_{i=1}^{\infty}(m\cdot 10^{-n})^i\right]$$

解　我们有 $1 \leqslant m < 10^n$,并且可设 10 不能整除 m.那样,问题就成为解不定方程

$$x^2+1 = 2^r5^s$$

其中 $r,s \geqslant 0$,$x \geqslant 1$.如果这个方程有解,那么 m,n 就可由关系式

$$n = \max(r,s), 2^r5^sm = 10^n$$

确定.

r 不可能大于或等于 2,否则由 $x^2+1 = 2^r5^s$ 将得出 $x^2 \equiv -1 \pmod 4$,这显然是一个矛盾.因此 r 只能等于 0 或 1.

首先设 $r = 0$,那么 s 必须是奇数,否则 $s = 2t$,由 $x^2+1 = 2^r5^s$ 得出

$$1 = y^2-x^2 = (y-x)(y+x)$$

其中 $y=5^t$. 由于 $x+y\geqslant 2$, 故上式不可能成立. 那样, 从 $s=1$ 得出 $x=2$. 如果 $s\geqslant 3$ 是奇数, 那么 $x^2+1=5^s$ 无解.(证明可见 L. J. Mordell, Diophantine Equation, Academic Press, 1969, 301).

现在设 $r=1$, 那么 C. Engelman, On close packed double error correcting code on p symbols, I.R.E. Trans. On Information Theory, Correspondence (Jan. 1961), 52 - 52 已经证明 $x^2+1=2\cdot 5^s$ 仅有的解是 $(x,s)=(1,0),(3,1),(7,2)$.

因此 (x,n,m) 只可能是 $(2,1,2),(1,1,5),(3,1,1)$ 或 $(7,2,2)$.

182. 如果 n 是一个正整数, 设 $\sigma(n)$ 表示 n 的正的因数之和, $S(n)$ 是 n 的素因数组成的集合, $\omega(n)$ 表示 $S(n)$ 的元素个数. 显然如果 n 是一个偶完全数, 那么 $S(n)=S(\sigma(n))$ 并且 $\omega(n)=2$. 证明其逆命题也成立. (AMM 6036)

证明 如果 $\omega(n)=2$, 那么 n 只有两个不同的素因数, 比如说 p 和 q. 设 $n=p^rq^s$, 其中 $r\geqslant 1$, $s\geqslant 1$. 如果 $S(n)=S(\sigma(n))$, 那么 $\sigma(n)$ 必等于 $p^jq^kn=p^{j+r}q^{k+s}$, 其中 $j\geqslant 0$, $k\geqslant 0$ 并且由于 $\sigma(n)\neq n$, j,k 之中至少要有一个大于零.

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\frac{\sigma(p^r)\sigma(q^s)}{p^rq^s}=\frac{\frac{(p^{r+1}-1)(q^{s+1}-1)}{(p-1)(q-1)}}{p^rq^s}=$$

$$\frac{(p^{r+1}-1)(q^{s+1}-1)}{p^rq^s}\cdot\frac{1}{(p-1)(q-1)}=$$

$$\frac{pq}{(p-1)(q-1)}-\frac{p^{r+1}+q^{s+1}-1}{n(p-1)(q-1)}=p^jq^k$$

由于 $p^{r+1}+q^{s+1}-1>0$, 因此我们有

$$\frac{pq}{(p-1)(q-1)}>p^jq^k$$

以及

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)}>p^{j-1}q^{k-1}$$

由于上面的不等式对 j,k 是对称的, 因此从上面的不等式得出 $j=0$ 或 $k=0$. 设 $k=0$, 那么

$$\frac{1}{(p-1)(q-1)}>\frac{p^{j-1}}{q},\ \frac{1}{p^{j-1}(p-1)}>\frac{q-1}{q}$$

由于 $q\geqslant 2$, $\frac{1}{p^{j-1}(p-1)}>\frac{1}{2}$, 因而 $p^{j-1}(p-1)<2$, 因此由实验法即可确定仅有的可能的解是 $j=1$ 和 $p=2$. 这就是说必有 $n=2^rq^s$ 以及 $\sigma(n)=2^{r+1}q^s=2n$, 因而 n 是一个偶完全数.

(AMM 6064)

183. 设 m 是非负整数，$s(m)$ 表示 m 的使得 $1 \leqslant d < m$ 的因数 d 的和. 证明：对每个整数 $t \geqslant 1$ 都存在一个整数 m 使得

$$m < s(m) < s^2(m) < \cdots < s^t(m)$$

其中 $s^2(m) = s(s(m))$.

证明 更一般的，我们证明对每个 $t \geqslant 1$，存在一个正整数 n_t 使得对所有的 $m \geqslant 1$，成立 $m < s(m) < \cdots < s^t(m)$ 并且 $n_t \| m$，其中 $n \| m$ 表示 $\frac{m}{n}$ 是一个与 n 互素的整数.

对 t 采用归纳法证明. 对 $t = 1$，我们可取 $n_1 = 12$.

现在假设 n_t 具有所说的性质. 设 p 是一个不能整除 n_t 的素数并且选择 $k \geqslant 1$ 使得

$$p^k \equiv 1(\bmod n_t^2 \cdot (p-1))$$

(只要取 $t = \varphi(n_t^2 \cdot (p-1))$ 即可，其中 φ 是欧拉函数) 那么我们断言 $n_{t+1} = n_t \cdot p^{k-1}$ 即具有所说的性质. 为证明这一点，设 m 是一个使得 $n_{t+1} \| m$ 的正整数. 设 $\sigma(m) = s(m) + m$，函数 σ 是积性的，因此 $p^{k-1} \| m$ 蕴含 $\sigma(m)$ 可被 $\sigma(p^{k-1}) = \frac{p^k - 1}{p - 1}$ 整除，这又得出它可被 n_t^2 整除，因此

$$s(m) = \sigma(m) - m \equiv -m(\bmod n_t^2)$$

因而 $n_t \| m$ 蕴含 $n_t \| s(m)$. 这就得出

$$s(m) < s(s(m)) < \cdots < s^t(s(m))$$

$n_t \| m$ 还蕴含 $m < s(m)$，这样我们就得出

$$s(m) < s(s(m)) < \cdots < s^{t+1}(m)$$

因而由数学归纳法就完成了证明.

(AMM E2604)

184. 设 $\mathbf{N} = \{0,1,2,\cdots\}$，$A: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 由 $A(n) = \left[\frac{2n}{3}\right]$ 定义. 对 $n \in \mathbf{N}$，设 $k \in \mathbf{N}$ 是使得 $A^k(n) = 0$ 的最小整数并且定义 $f(n) = k$，求出一个表示 $f(n)$ 的尽可能简单的公式.

解 由于 A 是单调的，所以 f 也是单调的. 由于 f 把 $\mathbf{N}$ 映到 $\mathbf{N}$，因此存在严格递增的叙列 $s_0, s_1, s_2, \cdots (s_{-1} = -1)$ 使得对 $n \in \mathbf{N}$ 成立

$$f^{-1}(n) = \{m \in \mathbf{N} \mid s_{n-1} < m \leqslant s_n\}$$

由上式可知 s_{n+1} 是使得 $A(m) = s_n$ 成立的最大整数 m，因此

$$s_{n+1} = \left[\frac{3}{2}s_n\right] + 1, n \geqslant 0$$

我们断言对无限多个 n，s_n 是奇数. 否则就存在一个 m 使得对 $n \geqslant m$，s_n 是偶数. 由此得出

$$s_{m+k} = \left(\frac{3}{2}\right)^k s_m + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \left(\frac{3}{2}\right)^k (s_m + 2) - 2$$

然而这表明当 k 充分大时，s_{m+k} 已不是一个整数，显然这是一个矛盾.

由

$$s_{n+1} = \left[\frac{3}{2}s_n\right] + 1 \quad, n \geqslant 0$$

得出

$$\frac{1}{2} \leqslant s_{n+1} - \frac{3}{2}s_n \leqslant 1$$

因此如果令 $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n s_n$，则

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

这就得出

$$\sum_{n\geqslant 0}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to\infty} u_n = c$$

存在，并且

$$\frac{1}{3}\sum_{k\geqslant n}\left(\frac{2}{3}\right)^k \leqslant c - u_n < \sum_{k\geqslant n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

上式右边的不等号是严格的是由于有无限多个 n 的值是奇数. 我们可把上式重写成

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant c - u_n < 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$1 \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n c - s_n < 2$$

因此

$$s_n = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^n c\right] - 1$$

从 $s_{f(n)-1} < n \leqslant s_{f(n)}$，我们相继得出

$$\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{f(n)-1} c\right] < n + 1 \leqslant \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{f(n)} c\right]$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{f(n)-1} c < n + 1 \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{f(n)} c$$

$$f(n) - 1 < \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{n+1}{c}\right) \leqslant f(n)$$

$$f(n) = -\left[-\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{n+1}{c}\right)\right]$$

(AMM 6153)

185. 设 $\pi(x)$ 表示小于等于 x 的素数的个数，是否存在无穷多个像 2,4,6,8,30,33,100 这样使得 $\pi(n) \mid n$ 的正整数 n?

解 答案是存在.

设 $f(x)=\dfrac{x}{\pi(x)}, x\geqslant 2$，那么 $f(x)$ 在并且仅在 x 是奇素数时是间断的，$f(x)$ 在每个由相继的素数 p,q 确定的区间 $[p,q)$ 上是严格递增的并且在奇素数处有"非负的"跳跃. $f(x)$ 是无界的(由素数定理即可知，也可直接证明). 由这些性质和 $f(4)=2$ 得出对每个整数 $k\geqslant 2$，存在一个 x_k 使得 $f(x_k)=k$，显然 $x_k=k\pi(k)$ 是一个整数，并且所有的 x_k 是不同的，这就给出了无穷多个使得 $\pi(n)\mid n$ 的正整数 n.

(AMM E2890)

186. 设 $p\geqslant 3$ 和 $q=2p-1$ 都是素数，即约分数 $B_{2m}=\dfrac{N_{2m}}{D_{2m}}$ 表示第 $2m$ 个伯努力数，其中 N_{2m} 是分子，D_{2m} 是分母. 证明：$|N_{2p-2}|>|N_{2p}|$.

证明 素数 p 和 $q=2p-1$ 具有形式 $p=6n+1, q=12n+1, n>0$. 对 $n=1$

$$\left|\frac{N_{12}}{N_{14}}\right|=\frac{691}{7}>10\pi^2$$

对 $n>1$，我们证明 $|N_{2p-2}|>8\ 981|N_{2p}|$，并且猜测 $\left|\dfrac{N_{2p-2}}{N_{2p}}\right|$ 是无界的. 由 von Staudt - Clausen 定理，分母 D_{2m} 是不同的使得 $(r-1)\mid 2m$ 的素数 r 的乘积. 由于2和3分别整除 $p+1$ 和 $2p+1$，因此 $D_{2p}=6$，还有

$$D_{2p-2}=D_{12n}=2\cdot 3\cdot 5\cdot R\cdot p\cdot q=5RpqD_{2p}$$

其中 $5R$ 是在4和 $6n$ 之间所有使得 $(r-1)\mid 12n$ 的素数的乘积. 另外从

$$\zeta(2m)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=\frac{|B_{2m}|(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}>\zeta(2m+2)$$

就得出 $\left|\dfrac{B_{2p-2}}{B_{2p}}\right|>\dfrac{2\pi^2}{pq}$，因此 $\left|\dfrac{N_{2p-2}}{N_{2p}}\right|>10\pi^2R$. 由于25不是素数，故 $n\neq 2$. 对 $n>2$，我们注意 $(7\cdot 13)\mid R$，因此

$$\left|\frac{N_{2p-2}}{N_{2p}}\right|>910\pi^2>8\ 981$$

对 $p>7$ 中使得 $2p-1$ 是素数的 p，前10个素数对 p,q 对应于 $n=1,3,5,6,13,16,23,26,33,35$，$\dfrac{R}{91}$ 对应于 $\dfrac{1}{91},1,11,19,53,17,47,53\cdot 19,19\cdot 23\cdot 37\cdot 67,11\cdot 29\cdot 31\cdot 43\cdot 61\cdot 71$，这些数据显示 R 和 $\left|\dfrac{N_{2p-2}}{N_{2p}}\right|$ 可能是无界的.

187. 设 $x > 1$ 是一个实数, $a_n = [x^n]$, ξ 是无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$(这里 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 表示在小数点后依次写下数字 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 例如对 $x = \pi$, $\xi = 0.393\ 197\cdots$), 问 ξ 是否能是一个有理数.

解 ξ 不可能是一个有理数. 对任意正整数 m, 存在一个充分小的正数 $\epsilon > 0$, 使得 10^{ϵ} 必位于区间 $[1, 1 + 10^{-m}]$ 之中. 对每个那种 m 和 ϵ, 以及任意 $\alpha > 0$, 又存在无穷多个正整数 n 使得 $[n\alpha] \geqslant m$, 而 $n\alpha$ 的小数部分 $\{n\alpha\}$ 则位于区间 $[0, \epsilon)$ 之中. 现在取 $\alpha = \log_{10}x$, 并设 $k = [n\alpha]$, 其中 n 满足上述的性质, 那么我们看出

$$y = x^n = 10^{n\alpha} = 10^{[n\alpha]}10^{\{n\alpha\}} < 10^k 10^{\epsilon}$$

$$10^k \leqslant y < 10^k + 10^{k-m}$$

因此 $a_n = [x^n]$ 是一个以 1 开头, 后面至少有 m 个 0 的整数. 这说明 ξ 的小数表示中含有任意长的全是 0 组成的块, 因此 ξ 的小数表示不可能是循环的, 因而不可能是有理数.

第5章　高等数学问题

(AMM 5530)

1. 设 I 是单位区间，$f:I\to I$ 是单调递减的使得 $f(f(x))=x$ 的连续函数，证明或者否定必有 $f(x)=1-x$.

证明　f 不一定是 $1-x$.

设 a 是 I 的内点，g 是任意的把 $[0,a]$ 映到 $[a,1]$ 的 1－1 的单调递减的连续函数，那么 g 有一个逆 g^{-1}，它也是 1－1 的单调递减的连续函数，并且把 $[a,1]$ 映到 $[0,a]$. 如果在 $[0,a]$ 上，$f(x)=g(x)$，而在 $[a,1]$ 上，$f(x)=g^{-1}(x)$，那么 f 是 $I\to I$ 的单调递减的连续函数，并且使得 $f(f(x))=x$.

(AMM E2011)

2. 在 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续的条件下解函数方程

$$f(x)=f\left(\frac{x}{1-x}\right),x\neq 1$$

解　当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n}\to 0$，因此由所给的函数方程和在 $x=0$ 处的连续性就得出

$$f(-1)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\cdots=f(0)$$

让 $x\notin\left\{0,-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\cdots\right\}$，那么反向迭代函数方程又得出

$$f(x)=f\left(\frac{x}{x+1}\right)=f\left(\frac{x}{2x+1}\right)=f\left(\frac{x}{3x+1}\right)=\cdots$$

由于当 $n\to\infty$ 时，$\frac{x}{nx+1}\to 0$，我们就得出 $f(x)=f(0)$，因此这个函数方程的唯一解是 $f(x)=k$，其中 k 是一个常数.

(AMM 5545)

3. 设 $f(x)$ 是对全体实数有定义的连续的实值函数，解函数方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+kxy$$

解　令 $g(x)=f(x)-\frac{kx^2}{2}$，则原方程化为 $g(x+y)=g(x)+g(y)$，$g(x)$ 连续，且对全体实数有定义. 因此由经典的函

数方程的解就得出 $g(x) = g(1)x$，因而

$$f(x) - \frac{kx^2}{2} = \left(f(1) - \frac{k}{2}\right)x$$

(AMM E2176)

4．求出所有满足函数方程 $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$ 的连续实值函数．

解　令 $y = 0$ 得

$$f(1)[f(x) - f(0)] = f(x) + f(0)$$

由于 $f(x)$ 不可能是常数，因此我们就得出 $f(0) = 0, f(1) = 1$．用 $x-2$ 代替 y 以及用 $x-1$ 代替 x 并令 $y = 1$，我们得出

$$f(x-1) = \frac{f(x)+f(x-2)}{f(x)-f(x-2)}$$

$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1}$$

由此得出
$$f(3) = \frac{f(2)+1}{f(2)-1}$$

以及
$$f\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{f(x)}{f(x-2)}$$

在上式中令 $x = 4$，我们得出 $f^2(2) = f(4)$．如果 $f(2) = 0$，那么在 $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$ 中令 $y = 2$ 将得出 $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = 1$，矛盾．因此 $f(2) \neq 0$．

由

$$f(x-1) = \frac{f(x)+f(x-2)}{f(x)-f(x-2)}$$

得出
$$f(x) = \frac{f(x-1)+1}{f(x-1)-1}f(x-2)$$

在此式中令 $x = 5$ 得出

$$f(5) = \frac{f(4)+1}{f(4)-1}f(3) = \frac{f^2(2)+1}{f^2(2)-1}\cdot\frac{f(2)+1}{f(2)-1} = \frac{f^2(2)+1}{[f(2)-1]^2}$$

但是另一方面

$$f(5) = f\left(\frac{3+2}{3-2}\right) = \frac{f(3)+f(2)}{f(3)-f(2)} =$$

$$\frac{\frac{f(2)+1}{f(2)-1}+f(2)}{\frac{f(2)+1}{f(2)-1}-f(2)} = \frac{f^2(2)+1}{1+2f(2)-f^2(2)}$$

因此　$[f(2)-1]^2 = 1+2f(2)-f^2(2)$，$f^2(2) = 2f(2)$

这样，由 $f(4) = f^2(2) = 2f(2)$ 及 $f(2) \neq 0$ 即得出 $f(2) = 2$．

现在假设 $f(x) = x$，$x = 0,1,2,\cdots n$，那么在 $f(x-1) =$

$\frac{f(x)+f(x-2)}{f(x)-f(x-2)}$ 中令 $x=n+1$ 就得出 $f(n+1)=n+1$. 这样, 由数学归纳法就得出对所有的非负整数成立 $f(x)=x$.

令 $y=cx$ 得

$$\frac{1+f(c)}{1-f(c)}=f\left(\frac{1+c}{1-c}\right)=f\left(\frac{x+cx}{x-cx}\right)=\frac{f(x)+f(cx)}{f(x)-f(cx)}$$

由此得出

$$f(cx)=f(c)f(x)$$

现在设 $x=\frac{p}{q}$ 是一个有理数, 并设 $c=q$ 就得出 $f(p)=f\left(\frac{p}{q}\right)f(q)$, 这就得出对所有的正有理数 x, 成立 $f(x)=x$. 由连续性, 就得出对所有的正实数成立 $f(x)=x$.

最后, 在 $f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)}$ 中令 $y=-x$ 就得出 $f(0)=f(x)+f(-x)$, 因而 $f(-x)=-f(x)=-x$, 因此 $f(x)\equiv x$.

(AMM E2329)

5. 设 $0<a<1$, $I=(0,a)$, 要求:

(1) 求出所有定义在 I 上, 满足函数方程 $f(xy)=xf(y)+yf(x)$ 的连续实值函数.

(2) 求出所有定义在 I 上, 满足函数方程 $f(xy)=xf(x)+yf(y)$ 的连续实值函数.

解 (1) 设 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, 那么 $g(xy)=g(x)+g(y)$, 由熟知的结果可知, $g(x)=C\ln x$, 因而对某个常数 C, $f(x)=Cx\ln x$.

(2) 取 $y=x,x^2,x^3$ 我们得出

$$f(x^2)=2xf(x)$$

$$f(x^3)=xf(x)+x^2f(x^2)=(x+2x^3)f(x)$$

$$f(x^4)=xf(x)+x^3f(x^3)=(x+x^4+2x^6)f(x)$$

另一方面 $x^4=x^2\cdot x^2$, 因此

$$f(x^4)=2x^2f(x^2)=4x^3f(x)$$

因此除了在方程 $2x^6+x^4+x=4x^3$ 的根处之外, $f(x)=0$. 注意 $2x^6+x^4+x=4x^3$ 的实根是有限的(至多 6 个), 如果在这些根之一处, 比如说在某一个根 ξ 处, $f(\xi)\neq 0$, 那么 $f(\xi^2)\neq 0$, 这将得出 $f(x)$ 在无限多个点处不等于 0(注意由于 $0<a<1$, 所以这无限多个点都在 $f(x)$ 的定义域内), 这与我们已经证明的 $f(x)$ 只在至多 6 个点处不为零矛盾, 所以 $f(x)$ 恒等于 0.

注 在证明第(2)部分结论时, 我们并未用到连续性.

(AMM E2537)

6. 求出所有在$(0,+\infty)$上定义的使得$f(x_1y)-f(x_2y)$不依赖于y的连续函数.

解 (1)x_1和x_2是变量,f是实值函数.由于$f(xy)-f(y)$是不依赖于y的,因此我们有

$$f(xy)-f(y)=f(x)-f(1)$$

函数$g(x)=f(e^x)-f(1)$满足柯西方程

$$g(x+y)=g(x)+g(y)$$

它有唯一的连续解$g(x)=ax$,因此$f(x)=\alpha\ln x+\beta$,其中α和β是任意常数.

(2) x_1和x_2是固定的不同的常数,f是实值函数.由于f的表达式是不依赖于y的,我们有$f(x_1y)-f(x_2y)=c$或者等价的

$$f(ax)=f(x)+c$$

其中$a=\frac{x_1}{x_2}\neq 1$,并且c是常数.那样函数$g(x)=f(e^x)-\frac{cx}{b}$满足$g(x+b)=g(x)$,其中$b=\ln a$.那样

$$f(x)=g(\ln x)+\frac{c}{b}\ln x$$

反过来,容易验证每个具有形式

$$f(x)=g(\ln x)+\alpha\ln x$$

的函数具有所说的性质,其中α是常数而g是连续的周期为$b=\ln\frac{x_1}{x_2}$的周期函数.

(AMM E2575)

7. 设$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的连续函数,解函数方程

$$f\left(\frac{x-y}{\ln x-\ln y}\right)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(y)$$

解 设$g(x,y)=\frac{x-y}{\ln x-\ln y}(x\neq y)$,$g(x,x)=x$.首先假设$f$是严格单调的,那么我们有

$$f(x)+f(y)+f(u)+f(v)=f(g(x,y))+f(g(u,v))=f(g(g(x,y),g(u,v)))$$

因此函数

$$G(x,y,u,v)=g(g(x,y),g(u,v))$$

关于x,y,u,v是对称的.然而计算表明

$$G(2,3,5,7)\approx 3.953\,457\,24,\ G(2,5,3,7)\approx 3.953\,454\,74$$

这与G关于x,y,u,v的对称性矛盾,因此f不可能是完全单调的.

那就是说 f 在某个 $a>0$ 处将取得局部极值.所给的函数方程蕴含在 a 的某个邻域中 $f(x)=f(a)$.设 A 是由所有具有性质 $b>0$ 并使得 f 在 $[a,b]$ 上是常数的实数组成的集合,那么 A 是连通的并且因此是一个区间.所给的函数方程蕴含 A 是开的,而 f 的连续性又蕴含 A 在 $(0,+\infty)$ 上是闭的,因此必有 $A=(0,+\infty)$,这就说明 f 是一个常数.

(AMM E2893)

8.确定所有满足函数方程 $f(2x-f(x))=x$ 的从 $[0,1]$ 到 $[0,1]$ 的同胚.

解法1 f 和 f^{-1} 的连续性是互相独立的.仅有的解是 $f(x)=x$.由假设 $f^{-1}(x)=2x-f(x)$,因此 $f(x)-x=x-f^{-1}(x)$.现在从 $[0,1]$ 中的任意点 x_0 开始,由关系式 $x_n=f(x_{n-1})$ 归纳地定义 x_n.在上面的方程中设 $x=x_{n-1}$,我们得出

$$x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}$$

这表示对所有的 n 成立

$$x_n-x_{n-1}=x_1-x_0$$

因此

$$x_n-x_0=n(x_1-x_0)$$

由于 $|x_n-x_0|\leqslant 1$,我们就得出对所有的 n 成立 $|x_1-x_0|<\dfrac{1}{n}$,因此 $|x_1-x_0|=0$,那样 $f(x_0)=x_1=x_0$.

解法2 实际上,我们甚至不需假设 f 是 $1-1$(或等价的,存在 f^{-1}).对 $[0,1]$ 中的 x,令 $d(x)=x-f(x)$.假设 $d(x_0)=a$,那么 $a+x_0=2x_0-f(x_0)$,因此由假设,这个数位于 $[0,1]$ 中,因此 $f(a+x_0)=x_0$,那样

$$d(a+x_0)=a=d(x_0)$$

因此全部的逆映象 $d^{-1}(\{a\})$ 是 $[0,1]$ 的子区间,而 $[0,1]$ 被映到自身再加上 a,因此 $a=0$,$x-f(x)\equiv 0$.

(AMM E3053)

9.设 m 表示一个固定的非零实数,求出所有 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的满足方程

$$f\left(2x-\frac{f(x)}{m}\right)=mx$$

的连续函数 f.

解 设 $g(x)=2x-\dfrac{f(x)}{m}$,那么函数 $g(x)$ 是连续的,并且满足

$$g(g(x))=2g(x)-x$$

如果 $g(x)=g(y)$，那么 $g(g(x))=g(g(y))$，因此从上式有 $x=y$，因此函数 $g(x)$ 是 1－1 的和单调的. 从关系

$$g(g(x))-g(x)=g(x)-x$$

我们容易得出 $g(x)$ 是递增的. 反复应用 $g(g(x))=2g(x)-x$ 式，我们有

$$g^{(n)}(x)=ng(x)-(n-1)x,n\geqslant 1$$

并且因此有

$$g^{(n)}(x)-g^{(n)}(0)=n(g(x)-x-g(0))+x,n\geqslant 1$$

由于 $g(x)$ 是递增的，让 $n\to+\infty$ 就得出

$$g(x)\leqslant x+g(0),\text{如果 } x<0$$

$$g(x)\geqslant x+g(0),\text{如果 } x>0$$

因此 $g(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}$，并且 $g^{(k)}(x)$ 对每个整数都有定义（即 $g^{(-2)}(x)=g^{-1}(g^{-1}(x))$），因此以上的方程对每个整数都有意义. 仍然由于 $g(x)$ 是递增的，让 $n\to-\infty$ 就得出

$$g(x)\leqslant x+g(0),\text{如果 } x>0$$

$$g(x)\geqslant x+g(0),\text{如果 } x<0$$

那样 $g(x)=x+c$，而 $f(x)=m(x-c)$.

（AMM 6132）

10. 求出具有达布（Darboux）性质的所有函数 $f:R\to R$，使得对某个 $n\geqslant 1$ 和对所有的 x，$f^n(x)=-x$.（这里 $f^2(x)=f\circ f$，等等）

解 我们认为"达布"性质是指"中值性质". 设 $f^n(x)=-x$. 那么 f 显然是一个 1－1 对应. 再加上达布性质就说明 f 是单调的. 此外

$$f(-x)=f(f^n(x))=f^n(f(x))=-f(x)$$

因此 f 还是奇函数，那样 $f(0)=0$. 因而上式蕴含当 $x\neq 0$ 时，$xf(x)<0$.

现在任选 $x_0>0$ 并且设 $x_k=f(x_{k-1})$，那么 $(-1)^k x_k>0$，$x_n=-x_0$，因此

$$(-1)^n x_n=(-1)^{n+1}x_0>0$$

这就说明 n 必是一个奇数.

假设 $x_1>-x_0$，那么由于 f 是递减的和奇的，因此

$$x_2=f(x_1)<f(-x_0)=-f(x_0)=-x_1$$

那样我们归纳地得出 $(-1)^k x_k>(-1)^{k+1}x_{k+1}$，这导致矛盾 $x_0>-x_n$.

类似的，假设 $x_1<-x_0$ 将导致矛盾 $x_n<-x_0$.

因此唯一满足要求的解是 $f(x)=-x$.

(AMM E3191)

11.求出所有具有达布性质,并对所有 $x,y\in\mathbf{R}$ 满足方程 $f(x+y)=f(x+f(y))$ 的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$.

解 我们证明 f 只可能是常数或恒同.达布函数的值域是连通的,并且因而是一个区间.设 a,b 分别是值域的下确界和上确界.令 $x=0$,则由条件得出 $f(y)=f(f(y))$,这蕴含对 $x\in(a,b)$ 有 $x=f(x)$.

首先设 a 是有限的并且 f 不是常数.由于对 $x\in(a,b)$ 有 $x=f(x)$,并且 f 是达布函数,故 $f(a)=a$.由于 f 不是常数,因此存在某个 $d>0$,使得在区间 $[a,a+2d]$ 上,$f(x)=x$.这时,对任何 $0<t<d$,有某个 $s>d$ 使得 $f(a-t)=a+s$($s\leqslant d$ 将导致矛盾 $a=f(t+a-t)=f(t+a+s)=a+s+t$).然而对所有 $(0,a)$ 中的 t,$f(a-t)>a+d$ 以及 $f(a)=a$ 和达布性质矛盾.因此 $a=-\infty$.同理可证,如果 f 不是常数,则 $b=\infty$.这就是说 f 是恒同.这就证明了我们的结论,即 f 不是常数就是恒同.

注 E.A.Enneking 注意到函数 $f(x)=x-[x]$,满足所给的函数方程,但是不具有达布性质.

12.求出所有使得 $f(x+2f(y))=f(x)+y+f(y)$ 成立的 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的函数 f.其中 x,y 是任意实数,并且 $f(x)$ 在零点连续.

解 设 $a=f(0)$,令 $x=y=0$,得出 $f(2a)=2a$.再设 $y=2a$ 并令 $x=0$,又得出 $f(4a)=5a$.最后令 $x=2a,y=0$ 得出 $f(4a)=3a$,因而 $f(0)=0$.

现在设 $x=0$ 得出 $f(2f(y))=y+f(y)$.在函数方程中用 $2f(x)$ 代替 x 得出

$$f(2f(x)+2f(y))=f(2f(x))+y+f(y)=x+f(x)+y+f(y)\qquad(*)$$

固定实数 x,令 $b=f(x)+f(-x)$,那么由上式可以得出 $f(2b)=b$,并且因此有 $f(2f(2b))=f(2b)$.然而上面的计算表明 $f(2f(2b))=2b+f(2b)$,因此 $b=0$,这说明 $f(x)$ 是奇函数.

现在我们证明这个问题的关键部分,即 $f(x)$ 是加性的,也就是 $f(x)$ 满足方程

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

为此,令 $c(x,y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$,那么我们有

$$f(2c(x,y))=f(-2(f(x)+f(y))+2f(x+y))=$$

$$f(-2(f(x)+f(y)))+x+y+f(x+y)$$

利用$f(x)$是奇函数的性质就得出$f(2c(x,y))=c(x,y)$，再利用上面$f(2b)=b$蕴含$b=0$的论证就得出$c(x,y)=0$，这就证明了$f(x)$是加性函数.

至此，利用数学分析中熟知的一些结果，其中一个是如果加性函数在一点连续，那么他就在每一点连续（例如见 Bartle and Sherbert, Introduction to Real Analysis, Exercise 12, 155, Wiley, 1982），另一个更为熟知的结果是柯西函数方程的解，即连续的加性函数必为$f(x)=cx$，其中$c=f(1)$，把$f(x)=cx$代入原方程易于求出$c=-\frac{1}{2}$或$c=1$，就可得出答案为$f(x)=-\frac{1}{2}x$或$f(x)=x$.

（AMM 10908）

13. 求出所有使得$f(x^2+y+f(y))=2y+(f(x))^2$成立的$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的函数$f$，其中$x,y$是任意实数.

解 设a是使得$f(a)=0$的实数，由于

$$(f(x))^2=f(x^2+f(0))=(f(-x))^2$$

这就得出也有$f(-a)=0$. 把$(x,y)=(0,\pm a)$代入函数方程表明$a=0$以及$f(0)=0$，因而当且仅当$x=0$时，$f(x)=0$. 又$f(x^2)=(f(x))^2$说明f把正实数映为正实数. 另外我们还有$f(y+f(y))=2y$.

设$\alpha>0$，在函数方程中取$(x,y)=\left(\sqrt{\alpha},-\frac{f(\alpha)}{2}\right)$可得

$$f\left(\alpha-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}\right)\right)=-f(\alpha)+(f(\sqrt{\alpha}))^2=0$$

因此
$$\alpha=\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}\right)$$

现在
$$f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}+f\left(-\frac{f(\alpha)}{2}\right)\right)=f(-\alpha)$$

在函数方程中再取$(x,y)=\left(0,-\frac{f(\alpha)}{2}\right)$我们得出$-f(\alpha)=f(-\alpha)$，因此$f$是奇函数. 在函数方程中取$(x,y)=(\sqrt{\alpha},-\alpha)$我们得出

$$f(f(-\alpha))=-2\alpha+(f(\sqrt{\alpha}))^2=-2\alpha+f(\alpha)$$

那样$2\alpha=f(\alpha+f(f(\alpha)))$，因此

$$f(2\alpha)=f(f(\alpha)+f(f(\alpha)))=$$
$$f(0^2+f(\alpha)+f(f(\alpha)))=2f(\alpha)$$

在函数方程中再取$(x,y)=(\sqrt{2\alpha},-\alpha)$我们得出$f(\beta)=-2\beta$，其中$\beta=\alpha-f(\alpha)$. 现在对$x>0$，$f(x)>0$，因此当$\beta\neq0$时，$\beta$

和 $f(\beta)$ 同号，因而从 $f(\beta) = -2\beta$ 得出 $\beta = 0$. 这就证明了 $f(\alpha) = \alpha$.

(AMM E2280)

14. 解函数方程

$$f(x+y) = f(x-y) + y[f'(x+y) + f'(x-y)]$$

解 设 $g(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)$，$f(x)$ 满足所说的函数方程，那么 $g(x)$ 也满足所说的函数方程，并且 $g(0) = g'(0) = 0$. 对 $x = y = \frac{z}{2}$，我们有 $2g(z) = zg'(z)$，它的解是 $g(z) = az^2$，其中 a 是任意常数. 这就得出所说的函数方程的所有解都是二次的 $f(x) = ax^2 + bx + c$. 反过来显然每个二次函数都满足所说的函数方程.

注 有的解答者对所说的函数方程微分两次得出 $f'''(x) = 0$，从而得出 f 必须是二次函数，然而这等于暗中默认了 $f(x)$ 是三次可微的. 因而在没有证明这一点之前，这一证明是不完全的. 而上面所给的证明并不需要利用这一点.

(AMM E3454)

15. 设 $f(x)$ 是对全体实数有定义的函数，满足方程

$$2f(x+1) = f(x) + f(2x)$$

证明：如果 $f(x)$ 是二次连续可微的，则 $f(x)$ 必是一个常数.

证明 取 $x = 0$ 和 $x = 1$ 得出

$$f(0) = f(1) = f(2)$$

微分关系式 $2f(x+1) = f(x) + f(2x)$ 得出

$$2f'(x+1) = f'(x) + 2f'(2x)$$

$$2f''(x+1) = f''(x) + 4f''(2x)$$

因此连续函数 $F(x) = f''(x)$ 满足函数方程

$$2F(x+1) = F(x) + 4F(2x)$$

令 $2x = y$ 得出

$$F(y) = \frac{1}{2}F\left(\frac{y}{2}+1\right) - \frac{1}{4}F\left(\frac{y}{2}\right)$$

又设 $a \geqslant 2$，$I = [-a, a]$ 以及 $M = \max\limits_{y \in I} |F(y)|$，那么如果 $y \in I$，则显然也有 $\frac{y}{2} \in I$ 和 $\frac{y}{2} + 1 \in I$，因此从

$$F(y) = \frac{1}{2}F\left(\frac{y}{2}+1\right) - \frac{1}{4}F\left(\frac{y}{2}\right)$$

就得出

$$|F(y)| \leqslant \frac{1}{2}M + \frac{1}{4}M, \text{对所有 } y \in I$$

由此又得出 $0 \leqslant M \leqslant \frac{3}{4}M$，因此 $M = 0$. 由于 $a \geqslant 2$ 是任意的，我们就得出 $F(y)$ 处处等于0. 从 $f''(y) = F(y) = 0$ 就得出

$$f(y) = Ay + B$$

再由 $f(0) = f(1) = f(2)$ 就得出 $f(y)$ 必是一个常数.

(AMM E3113)

16. 证明：存在 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的连续，严格递减的函数 $f(x)$，使得 $f(f(x)) = 2x + 2$，但是不存在 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的连续，严格递减的，使得 $f(f(x)) = x + 1$ 的函数.

证明 (1) 设 $a > 0, a \neq 1, b$ 是任意实数，则 $f(x) = -\sqrt{a}x + \frac{b}{1 - \sqrt{a}}$ 满足方程 $f(f(x)) = ax + b$，并且显然是 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的连续、严格递减的函数.

(2) 更一般的，我们证明不存在 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的连续，严格递减的，使得 $f(f(x)) = x + c, c \neq 0$ 的函数. 如果 $f(x)$ 存在，则由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，严格递减，因此 $f(x)$ 必与 $y = x$ 相交，因而必存在不动点 p，但是 $f(f(p)) = p \neq p + c$，矛盾.

17. 设函数 $f(x)$ 满足函数方程 $f(x + y) = f(x) + f(y)$，并且是局部可积的(即在每一个有限区间上是可积的)，那么必有 $f(x) = cx$，其中 c 是一个常数. (AMM H. N. Shapiro, A micronote on a functional equation, Vol. 80(1773), No. 9: 1041)

证明 由 $f(x)$ 所满足的函数方程和局部可积性易于验证下面的恒等式

$$yf(x) = \int_0^{x+y} f(u)\mathrm{d}u - \int_0^{x} f(u)\mathrm{d}u - \int_0^{y} f(u)\mathrm{d}u$$

由于上式右边在交换 x, y 时不变，因此就得出 $yf(x) = xf(y)$. 那样对 $x \neq 0$ 就得出 $\frac{f(x)}{x}$ 是一个常数. 因而对 $x \neq 0, f(x) = cx$，其中 c 是一个常数. 又由函数方程显然可以得出 $f(0) = 0$，所以对 x 的任意值都成立 $f(x) = cx$.

18. 设 $a < b < c$ 都是正整数.

(1) 证明条件

$$f(n) = n - a,\quad n > c$$
$$f(n) = f(f(n + b)),\quad n \leqslant c$$

唯一地确定了函数 $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$.

(2) 确定 f 至少有一个不动点的充分必要条件.

(3) 给出一个由 a,b,c 确切表出的不动点.

(AMM E2554)

解 (1) 我们首先对 $c - n$ 做归纳法证明对所有的 $n \leqslant c$, $f(n) = f(n + b - a)$. 如果 $0 \leqslant c - n < b$,那么由于 $n + b > c$,故

$$f(n) = f(f(n + b)) = f(n + b - a)$$

如果 $c - n \geqslant b$,那么由于 $n + b \leqslant c$,因此由归纳法假设,我们有

$$f(n) = f(f(n + b)) = f(f(n + 2b - a))$$

然而我们又有 $n + (b - a) \leqslant c$,因此

$$f(n + b - a) = f(f(n + 2b - a))$$

这就证明了开始的断言. 当 $n \leqslant c$ 时,反复应用所给的条件直到自变量超过 c,这时 f 都是被唯一确定的. 此外,当 $n \leqslant c$ 时,确定 $f(n)$ 的公式是

$$f(n) = c + b - 2a - j$$

其中 j 是在模 $b - a$ 下,$c - n$ 的最小非负剩余.

(2) 当且仅当 $b - a$ 整除 a 时,函数 f 有不动点. 如果 f 使 n 不动,我们必须有 $n \leqslant c$,在这种情况下,$n = c - k(b - a) - j$,其中 k 和 j 都是非负整数,并且 $0 \leqslant j < b - a$. 利用 $f(n)$ 的表达式,我们求出当且仅当

$$c - k(b - a) - j = n = f(n) = c + b - 2a - j$$

时,f 使 n 不动. 而此式又当且仅当 $(k + 1)(b - a) = a$ 时成立.

(3) 如果 $b - a$ 整除 a,那么 f 的不动点确切地由形如 $c + b - 2a - j$ 的数组成,其中 $0 \leqslant j < b - a$.

19. 是否存在整系数多项式 f,使得 f 在有理数集上是 1 - 1 的,但并不是处处 1 - 1 的?

解 我们断言 $f(x) = x^n - 2x$($n \geqslant 3$ 并且是奇数)就具有所说的性质. 显然它在全体实数上不是 1 - 1 的,由于它有 3 个零点.

设对有理数 $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$, $f(x) = f(y)$,其中 a,b,c,d 是

整数，$b>0$，$d>0$，$(a,b)=(c,d)=1$，那么就有

$$d^n a(a^{n-1}-2b^{n-1})=b^n c(c^{n-1}-2d^{n-1})$$

由于$(a,b)=1$，$(a^{n-1}-2b^{n-1},b)=1$，因而我们必须有$b^n \mid d^n$，同理$d^n \mid b^n$，因此$b=d$。这样上式就成为

$$a^n-c^n=2b^{n-1}(a-c)$$

如果$x\neq y$，那么$a\neq c$，这时由上式可以得出

$$a^{n-1}+a^{n-2}c+\cdots+ac^{n-2}+c^{n-1}=2b^{n-1}$$

由于n是奇数，因此从上式得出a，c必须都是偶数，再由$n\geqslant 3$可知上式左边可被4整除，因而又得出b是偶数，而这与$(a,b)=1$矛盾。这就说明$x=y$。因此$f(x)$在有理数集上是1-1的。

(AMM 5978)

20. 是否存在$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的连续映射f，使得f在无理数集上是1-1的，但并不是处处1-1的？

解　假设存在那种映射f。设$a<b$是有理数并且$f(a)=f(b)=h$。集合$A=\{x\in[a,b]\mid f(x)=h\}$在$[a,b]$中不可能是稠密的，否则$f$在$[a,b]$上将是一个常数。那样在$A$中就存在两个点$a'<b'$使得$(a',b')$中的点都不在$A$中。由中间值定理可知$(a',b')$中点的值或者都大于$h$，或者都小于$h$。不妨假设$(a',b')$中点的值或者都大于$h$（对后一种情况，论证是类似的），那么就有

$$f([a',b'])=[h,f(m)],h<f(m),m\in(a',b')$$

因而　$$f([a',m])=f([m,b'])=[h,f(m)]$$

由于f在无理数集上是1-1的，因此f必须把(a',m)中的无理数映为(m,b')中的有理数的像。然而这就说明f把一个不可数的无理数集合映为一个可数集合，由于f在无理数集上是1-1的，这不可能。

(AMM 10361)

21. 是否存在一个非线性的$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$的连续函数$f(x)$，使得对任意有理数x，$f(x)$也是有理数，而对任意无理数x，$f(x)$也是无理数？

解　存在，$f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$就符合要求。

(AMM 11111)

22. 设$f(x)$和$g(x)$是非常数的连续周期函数，那么函数$h(x)=f(xg(x))$是否可能是周期函数？

解　不可能。注意任意连续周期函数必定是一致连续的，而我们下面要证明$h(x)$不可能是一致连续的。

设 $k(x)$ 是非常数的连续周期函数,令 $p(k)$ 表示 $k(x)$ 的最小正周期,$r(k)$ 表示其值域(即 $k(x)$ 的最大值与最小值之差).

设 $h(x)$ 是一致连续的,那么就存在 $\varepsilon > 0$,使得当 $|x-y| < \varepsilon$ 时

$$|f(x)-f(y)| < \frac{1}{2}r(f)$$

由于 g 不恒等于零,不失一般性,我们可设 g 有取正值的区间,因而存在点 a 和 b,使得 $a < b < a+\varepsilon$,而 $0 < g(a) < g(b)$.对正整数 n,设 $A(n) = a + np(g)$,$B(n) = b + np(g)$,那么就有 $g(A(n)) = g(a)$ 及 $g(B(n)) = g(b)$.

但是另一方面,当 n 足够大时,我们又有

$$B(n)g(B(n)) > A(n)g(A(n)) + p(f)$$

而 h 的值域属于 f 的值域都位于 $[A(n),B(n)]$ 中,这与 $|B(n)-A(n)| = |b-a| < \varepsilon$ 矛盾.

(AMM 6397)

23.(1)设 $D = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| < 1\}$ 是单位球,并且设 $f: D \to D$ 是 D 上的微分同胚,使得:

ⅰ 对每个 $x \in D$ 成立 $f(f(x)) = x$,即 $f \circ f = id$;

ⅱ 在 D 中存在一个0点的邻域 U,使得 $f|_U = id$.

证明:$f = id$.

(2)如果 f 不是微分同胚,而只是一个同胚,上述结果是否仍然成立?

解 从下面将要证明的引理可以得出对(2)的回答是:正确的.设 $\sum$ 是所有 D 中的勒贝格可测集的集合,并用 m 表示 D 上的正规勒贝格测度,即 $m(D) = 1$.

引理 设 $T: D \to D$ 的连续函数,使得:

(1)对某个整数 $r \geq 2$,$T^r = id$;

(2)存在集合 $A \in \sum$ 使得 $m(A) > 0$ 并且 $T|_A = id$.

那么 $T = id$.

引理的证明 从(1)容易得出,T 是一个满射,因此是双方连续的.其次 T 满足 Guzman 定理的条件(见 M. de Guzman, A change of variables formula without continuity, AMM 87(1980), 736-739),这个定理说给了 $V \in \sum$,就存在一个在 V 上可积和非负的函数 J,使得 $m(TV) = \int_V J(y)\mathrm{d}y$.因此如果 $m(TV) > 0$,那么 $m(V) > 0$,并且从(1)得出当且仅当 $m(T^{-1}V) > 0$ 时,$m(V) > 0$.在 $L_1 = L_1(D,\sum,m)$ 对 $g \in L_1$,通过 $Pg = g \cdot T$ 定义一个算子 P.那么 $(D,\sum,m,P)$ 是一个 Markov 过程(见 S.R. Foguel, The Ergodic Theory of Markov Processes, Van Nostrand Mathematical

Studies,21). 此外,这个过程是守恒的. 否则由此书结果 2.6,就存在一个集合 $B \in \sum$, $T^{-1}B \subset B$ 并且 $m(B - T^{-1}B) > 0$,使得

$$B = T^{-j}B \subset T^{-j+1}B \subset \cdots \subset T^{-1}B \subset B$$

这与 $m(B - T^{-1}B) > 0$ 矛盾. 现在设

$$g^*(x) = \sum_{j=0}^{\infty}(P^j g)x, x \in D$$

那么由此书结果 2.4,如果 $0 \leqslant g \in L_\infty(D, \sum, m)$,那么或者在 D 上,几乎处处 $g^*(x) = 0$,或者在 D 上,几乎处处 $g^*(x) = \infty$. 取

$$g(x) = \sum_{j=0}^{r-1} | T^{j+1}(x) - T^j(x) |, x \in D$$

我们就得出 $(Pg)(x) = g(x)$,以及在 A 上 $g(x) = 0$,因此在一个正测度集 A 上 $g^*(x) = 0$. 所以在 D 上,几乎处处 $g^*(x) = 0$,因而在 D 上,几乎处处 $g(x) = 0$,由 T 的连续性就得出在 D 上,$| T(x) - x | = 0$,即 $T = id$.

24. (1) 证明:不可能存在定义在 $[a, +\infty)$ 上的正的连续可微函数 $f(x)$,使得 $f'(x) \geqslant f^2(x)$.

(2) 举例说明存在定义在 $[a, \infty)$ 上的负的连续可微函数 $f(x)$,使得 $f'(x) \geqslant f^2(x)$.

(3) 举例说明存在定义在 $(-\infty, b]$ 上的正的连续可微函数 $f(x)$,使得 $f'(x) \geqslant f^2(x)$.

解 (1) 设存在那种函数 $y = f(x)$,则因为 $y' \geqslant y^2 > 0$,故 y 在 $[a, +\infty)$ 是正的严格递增的函数. 令 $b = f(a)$, $c = f\left(a + \frac{1}{b}\right)$,则 $b > 0$, $a + \frac{1}{b} > a$, $c > f(a) = b$,因此

$$\frac{1}{b} = \int_a^{a+\frac{1}{b}} dx \leqslant \int_a^{a+\frac{1}{b}} \frac{y'}{y^2} dx = \int_b^c \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}\Big|_b^c = \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$$

矛盾.

(2) $y = \frac{1}{1-x}$, $x \geqslant 2$ 就是一个定义在 $[2, +\infty)$ 上的负的连续可微函数 $f(x)$,使得 $f'(x) \geqslant f^2(x)$.

(3) $y = \frac{1}{1-x}$, $x \leqslant -2$ 就是一个定义在 $(-\infty, -2]$ 上的正的连续可微函数 $f(x)$,使得 $f'(x) \geqslant f^2(x)$.

注 S. Zwicker 在 $f^2(x)$ 表示 $f(f(x))$ 的假设下证明了不可能存在定义在 $[0, +\infty)$ 上的正的连续可微函数 $f(x)$,使得 $f'(x) \geqslant f^2(x)$.

证明 假设存在那种函数,那么由于 $f'(x) \geqslant f(f(x)) > 0$,故 $f(x)$ 在

$[0,+\infty)$ 是正的严格递增的函数,因此

$$f'(x)\geqslant f(f(x))>f(f(0))>0$$

从而 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$,由此又得出 $\lim_{x\to\infty}f(f(x))=\infty$,从而 $\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$.

令 $h(x)=f(x)-(x+1)$,那么 $h'(x)$ 趋于 ∞. 这又得出 $h(x)$ 趋于 ∞. 那样我们可以选择一个 x 使得 $f(x)>x+1$. 由中值定理可知,在区间 $(x,f(x))$ 中存在一个点 c,使得

$$\begin{aligned}f(f(x))=f(x)+f'(c)(f(x)-x)>\\ f'(c)(f(x)-x)\geqslant f(f(c))(f(x)-x)>\\ f(f(x))(f(x)-x)>f(f(x))\end{aligned}$$

矛盾.

25. 设 a_n 和 b_n 是两个实数叙列,b_n 收敛,又 $b_n=a_n-\alpha a_{n+1}$,证明:当 $|\alpha|>1$ 或 $|\alpha|<1$,但是 a_n 有界时,a_n 收敛.

(AMM E1760)

解 我们证明下面的更一般的结果:

定理 设 a_n 和 b_n 是两个复数叙列,b_n 收敛,又 $b_n=a_n-\alpha a_{n+1}$,α 是一个固定的复数,那么当且仅当 $|\alpha|>1$ 或 $|\alpha|<1$,但是 $\lim_{n\to\infty}a_n\alpha^n=0$ 时,a_n 收敛.

定理的证明 当 $\alpha=0$ 时,结论是显然的. 对 $\alpha\neq0$,我们可以把 $a_n-\alpha a_{n-1}=b_n$ 看成是关于未知叙列 a_n 的一阶线性非齐次差分方程. 它的解是

$$a_n=-\sum_{k=-1}^{n-1}b_k\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-k}=-\frac{1}{\alpha^n}\sum_{k=-1}^{n-1}b_k\alpha^k \qquad ①$$

如果 $|\alpha|>1$,上式的第一部分表明,a_n 是以 $-b_k,k=-1,0,1,\cdots$ 为系数的 $\frac{1}{\alpha}$ 的幂级数的部分和,由于 b_k 是收敛的,因此这个幂级数的系数是有界的,因此 a_n 是收敛的.

如果 $|\alpha|<1$,从①的第二部分得出 $-a_n\alpha^n=\sum_{k=-1}^{n-1}b_k\alpha^k$. 由于此式的左边趋于0,因此右边的部分和也趋于0. 因此他们可用其所对应的非负的余项代替

$$-a_n\alpha^n=-\sum_{k=n}^{\infty}b_k\alpha^k \text{ 或 } a_n=\sum_{k=0}^{\infty}b_{n+k}\alpha^k$$

令 $\lim_{n\to\infty}b_n=b$,我们估计下面的差

$$\left|a_n-\frac{b}{1-\alpha}\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}(b_{n+k}-b)\alpha^k\right|\leqslant\frac{1}{1-|\alpha|}\sup_{k\geqslant n}|b_k-b|$$

当 n 充分大时,上式右边可变的任意小,因此 a_n 收敛到 $\frac{b}{1-\alpha}$.

对 $a=1$，$a_n=-\sum\limits_{k=-1}^{n-1} b_k$，例子 $b_{-1}=b_0=-1$ 和 $b_n=\frac{(-1)^k}{2^k}$，$2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ 说明 a_n 可以是有界但是不收敛的. 类似的，$a=-1$ 和 $b_n=1$ 导致 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}$.

(AMM E3388)

26. 设 x_1 和 x_2 是任意正数，$x_{n+2}=\frac{2}{x_{n+1}+x_n}$，$n=1,2,3,\cdots$. 证明：叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

证明 首先证明此叙列是有界的. 对 x_1 和 x_2 显然存在正数 $a>1$，使得 x_1 和 x_2 位于 $\frac{1}{a}$ 和 a 之间. 如果 x_n 和 x_{n-1} 都在 $\frac{1}{a}$ 和 a 之间，那么 $\frac{1}{a} \leqslant \frac{x_n+x_{n-1}}{2} \leqslant a$，因此 x_{n+1} 也在 $\frac{1}{a}$ 和 a 之间，因而由数学归纳法就证明了我们的断言.

现在设 $l=\liminf x_n$，$L=\limsup x_n$. 那么由于 L 是有限的，故对任意 $\varepsilon>0$，存在一个整数 n_0，使得当 $n>n_0$ 时，$x_n<L+\varepsilon$. 因此当 $n>n_0$ 时

$$x_{n+2}=\frac{2}{x_{n+1}+x_n}>\frac{1}{L+\varepsilon}$$

由此得出 $l \geqslant \frac{1}{L}>0$. 类似的，当 $n>n_1$ 时，$x_n>l-\varepsilon>0$，蕴含 $x_{n+2}<\frac{1}{l-\varepsilon}$，因此 $L \leqslant \frac{1}{l}$. 这就得出 $l=\frac{1}{L}$.

现在设 $\{n_i\}$ 是正整数的无限叙列，使得 $x_{n_i+2} \to L$. 如果必要，我们可通过取子叙列使得 x_{n_i+1}，x_{n_i} 和 x_{n_i-1} 分别趋于 l_1，l_2 和 l_3. 由于 $x_{m+1}+x_m=\frac{2}{x_{m+2}}$ 以及 $x_m+x_{m-1}=\frac{2}{x_{m+1}}$，我们有 $l_1+l_2=\frac{2}{L}$，$l_2+l_3=\frac{2}{l_1}$. 由于 $l \leqslant l_1,l_2,l_3 \leqslant L$，这就得出 $l_1=l_2=l$，$l_2=l_3=L$，因此 $l=L$，而 $x_n \to 1$.

(AMM 10756)

27. 证明：

$$\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{7}}{6}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)+\sqrt{3}\sin\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)\right)$$

证明 由恒等式

$$\cos 7\theta=(\cos\theta+1)(8\cos^3\theta-4\cos^2\theta-4\cos\theta+1)^2-1$$

可知 $f(x)=8x^3-4x^2-4x+1$ 的三个根是 $\cos\frac{\pi}{7}$，$\cos\frac{3\pi}{7}$ 和 $\cos\frac{5\pi}{7}$.

注意
$$\cos\frac{\pi}{7}>\cos\frac{3\pi}{7}>0>\cos\frac{5\pi}{7}$$
因而 $\cos\frac{\pi}{7}$ 是三次多项式 $f(x)$ 的仅有的大于 $\cos\frac{3\pi}{7}$ 的根.

设
$$a=\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)\right)$$
并设 $c=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{7}}{6}\left(\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)+\sin\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)\right)=$
$$\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{7}}{6}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\pi-\arccos\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)\right)=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{7}}{6}a$$
函数 $g(x)=\cos\left(\frac{1}{3}\arccos x\right)$ 在 $[-1,1]$ 上递增,因此我们有
$$a>\cos\left(\frac{1}{3}\arccos(-1)\right)=\frac{1}{2}$$
所以
$$c>\frac{1+\sqrt{7}}{6}>\frac{1}{2}>\cos\frac{3\pi}{7}$$
由于 $6c-1=2\sqrt{7}a$,因此由恒等式 $4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos 3\theta$ 就得出
$$\frac{1}{14\sqrt{7}}(6c-1)^3-\frac{3}{2\sqrt{7}}(6c-1)=-\frac{1}{2\sqrt{7}}$$
因此 $f(c)=\frac{14\sqrt{7}}{27}\left(\frac{1}{14\sqrt{7}}(6c-1)^3-\frac{3}{2\sqrt{7}}(6c-1)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)=0$

这也就是 $c=\cos\frac{\pi}{7}$.

(AMM E1624)

28. 证明或否定:对所有大于 2 的正整数 n,$(2n-1)^n+(2n)^n<(2n+1)^n$ 以及 $(2n)^n+(2n+1)^n>(2n+2)^n$.

解 第一个不等式等价于
$$\left(2+\frac{1}{n}\right)^n-\left(2-\frac{1}{n}\right)^n>2^n$$
当 $n>2$ 时,只要将左边展开即可验证此式.假设第二个不等式不成立.由于
$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\right]=e-\sqrt{e}>1$$
这就得出,对充分大的 n
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n>1$$
两边都乘以 $(2n)^n$ 就得出
$$(2n+2)^n-(2n+1)^n>(2n)^n$$

这和第二个不等式矛盾.

可以验证当 $1 \leqslant n \leqslant 15$ 时,第二个不等式成立,但是当 $n \geqslant 16$ 时不成立. Sholander 建立了某些和第一个不等式有关的更一般的结果:"给了整数 $n > 2$ 和实数 $x, y, z, 0 < x \leqslant y - 1 \leqslant z - 2$,那么 $x^n + y^n \geqslant z^n$ 蕴含 $x > 2n - 1, y > 2n, z > 2n + 1$." Hansen 表明第二个不等式应该改成

$$(2n+2)^n - (2n)^n < 2(2n+1)^n \sinh\left(\frac{1}{2}\right)$$

(AMM E1816)

29. 证明:当 $n > 1$ 时,$(n!)! > [(n-1)!]^{n!}$.

证明 由不等式 $\sum_{k=2}^{m} \ln k = \int_{1}^{m} \ln x\mathrm{d}x$,$m > 2$ 得出 $m! > m^m e^{1-m}$,因此 $n^m m! > m^m e\left(\frac{n}{e}\right)^m$.令 $m = n!$就得出一个更强的不等式

$$(n!)! > [(n-1)!]^{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^{n!} e$$

(AMM E2286)

30. 设 $f(n) = (n!)^{\frac{1}{n}}$,证明或否定叙列$\frac{f(n+1)}{f(n)}$ 是单调递减的.

证明 通过直接计算可以验证对 $n = 1,2,3,4$,所说的叙列是单调递减的.令

$$R(n) = \left[\frac{f(n+2)f(n)}{f(n+1)^2}\right]^{n(n+1)(n+2)}$$

那么 $$R(n+1) = R(n)\left(\frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4}\right)^{(n+1)(n+2)} < 1$$

由 $R(1) < 1$ 和数学归纳法即可得出对所有的正整数 n,成立 $R(n) < 1$,因而

$$\frac{\frac{f(n+2)}{f(n+1)}}{\frac{f(n+1)}{f(n)}} = \frac{f(n+2)f(n)}{f(n+1)^2} < 1$$

这就证明了所要的结果.

(AMM E1774)

31. 设 $0 < a < b$,证明:对所有的 $x > 0$,$\frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$ 是单调递增的.

证明 对所给的函数求导后得到一个分数，其分母总是正的，而分子是

$$g(x)=a(bx+1)\ln(bx+1)-b(ax+1)\ln(ax+1)$$

现在
$$g'(x)=ab\ln\left(\frac{bx+1}{ax+1}\right)>0$$

因此 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格递增的. 由于 $g(0)=0$，这就得出当 $x>0$ 时，$g(x)>0$. 因此所给函数的导数总是正的，因而 $\dfrac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}$ 是严格单调递增的.

(AMM E2086)

32. 证明：当 $x>1$ 时，$f(x)=\dfrac{\ln\frac{x+2}{x+1}}{\ln\frac{x+1}{x}}$ 是递增的.

证明

$$f'(x)=\frac{\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)-\left(\ln\frac{x+2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(x+1)-\ln x)^2}$$

因此只须证明

$$\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)>\left(\ln\frac{x+2}{x+1}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

即可. 此式等价于下列各式，即

$$\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)\left(-\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)>\left(\ln\frac{x+2}{x+1}\right)\left(-\frac{1}{x(x+1)}\right)$$

$$\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)\frac{1}{(x+1)(x+2)}<\left(\ln\frac{x+2}{x+1}\right)\frac{1}{x(x+1)}$$

$$\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)\frac{1}{x+2}<\left(\ln\frac{x+2}{x+1}\right)\frac{1}{x}$$

现在
$$\ln(x+2)-\ln(x+1)=\int_{x+1}^{x+2}\frac{dx}{x}>\frac{1}{x+2}$$

因而
$$\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+2}\int_{x}^{x+1}\frac{dx}{x}<\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x}$$

联合以上几式即可得出结果.

(AMM E1867)

33. 证明：对 $x>0$，$\arctan x>\dfrac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$.

证法1 设 $f(x)=\arctan x-\dfrac{3x}{1+2\sqrt{1+x^2}}$，那么 $f(0)=0$. 直接计算得出

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^2}{(1+x^2)(1+2\sqrt{1+x^2})^2}$$

因此当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)>0$. 由此即得出当 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

证法2 由 $(\cos\theta-1)^2\geqslant 0$，可以得出

$$1\geqslant\frac{3+6\cos\theta}{(\cos\theta+2)^2}$$

对上面的不等式从0到 $\arctan x$ 积分即得出所需的不等式.

(AMM E2739)

> **34.** 证明：当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时
>
> $$x\sec^2x-\tan x\leqslant\frac{8\pi^2x^3}{(\pi^2-4x^2)^2}$$

证明 从展开式 $\tan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8x}{D_n}$，$D_n=(2n+1)^2\pi^2-4x^2$（见 T'. J. I'A. Bromwich, Introduction to the Theory of Infinite Series, Doverreprint 1965)，我们有

$$\sec^2x=(\tan x)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{D_n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{64x^2}{D_n^2}$$

因此
$$x\sec^2x-\tan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{64x^2}{D_n^2}$$

但是
$$D_n^2\geqslant(2n+1)^4E^2,E=\pi^2-4x^2$$

因此
$$x\sec^2x-\tan x\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{64x^3}{(2n+1)^4E^2}=\frac{64x^3}{E^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{2\pi^4x^3}{3E^2}$$

（见 M. Abramowitz and I. Stegun, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series no. 59, Handbook of Mathematical Tables). 由于 $\frac{2\pi^4}{3}<8\pi^2$，这就得出所要的不等式.

注 Ruehr 和 Shafer 指出注意到 $D_n^2\geqslant(2n+1)^2ED_n$，则这一不等式可以改进为

$$x\sec^2x-\tan x\leqslant\frac{2\pi^2(\tan x-x)}{E}$$

35. 证明：对 $0 < a < b$，成立

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}-\frac{a+b}{2}>\frac{b-a}{\ln b-\ln a}$$

(Mathematics Magazine Vol.80(2007), NO.5, 397)

证明 令 $b = a(1+x)^2$，则欲证的不等式化为

$$\ln(1+x)>\frac{x^2+2x}{\sqrt{2(1+x)^4+2}-x^2}, x>0$$

由于上面的式子两边在 $x=0$ 时都等于零，因此为证上式，只须证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(1+x)>\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2+2x}{\sqrt{2(1+x)^4+2}-x^2}, x>0$$

即可，而上式等价于

$$\frac{1}{1+x}>\left((\sqrt{2(1+x)^4+2}-x^2)(2x+2)-(x^2+2x)\left(\frac{4(1+x)^3}{\sqrt{2(1+x)^4+2}}-2x\right)\right)\Big/(\sqrt{2(1+x)^4+2}-x^2)^2$$

而上式经过去分母之后，又等价于证明在 $x>0$ 时

$$64x^2+320x^3+768x^4+1\ 152x^5+1\ 224x^6+984x^7+582x^8+228x^9+54x^{10}+8x^{11}+x^{12}>0$$

而此式是显然的，这就证明了原来要证的不等式.

(AMM E2655)

36. 证明：当 $n \geqslant 2, 0 < x < \frac{n}{n+1}$ 时

$$(1-2x^n+x^{n+1})^n<(1-x^n)^{n+1}$$

证明 由于 $0 < x < \frac{n}{n+1} < 1$，所以 $1-2x^n+x^{n+1}$ 和 $1-x^n$ 都是正数. 因此所说的不等式和以下不等式都是等价的

$$1-2x^n+x^{n+1}<(1-x^n)\sqrt[n]{1-x^n}$$

$$(1-x^n)(1-\sqrt[n]{1-x^n})<(1-x)x^n$$

$$\frac{1-x^n}{1-x}<\frac{1-(1-x^n)}{1-\sqrt[n]{1-x^n}}$$

$$\frac{1-x^n}{1-x}<\frac{1-y^n}{1-y}$$

其中 $y=\sqrt[n]{1-x^n}$. 由于当 $0<t<1$ 时，$\frac{1-t^n}{1-t}$ 是递增的，因此上式又等价于

$$x < y = \sqrt[n]{1-x^n}$$

即

$$x < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

由于当 $n \geqslant 2$ 时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$，因此

$$\frac{n+1}{n} > \sqrt[n]{2}, 0 < x < \frac{n}{n+1} < \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

这就证明了要证的不等式.

(AMM E2695)

37. 证明：当 $a > 1, x > 0$ 时，$-\log(1-(1-e^{-x})^a) < x^a$.

证明　设 $y = 1 - e^{-x}$，那么 $0 < y < 1$，而我们有

$$-\log(1-(1-e^{-x})^a) = -\log(1-y^a) =$$

$$y^a\sum_{n\geqslant 0}\frac{y^{na}}{n+1} < y^a\sum_{n\geqslant 0}\frac{y^n}{n+1} <$$

$$y^a\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{y^n}{n+1}\right)^a = (-\log(1-y))^a = x^a$$

(AMM E2720)

38. 证明：当 $0 < x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 时，$\sin^2 x < \sin x^2$.

证明　我们证明一个更一般的结果.

命题　设 $a > 0$，在 $[0, a]$ 上，$f(0) = 0, f'(0) = 1, f$ 递增，f' 递减，$0 < f(x) \leqslant 1$，那么如果 $0 < x, y, xy \leqslant a$，则 $f(x)f(y) \leqslant f(xy)$.

命题的证明　设 $0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant a$，则

$$tf(y) = t\int_0^y f'(u)\mathrm{d}u \leqslant t\int_0^y f'(tu)\mathrm{d}u = f(ty)$$

在上面的式子中令 $t = f(x)$ 得 $f(x)f(y) \leqslant f(f(x)y)$. 再把 $f(x) = \int_0^x f'(u)\mathrm{d}u < x$ 代入前面的式子即得 $f(x)f(y) \leqslant f(xy)$.

注　如果应用结果函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是递减的（这个结果本身也可以用初等方法证明），那么要证的不等式也可以用初等方法证明如下：

引理　函数 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上是递减的.

引理的证明　设 $0 < \alpha < \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$，令 $\gamma = \beta - \alpha$，则 $\gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，我们有

$$\alpha\sin\alpha\cos\gamma \leqslant \alpha\sin\alpha \quad ①$$

$$\frac{\alpha}{\tan\alpha}\cdot\frac{\sin\gamma}{\gamma} < 1$$

故

$$\alpha\sin\gamma < \gamma\tan\alpha = \gamma\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\alpha\cos\alpha\sin\gamma < \gamma\sin\alpha \quad ②$$

① + ② 得出

$$\alpha\sin\alpha\cos\gamma + \alpha\cos\alpha\sin\gamma < \alpha\sin\alpha + \gamma\sin\alpha$$

$$\alpha\sin(\alpha+\gamma) < (\alpha+\gamma)\sin\alpha$$

$$\alpha\sin\beta < \beta\sin\alpha$$

$$\frac{\sin\beta}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

这就证明了$\frac{\sin x}{x}$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是递减的.

当$0 < x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$时,不等式$\sin^2 x < \sin x^2$的初等证明.

分成以下3种情况分别证明:

i $1 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$;这时$1 \leqslant x \leqslant x^2$,由于$\sin x$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上递增,$\left[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right] \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,故

$$\sin^2 x < \sin x \leqslant \sin x^2$$

ii $0 < x < 1$;这时$0 < x^2 < x < 1 < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.由于函数$\frac{\sin x}{x}$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是递减的,故

$$\frac{\sin x}{x} < \frac{\sin x^2}{x^2}$$

$$x^2\sin x < x\sin x^2$$

由于$x \neq 0$,故

$$x\sin x < \sin x^2$$

$$\sin^2 x = \sin x\cdot\sin x < x\sin x < \sin x^2$$

iii $x = 0$;这时$\sin^2 x = \sin x^2$.

综上当$0 < x \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$时,成立不等式$\sin^2 x < \sin x^2$并且等号在$x = 0$时成立.

(AMM E2952)

39. 证明:在$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$上,$\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta + \frac{\theta}{\pi^3}(\pi^2 - 4\theta^2)$.

证明 设

$$f(\theta) = \sin\theta - 3\frac{\theta}{\pi} + 4\frac{\theta^3}{\pi^3}, I = \left[0,\frac{\pi}{4}\right], J = \left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$$

那么在$\partial I = \left\{0,\frac{\pi}{4}\right\}$上,$f^{(2)} \leqslant 0$,在$I$上$f^{(4)} \geqslant 0$蕴含在$I$上$f^{(2)} \leqslant 0$.但是$f$在$I$上是凹的,因此在$\partial I$上$f \geqslant 0$蕴含在$I$上$f \geqslant 0$.在$J$

上，由于 $f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)>0$ 和 $f^{(4)}>0$ 蕴含 $f^{(3)}>0$，故 $f^{(1)}$ 是凸的．由于在 ∂J 上 $f^{(1)}\leqslant 0$ 以及 $f^{(1)}$ 在 J 上是凸的，所以在 J 上 $f^{(1)}<0$．因此 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 蕴含在 J 上，$f\geqslant 0$．因而在 $I\cup J=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上 $f\geqslant 0$，所以

$$\sin\theta\geqslant 3\frac{\theta}{\pi}-4\frac{\theta^3}{\pi^3},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

或

$$\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta+\frac{\theta}{\pi^3}(\pi^2-4\theta^2)$$

(AMM E3326)

40．设 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，证明：$\arcsin\frac{\theta}{6}+\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\frac{\theta}{4}\right)<\frac{\theta}{3}$．

证明　设 $x=\frac{\theta}{4}$，$I=\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$．考虑函数

$$f(x)=\arcsin\frac{2x}{3}+\arcsin\left(\frac{2\sin x}{3}\right)-\frac{4x}{3}$$

我们将证明在 I 上 $f(x)<0$．由于 $f(0)=0$，因此只须证明在 I 上 $f'(x)<0$ 即可．而由

$$f'(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{1}{\sqrt{9+5\tan^2x}}-\frac{2}{3}\right)$$

又只须证明在 I 上 $g(x)<\frac{2}{3}$ 即可，其中

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}+\frac{1}{\sqrt{9+5\tan^2x}}$$

由于 $g(0)=\frac{2}{3}$，这又只须证明在 I 上 $g'(x)<0$ 即可．由于

$$g'(x)=\frac{4x}{(9-4x^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{5\tan x(1+\tan^2x)}{(9+5\tan^2x)^{\frac{3}{2}}}$$

这又只须证明

$$A=\frac{(9+5\tan^2x)^{\frac{3}{2}}}{\tan x(1+\tan^2x)}<\frac{5(9-4x^2)^{\frac{3}{2}}}{4x}=B$$

即可．现在 $\frac{\sin x}{x}>\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 蕴涵在 I 上

$$1+\tan^2x=\frac{1}{1-\sin^2x}>\frac{\pi^2}{\pi^2-8x^2}$$

因此

$$A=\sqrt{\left(5+\frac{4}{1+\tan^2x}\right)\left(5+\frac{9}{\tan^2x}\right)}<\frac{(9\pi^2-32x^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\pi^2x}$$

我们现在只须证明上式右边的表达式至多是 B 即可，而这等价于证明

$$\frac{9\pi^2-32x^2}{9-4x^2}<\pi\sqrt[3]{\frac{25\pi}{2}}$$

上式左边是一个递增函数，它在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的值是 $\frac{28\pi^2}{36-\pi^2}$，而这个值要小于 $\pi\sqrt[3]{\frac{25\pi}{2}}$. 由此即可得出最后所要证明的式子.

（AMM E3306）

41. (1) 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，那么 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}>2$.

(2) 求出一个最大的常数使得当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}>2+cx^3\tan x$$

证明 (1) 证法1 由计算 $\sin^2 x$ 的5阶导数和 $\tan^2 x$ 的4阶导数，并应用带余项的泰勒(Taylor)定理，我们有表达式

$$\sin^2 x=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{(16\sin 2\alpha)x^5}{120}$$

和

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{(16\sec^4\beta\tan\beta+8\sec^2\beta\tan^3\beta)x^4}{24}$$

其中 α 和 β 都是位于0和 x 之间的正实数，因而

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2>1-\frac{x^2}{3}\text{ 和 }\frac{\tan x}{x}>1+\frac{x^2}{3}$$

由此得出所需的结果.

证法2 设

$$f(x)=2\sin x+\tan x-3x$$

由 $f(0)=0$ 和 $f'(x)=\frac{(2\cos x+1)(\cos x-1)^2}{\cos^2 x}>0$，我们有当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)>0$. 因此

$$\frac{\sin x}{x}>\frac{1}{2}\left(1-\frac{\tan x}{x}\right)+1$$

如果 $\frac{\tan x}{x}>3$，命题已经得证，否则对上式两边平方得出

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2>\frac{1}{4}\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)^2+2-\frac{\tan x}{x}>2-\frac{\tan x}{x}$$

(2) 设在 $(0,\pi)$ 上定义了函数

$$\varphi(x)=\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\frac{\tan x}{x}-2}{x^3\tan x}=\frac{\sin 2x}{2x^5}+\frac{1}{x^4}-\frac{1}{2x^3\cot x}$$

我们的目的是确定 $\varphi(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上的下确界.

我们断言 $\varphi(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是递减的,因此

$$\inf_{0<x<\frac{\pi}{2}}\varphi(x)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^4}{16}$$

那样(2)中所求的最大常数 c 就等于$\frac{\pi^4}{16}$.

在区间$(0,\pi)$上我们有两个马克劳林(Maclaurin)展开式

$$\sin 2x=2x-\frac{4x^3}{3}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n+5}}{(2n+5)!}$$

$$x\cot x=1-\frac{x^2}{3}-\sum_{n=0}^{\infty}2^{2n+4}|B_{2n+4}|\frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!}$$

后一展式可以从伯努力数 B_r 可以用幂级数展开式$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{r=0}^{\infty}B_r\frac{t^r}{r!}$,$|t|<2\pi$定义这一事实得出.因此在$0<x<\pi$时,我们有

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+5}}{(2n+4)!}\left(|B_{2n+4}|+\frac{(-1)^n}{2(2n+5)}\right)x^{2n}$$

那样如果在$0<x<\pi^2$上,对$\psi(x)=\varphi(\sqrt{x})$有

$$\psi(x)=\frac{8}{45}-\frac{8x}{945}+\frac{16x^2}{14\ 175}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2^{2n+5}}{(2n+4)!}\left(|B_{2n+4}|+\frac{(-1)^n}{4n+10}\right)x^n$$

由于

$$2(2n+5)|B_{2n+4}|=\frac{4(2n+5)!}{(2\pi)^{2n+4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n+4}}>\frac{4(2n+5)!}{(2\pi)^{2n+4}}>1$$

当$n\geqslant 3$时,我们有$|B_{2n+4}|>\frac{1}{4n+10}$,那样在$(0,\pi^2)$上$\psi''(x)>0$,因此$\psi'(x)$递增.另一方面由$\varphi(x)$的定义,我们立即得出

$$\psi'\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{\pi}\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^4\left(1-\frac{10}{\pi^2}\right)<0$$

这就得出在区间$\left(0,\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$上$\psi'(x)$是负的,因此$\psi(x)$是递减的.这就是说$\varphi(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是递减的.

(AMM 10261)

42.设$0<x<\frac{\pi}{4}$,证明:$(\sin x)^{\sin x}<(\cos x)^{\cos x}$.

证明　对实数 $a>0$，$b>0$ 和 $0<\lambda<1$，自然对数的严格凸性给出

$$\ln(\lambda a+(1-\lambda)b)>\lambda\ln a+(1-\lambda)\ln b$$

在上式中令 $a=\sin x$，$b=\sin x+\cos x$，$\lambda=\tan x$ 得出

$$\ln(\cos x)>\tan x\ln(\sin x)+(1-\tan x)\ln(\sin x+\cos x)$$

由于当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时

$$\tan x<1,\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>1$$

因此上式中右边最后一项是正的，由此即可得出结果.

(AMM 11069)

> 43. 设 $0<x<1$，证明：$\frac{1-x^2}{1+x^2}(1+x^3(1-x)^3)<\frac{\sin\pi x}{\pi x}$.

证明　由正弦的乘积表示可得

$$\sin\pi x=\pi x(1-x)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{x(1-x)}{m(m+1)}\right)$$

由于当 $0<x<1$ 时，$\frac{x(1-x)}{m(m+1)}$ 是正的，这就得出

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x(1-x)}>1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x(1-x)}{m(m+1)}=1+x-x^2$$

又注意

$$\frac{1+x}{1+x^2}(1+x^2(1-x)^3)=1+x-x^2-$$
$$\frac{x^4(1-x)(1+x-x^2)}{1+x^2}<1+x-x^2$$

联合这两个不等式就得出

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x(1-x)}>\frac{1+x}{1+x^2}(1+x^2(1-x)^3)>$$
$$\frac{1-x}{1+x^2}(1+x^3(1-x)^3)$$

(AMM E3085)

> 44. 设 $g(\mu)$ 是方程 $(\mu+g(\mu))^p+|\mu-g(\mu)|^p=2\mu$ 的唯一的非负解，其中 $1<p<2$，$0\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{2}$，证明：
> $$(1-\mu+g(\mu))^p+|1-\mu-g(\mu)|^p\leqslant 2(1-\mu)$$

证明　令 $\lambda=1-\mu$. 那么由于 $(2\mu)^p\leqslant 2\mu$ 以及 $\mu+\lambda=1\geqslant 2\mu$，故 $\mu\leqslant g(\mu)\leqslant\lambda$，因此

$$(\lambda+g(\mu))^p+|\lambda-g(\mu)|^p=$$

$$(1+g(\mu)-\mu)^p+(1-(\mu+g(\mu)))^p=$$
$$1+p(g(\mu)-\mu)+C_p^2(g(\mu)-\mu)^2+$$
$$C_p^3(g(\mu)-\mu)^3+\cdots+$$
$$1-p(\mu+g(\mu))+C_p^2(\mu+g(\mu))^2-$$
$$C_p^3(\mu+g(\mu))^3+\cdots$$

当 n 是偶数时，C_p^n 是正的，并且

$$(g(\mu)-\mu)^n+(\mu+g(\mu))^n\leqslant$$
$$(g(\mu)-\mu)^p+(\mu+g(\mu))^p=2\mu$$

当 n 是大于等于 3 的奇数时，C_p^n 是非负的，并且

$$0\leqslant(\mu+g(\mu))^n-(g(\mu)-\mu)^n\leqslant$$
$$(\mu+g(\mu))^p+(g(\mu)-\mu)^p=2\mu$$

因此
$$(\lambda+g(\mu))^p+|\lambda-g(\mu)|^p\leqslant$$
$$2-2p\mu+2\mu(C_p^2-C_p^3+C_p^4-\cdots)=$$
$$2-2p\mu+2\mu(p-1)=2-2\mu=2\lambda$$

(AMM E3151)

45. 设 $x\geqslant 0,x\neq 1,\lambda\geqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2$，证明

$$\left(\frac{x^\lambda-1}{x-1}\right)^\beta\leqslant\lambda\left(\frac{x^{\lambda\beta}-1}{x^\beta-1}\right)$$

证明 由于把 x 换成 $\frac{1}{x}$ 式，所给的不等式不变，因此只须考虑 $x>1$ 的情况即可（$x=0$ 的情况是平凡的）. 由于

$$\frac{e^{2\lambda at}-1}{e^{2at}-1}=\frac{e^{\lambda at}}{e^{at}}\cdot\frac{\operatorname{sh}\lambda at}{\operatorname{sh}at}$$

所以双曲替换 $x=e^{2t}$ 把所给的不等式转换成

$$\lambda\frac{\operatorname{sh}\lambda\beta t}{\operatorname{sh}^\beta\lambda t}\geqslant\frac{\operatorname{sh}\beta t}{\operatorname{sh}^\beta t},t>0,\lambda\geqslant 1,0\leqslant\beta\leqslant 2$$

上面的不等式中的等号在 $\lambda=1$ 时成立，因此只须证明左边是 λ 的不减函数或等价的，证明它的对数导数是非负的即可，那也就是要证

$$\frac{1}{\lambda}+\beta t\operatorname{cth}\lambda\beta t-\beta t\operatorname{cth}\lambda t\geqslant 0$$

两边乘以 $\lambda\operatorname{sh}\lambda t\operatorname{sh}\lambda\beta t$ 并利用双曲正弦的加法公式，则上面的不等式可转换成

$$\operatorname{sh}\lambda t\operatorname{sh}\lambda\beta t\geqslant\lambda\beta t\operatorname{sh}\lambda t(\beta-1)$$

由于对非负变量，$\operatorname{sh}x$ 是非负的，因此上式对 $0\leqslant\beta\leqslant 1$ 成立，因此我们只须考虑 $1\leqslant\beta\leqslant 2$ 的情况即可. 当 $\beta=2$ 时，上式等价于 $(\operatorname{sh}\lambda t)(\operatorname{sh}2\lambda t-2\lambda t)\geqslant 0$，这可由对 $y\geqslant 0$ 时，$\operatorname{sh}y\geqslant y$ 得出. 为了证明 $1\leqslant\beta<2$ 的情况，只须证明左边关于 β 的对数导数小于右

边的即可，这就是要证明

$$\frac{\lambda t}{\operatorname{th}\lambda\beta t} \leqslant \frac{1}{\beta} + \frac{\lambda t}{\operatorname{th}\lambda t(\beta-1)}$$

而这可从 th x 是递增函数的事实立即得出.

(AMM E1342)

46. 设 x,y 都是正实数，证明：$x^y + y^x > 1$.

证明 要证的不等式在 $x \geqslant 1$ 或 $y \geqslant 1$ 时是平凡的，因此只须考虑 $0 < x,y < 1$ 的情况. 这时令 $y = kx$，并且由于对称性，我们可以只须考虑 $0 < k \leqslant 1$ 的情况. 易于证明函数 x^x 有唯一的极小值 $a = e^{-\frac{1}{e}}$，因此

$$f(x) = x^{kx} + (kx)^x = (x^x)^k + k^x x^x \geqslant a^k + ka = F(k)$$

又易于证明 $F(k)$ 在 $0 < k \leqslant 1$ 上是递增的，并且 $F(0) = 1$，$F(1) = 2a > 1$，因此

$$f(x) = F(k) > 1$$

(AMM E3116)

47. 设 x,y 都是非负实数，证明：$x^x + y^y \geqslant x^y + y^x$.

证明 不失一般性，不妨设 $x < y$. 分两种情况讨论.

(1) $y > 1$. 那么 $y > \max(1,x)$，因此

$$y^t\ln y > x^t\ln y > x^t\ln x$$

$$y^y - y^x - (x^y - x^x) = \int_x^y (y^t\ln y - x^t\ln x)\mathrm{d}t > 0$$

(2) $x < y \leqslant 1$. 这时考虑函数

$$f(t) = y^y - y^t - (t^y - t^t), 0 \leqslant t \leqslant y$$

显然 $f(y) = 0$，当 $0 < t < y$ 时

$$f'(t) = g(t) + h(t)$$

其中

$$g(t) = t^t\ln t - y^t\ln y$$

$$h(t) = t^t - yt^{y-1}$$

由于

$$g(t) = -\int_t^y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(s^t\ln s)\mathrm{d}s = -\int_t^y s^{t-1}(1 + t\ln s)\mathrm{d}s$$

因此条件 $t \leqslant s \leqslant y \leqslant 1$ 蕴含

$$1 + t\ln s \geqslant 1 + t\ln t \geqslant 1 - \frac{1}{e} > 0$$

因此 $g(t) < 0$.

现在考虑函数 $k(z)=t^z-zt^{z-1}, 0<z<\infty$. 那么 $0<t<y\leqslant 1$, 并且 $k(t)=0>t^t-1=k(1)$, 还有当 $z\to\infty$ 时, $k(z)\to t^t$.

如果 $k(y)$ 是非负的, 那么 k 必在 $[y,1)$ 中有一个零点, 在 $(1,+\infty)$ 中也有一个零点, 再加上在 t 处的一个较小的零点, k 将至少有三个正的零点, 因此 k' 将至少有两个正的零点. 然而 $k'(z)=-t^{z-1}(1+z\ln t)$ 实际上只有一个正零点, 因此必须有 $h(t)=k(y)<0$.

这就说明 $f'(t)<0$, 因而由 $0<t<y$ 及 $x<y\leqslant 1$ 就得出 $f(t)>0, f(x)>0$.

(AMM 11139)

48. 证明: 当 $p>1$ 或 $p<0$ 时

$$\frac{1^p}{3^p}<\frac{1^p+3^p}{5^p+7^p}<\frac{1^p+3^p+5^p}{7^p+9^p+11^p}<\cdots<$$
$$\frac{1^p+\cdots+(2n-1)^p}{(2n+1)^p+\cdots+(4n-1)^p}<\cdots$$

而当 $0<p<1$ 时, 上面的不等式反号.

证明 当 $p>1$ 或 $p<0$ 时, 函数 x^p 在 $(0,+\infty)$ 上是凸的, 因此 $(1-x)^p+(1+x)^p$ 在 $(0,1)$ 中递增. 令 $x=\frac{1}{2k}$, 我们就得出 $\frac{(2k-1)^p+(2k+1)^p}{k^p}$ 对于 k 是递减的, 因此

$$\frac{1^p+3^p}{2^p}>\frac{5^p+7^p}{3^p}>\cdots>\frac{(2k-1)^p+(2k+1)^p}{k^p}>\cdots$$

易证当 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ 时有 $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$, 对上述不等式反复应用这个关系式就得出

$$\frac{1^p+3^p}{1^p}>\frac{1^p+3^p+5^p+7^p}{1^p+3^p}>\cdots>$$
$$\frac{1^p+3^p+\cdots+(4n-1)^p}{1^p+3^p+\cdots+(2n-1)^p}>\cdots$$

在上面的每个不等式的两边减去1并颠倒分子和分母就得出所要的不等式.

当 $0<p<1$ 时, 函数 x^p 是凹的, 因此上述证明中的所有不等式都将反号, 这就得出另一部分结论.

(AMM E2670)

49. 设 $f(x,y)=\dfrac{xe^{-x}-ye^{-y}}{e^{-x}-e^{-y}}$，如果 $0<a<b<c<\infty$，$0<x<y<z<\infty$，证明：

$$|f(a,b)+f(b,c)-f(x,y)-f(y,z)|\leqslant 2\max(|x-a|,|y-b|,|z-c|)$$

证明 设 $g(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$，$h(x)=\dfrac{x}{1-e^{-x}}$，那么有

$$f(x,y)=\frac{xe^{-x}-ye^{-y}}{e^{-x}-e^{-y}}=x-g(y-x)=y-h(y-x)$$

以及

$$f(x,y)-f(a,b)=x-a+g(b-a)-g(y-x)=y-b+h(b-a)-h(y-x)$$

由于在 $(0,+\infty)$ 上 g 是递减的而 h 是递增的，因此对 $0<a<b<+\infty$ 和 $0<x<y<+\infty$，我们就有

$$\min(x-a,y-b)\leqslant f(x,y)-f(a,b)\leqslant \max(x-a,y-b)$$

由此即可得出要证的不等式.

(AMM 10825)

50. 设 x,y 是任意实数，定义 $S_0(x,y)=x$，$S_1(x,y)=y$，$S_n(x,y)=S_{n-1}(x,y)+S_{n-2}(x,y)$，证明

$$\inf_{-\infty<n<\infty}|S_n(x,y)|\leqslant\sqrt{\frac{|x^2+xy-y^2|}{5}}$$

并且确定等号何时成立.

证明 设 $\varphi=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，$\hat\varphi=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$，他们是方程 $t^2=t+1$ 的解. 由数学归纳法可证明

$$\sqrt5 S_n(x,y)=A\varphi^n-B\hat\varphi^n$$

其中 $A=y-\hat\varphi x$，$B=y-\varphi x$. 注意 $AB=y^2-xy-x^2$，此外由于

$$(x+y)^2-y(x+y)-y^2=-(y^2-xy-x^2)$$

因此由数学归纳法可以证明对任意整数 n 成立

$$|S_{n+1}^2-S_nS_{n+1}-S_n^2|=|y^2-xy-x^2|$$

如果 $B=0$，那么当 $n\to-\infty$ 时，$S_n\to0$. 等号在 $A=0$ 时成立. 类似的，如果 $A=0$，那么当 $n\to+\infty$ 时，$S_n\to0$，等号在 $B=0$ 时成立. 因此我们可设 $AB\neq0$，通过考虑反号的叙列，我们可进一步假设 $A>0$. 现在，当 n 充分大时，S_n 是正的，而对负的 n，当 n 充分大时，S_n 是正负交替的. 我们可通过平移使得 $S_0\leqslant0$，而对所

有 $n>0, S_n>0$. 这时 $x=S_0\leqslant 0$, 而 $x+y=S_2>0$, 即 $0\leqslant -x<y$.

设 $x=-a, y=a+b$, 其中 $a\geqslant 0, b=x+y>0$. 由数学归纳法可以求出对所有的 n, 成立

$$S_n=aF_{n-2}+bF_n$$

其中 $F_n=\dfrac{\varphi^n-\hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$ 是第 n 个斐波那契数. 由于 F_n 和 F_{n-2} 是同号的整数(除非二者之中有一个是零). 这就得出

$$\min|S_n|=\min(a,b)$$

因此 $5\min(a^2,b^2)\leqslant a^2+3ab+b^2=y^2-xy-x^2$

等号当且仅当 $a=b$ 时成立. 当 $a=b$ 时, 我们有

$$S_n=a(F_{n-2}+F_n)=aL_{n-1}$$

其中 $L_n=\varphi^n+\hat{\varphi}^n$ 是第 n 个卢卡斯数.

对原来的问题, 我们已经证明等号当且仅当 $y=\varphi x$ 或者 $y=\hat{\varphi}x$ 或者对某个 n

$$y=\frac{x(\varphi^{n+1}+\hat{\varphi}^{n+1})}{\varphi^n+\hat{\varphi}^n}=\frac{xL_{n+1}}{L_n}$$

时成立.

(AMM E1368)

51. 证明: 如果 $ax^4-bx^3+cx^2-x+1=0$ 对所有的根都是正的, 则 $c\geqslant 80a+b$.

证明 分以下 4 种情况讨论:

(1) $a=b=c=0$, 这时方程的所有的根都是正的(事实上, 只有唯一的正根 $x=1$), 而 $c=80a+b=0$, 因而命题成立.

(2) $a=b=0, c\neq 0$, 这时方程成为 $cx^2-x+1=0$. 由根与系数的关系可知 $x_1x_2=1/c$, 因而由条件得出 $1/c=x_1x_2>0$, $c>0=80a+b$, 故命题也成立.

(3) $a=0, b\neq 0$, 这时方程成为 $bx^3-cx^2+x-1=0$. 由根与系数的关系可知 $x_1x_2x_3=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=1/b$, 因而由条件得出 $1/b=x_1x_2x_3>0, b>0$ 以及

$$1=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{x_1x_2x_3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}>\frac{1}{x_i}$$

因此 $x_1>1, x_2>1, x_3>1$. 这就得出 $c/b=x_1+x_2+x_3\geqslant 3$, $c\geqslant 3b>b=80a+b$, 因此命题也成立.

(4) $a\neq 0$, 这时方程成为

$$ax^4-bx^3+cx^2-x+1=0$$

由根与系数的关系可知

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1$$

以及 $\frac{c-b}{a}=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-(x_1+x_2+x_3+x_4)=f(x_1,x_2,x_3,x_4)$

现在考虑在约束条件 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=1$ 下，函数 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的最小值问题. 由于直接应用拉格朗日乘数法将导致解方程组方面的困难. 因此我们首先固定 x_3,x_4，并设

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1-\frac{1}{x_3}-\frac{1}{x_4}=\frac{1}{q}$$

因而

$$x_1x_2=q(x_1+x_2)$$

$$g(x_1,x_2)=q(x_1+x_2)-x_1x_2=0$$

$$f(x_1,x_2)=x_1x_2+(x_3+x_4-1)(x_1+x_2)+x_3x_4-x_3-x_4=x_1x_2+p(x_1+x_2)+r$$

现在对约束条件 $g(x_1,x_2)=0$ 和目标函数 $f(x_1,x_2)$ 应用拉格朗日乘数法，为此构造辅助函数

$$F(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)=x_1x_2+p(x_1+x_2)+r+\lambda(q(x_1+x_2)-x_1x_2)=(1-\lambda)x_1x_2+(p+q\lambda)(x_1+x_2)+r$$

于是原来的有约束条件的函数 $f(x_1,x_2)$ 的极值问题现在变为函数 $F(x_1,x_2)$ 的无约束极值问题. 因而须解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=(1-\lambda)x_2+p+q\lambda=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=(1-\lambda)x_1+p+q\lambda=0$$

$$g(x_1,x_2)=q(x_1+x_2)-x_1x_2=0$$

把前两个方程代入第三个方程即可求出 λ 的值，然后再把这个 λ 的值代入前两个方程可确定(并不需要具体求出 x_1,x_2 的值) $x_1=x_2$. 同理(分别固定 x_1,x_2 及 x_1,x_4 后)可以得出 $x_3=x_4$ 及 $x_2=x_3$，因此最后得出必须有 $x_1=x_2=x_3=x_4$. 将此式代入约束条件即得

$$x_1=x_2=x_3=x_4=4$$

将此数值代入函数 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的表达式，并和边界处的函数值比较，可知函数 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在满足约束 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=$

1 的条件下，在 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 4$ 处取得最小值 80，因而 $\frac{c-b}{a} \geqslant 80$，由题目中所有根都是正的条件容易得出

$$\frac{1}{a} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 > 0, a > 0$$

因而 $c - b \geqslant 80a$，$c \geqslant 80a + c$。这就得出在这种情况下命题也成立。

综合以上讨论，即得欲证。

注　对 4 次以上的偶数次多项式还没有一般的关于实根，乃至正根的存在的充分的以及必要的判别条件，因此如果对某类具体的多项式能给出此类条件，都是有兴趣的结果。关于 4 次多项式实根的存在条件和正定性判别条件可见：冯贝叶。四次函数实零点的完全判据和正定条件。应用数学学报，29(2006)，3：454-466。

52. 设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 是 n 个非负实数($n \geqslant 2$)。

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = 1 (a_{n+1} = a_1)$$

求 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的最小值。

(AMM E3099)

解　我们用拉格朗日方法在约束条件 $\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = 1$ 下去求 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的最小值。设

$$G = \sum_{i=1}^{n} a_i - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} - 1\right)$$

并且分别考虑边界处和内部的极值两种情况。

(1) $a_1 = 0, n \geqslant 3$。显然 a_{n-1} 和 a_n 必须是正的，因此我们可以对这两个变量去求极小值。在极小值处

$$\frac{\partial G}{\partial a_{n-1}} = 1 - \lambda(a_{n-2} + a_n) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial a_n} = 1 - \lambda a_{n-1} = 0$$

我们看出 $$a_{n-2} + a_n = a_{n-1}$$

那么由 $$0 \leqslant a_{n-2} \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$$

得出 $$a_n \leqslant a_{n-2} + a_n \leqslant a_{n-1} \leqslant a_n$$

因而必须 $a_{n-2} = 0$ 并且 $a_{n-1} = a_n$。从

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = a_{n-1} a_n$$

我们有 $$a_{n-1} = a_n = 1$$

因此 $$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_{n-1} + a_n = 2$$

(2) $a_1 \neq 0$. 如果我们设 $a_0 = a_n$，那么设

$$\frac{\partial G}{\partial a_i} = 1 - \lambda(a_{i-1} + a_{i+1}) = 0, i = 1, \cdots, n$$

我们看出除了 $n = 4$ 时，对每个 i，$a_{i-1} + a_{i+1}$ 都是相同的. 当 $n = 4$ 时，所有的 a_i 都相等. 对 $n = 2$ 或 3，可以直接得出结论. 当 $n \geqslant 5$ 时，我们有 $a_1 = a_5$ 以及 $a_4 = a_n$. 由于 $a_i \leqslant a_{i+1}$，这就得出 $a_1 = \cdots = a_n$. 从 $1 = \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = n a_i^2$，我们得出 $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$，因此 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sqrt{n}$.

当 $n = 4$ 时，由对每个 i，$a_{i-1} + a_{i+1}$ 都是相同的得出仅有

$$a_1 + a_3 = a_2 + a_4$$

这就得出 $a_1 = a_2$ 以及 $a_3 = a_4$，从 $1 = \sum_{i=1}^{4} a_i a_{i+1}$，我们看出 $a_1 + a_3 = 1$，因此 $\sum_{i=1}^{4} a_i = 2$.

以上讨论可综合如下：对 $n = 2$ 或 3，当 $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$ 时，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的最小值是 $\sqrt{n}$；对 $n = 4$，当 $a_1 = a_2, a_3 = a_4, a_1 + a_3 = 1$ 时，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的最小值是 2；对 $n \geqslant 5$，当 $a_1 = \cdots = a_{n-2} = 0, a_{n-1} = a_n = 1$ 时，$\sum_{i=1}^{n} a_i$ 的最小值是 2.

(AMM 10646)

53. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是非负实数，$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$，求 $\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)$ 的最大值.

解 当 $n = 1$ 时，$x_1 = 1$，因此所求的最大值就是 0. 以下设 $n \geqslant 2$.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是最优解. 如果 x, y 是某两个 x_i，那么 x, y 满足一个二元的极值问题：在条件 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 及 $x^2 + y^2 = k^2$ 下(其中 $k \leqslant 1$ 是一个给定的正数)，求 $(1 - x)(1 - y)$ 的最大值. 为解这个二元问题，注意 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$，因此

$$\frac{d(1-x)(1-y)}{dx} = -(1-y) - (1-x)\frac{dy}{dx} = \frac{(x-y)(1-x-y)}{y}$$

当上式为零时，$(x+y-1)(x-y)=0$，因此 $(1-x)(1-y)$ 取全局最大共有三种可能：

(1) 边界点，$x=0$，$y=k$ 或反过来，因此 $(1-x)(1-y)=1-k$.

(2) $y=x$，因此

$$y=x=\frac{k}{\sqrt{2}},(1-x)(1-y)=\left(1-\frac{k}{\sqrt{2}}\right)^2$$

(3) $y=1-x$，因此

$$x,y=\frac{1\pm\sqrt{2k^2-1}}{2},(1-x)(1-y)=\frac{1-k^2}{2}$$

由于对所有的 k 有 $\frac{1-k^2}{2}\leqslant 1-k$，因此情况(3)可以不予考虑. 如果 $k<2(\sqrt{2}-1)\approx 0.828$，那么在情况(1)中 $(1-x)(1-y)$ 取得最大，否则在情况(2)中取得最大.

现在考虑三元的极值问题：设 x,y,z 是任意三个 x_i. 在条件 $x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$ 及 $x^2+y^2+z^2=h^2$ 下(其中 $h\leqslant 1$ 是一个给定的正数)，求 $(1-x)(1-y)(1-z)$ 的最大值. 现在最大元至少是 $\frac{h}{\sqrt{3}}$，因此对其他两个元解二元极值问题必须满足条件 $k\leqslant\sqrt{\frac{2}{3}}h<0.828$. 因此由已证的结果可知，这个二元问题的极值必在情况(1)中取得，这也就是说，必有一个元为0.

由于每三个元中必有一个为0，因此至多有两个非零变元. 这时 $k=1$，因此最后的二元问题的最大值在情况(2)中取得，最大值是 $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$.

(AMM E3097)

54. 求出方程 $(x+1)^x+(x+2)^x=(x+3)^x$ 的所有实数解.

解 为使方程中所出现的函数有意义，我们只考虑大于 -1 的 x 值. 设

$$f(x)=\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x+\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x-1$$

那么
$$\begin{aligned}f'(x)=&\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x\left[\ln\left(1-\frac{2}{x+3}\right)+\frac{2x}{(x+1)(x+3)}\right]+\\&\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x\left[\ln\left(1-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{x}{(x+2)(x+3)}\right]<\\&\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x\left[-\frac{2}{x+3}+\frac{2x}{(x+1)(x+3)}\right]+\end{aligned}$$

$$\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x\left[-\frac{1}{x+3}+\frac{x}{(x+2)(x+3)}\right]=$$

$$-\frac{2}{(x+1)(x+3)}\left(1-\frac{2}{x+3}\right)^x-$$

$$\frac{2}{(x+2)(x+3)}\left(1-\frac{1}{x+3}\right)^x<0$$

所以对 $x>-1$，$f(x)$ 是严格递减的.

另一方面，显然当 $x=2$ 时，$f(x)=0$. 由于严格单调函数的零点是唯一的，因此方程 $(x+1)^x+(x+2)^x=(x+3)^x$ 的唯一解就是 $x=2$.

(AMM E1381)

55. 证明：$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}=0$ 没有实根.

证明 如果这个方程有实根，那么这个根必定是负的. 不妨设它是 $-y$，$y>0$，然而

$$1-y+\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3}{3!}+\cdots+\frac{y^{2n}}{(2n)!}>e^{-y}>0$$

56. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 上可微，又对所有 $(0,1)$ 中的 x 成立

$$|xf'(x)-f(x)+f(0)|<Mx^2$$

其中 M 是一个固定的常数. 问 $f'(0)$ 是否存在?

解 右导数存在. 不妨设 $f(0)=0$，并设对 $0<x<1$，$h(x)=\frac{f(x)}{x}$，只要证明 $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$ 存在即可. h 在 $0<x<1$ 时是可微的，并且

$$f'(x)=(xh(x))'=xh'(x)+h(x)$$

因此
$$xf'(x)-f(x)=x^2h'(x)$$

因而由假设 $|x^2h'(x)|<Mx^2$ 或 $|h'(x)|<M(0<x<1)$. 如果 $\{x_n\}$ 是 $(0,1)$ 中任意趋于 0 的叙列，那么

$$h(x_m)-h(x_n)=h'(\xi)(x_m-x_n)$$

其中 ξ 介于 x_m 和 x_n 之间，因而只要 $m,n>N(\varepsilon)$，就有

$$|h(x_m)-h(x_n)|<M|x_m-x_n|<\varepsilon$$

这就说明 $\{h(x_n)\}$ 是一个柯西叙列，因而由 $\{x_n\}$ 的任意性可知 $\{h(x_n)\}$ 收敛，所以 $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$ 存在.

(AMM E1439)

57. 构造一个有界的,严格单调的函数 $f(x)$ 使得对所有的实数 x, $f'(x)$ 存在,且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) \neq 0$.

解 设对所有的非负整数 n, $f(n) = 1 - 2^{-n}$,用下述方法将此定义扩充到所有非负实数上:

$$f_n(n) = f(n), f_n(n+1) = f(n+1)$$

$$f_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(n) + f(n+1))$$

$$f'_n(n) = f'_n(n+1) = 0, f'_n\left(n+\frac{1}{2}\right) = 1$$

然后,再令 $f(-x) = -f(x)$,那么 $f(x)$ 对所有的实数有定义,有界并且显然是严格单调的,并且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x) \neq 0$,由于这个极限根本不存在.

(AMM 10739)

58. 设 $f:[0,1] \to \mathbf{R}$ 是连续的二次可微函数,在 $(0,1)$ 上 $f''(x) > 0$, $f(0) = 0$. 在 $(0,1)$ 中选一点 $a \in (0,1)$ 使得 $f'(a) < f(1)$. 证明:存在一点 $b \in (a,1)$ 使得 $f'(a) = \frac{f(b)}{b}$.

证明 由平均值定理可知存在一点 $c \in (0,1)$ 使得 $f'(c) = f(1)$. 由于在 $(0,1)$ 上 $f'' > 0$,故 f' 在 $(0,1)$ 上递增,因此点 a 在 $(0,c)$ 中. 设 $g(x) = f(x) - xf'(a)$,则我们有 $g(0) = 0$, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$. 这就得出在 $(0,a)$ 中 $g' < 0$,因此 $g(a) < 0$. 由于在 $(a,1)$ 中 $g' > 0$,因此 $g(1) > 0$,这就得出必存在一个唯一的 $b \in (a,1)$ 使得 $g(b) = 0$,这也就是 $f'(a) = \frac{f(b)}{b}$.

59. 设 $f(x) = \cot x - \frac{1}{x}$,证明:

$$f^{(k)}(x) < 0, 0 < x < \pi, k = 0,1,2,\cdots$$

(F. F. Abi = Khuzam and A. B. Boghossian, Some recent geometric inequalities, AMM Vol 96(1989), No. 7: 576-589)

证明 在欧拉恒等式

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

两边取对数并求导得出

$$\cot x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k\pi + x} - \frac{1}{k\pi - x}\right), 0 < x < \pi$$

在上式中把$\frac{1}{k\pi+x}$和$\frac{1}{k\pi-x}$展开得

$$f(x)=\cot x-\frac{1}{x}=-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{2k},0<x<\pi$$

其中 $$c_k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^{2k+2}},k=0,1,2,\cdots$$

由此即可得出要证的结果.

(AMM E3366)

60. 对 $n=1,2,3,\cdots$ 确定(0,1)的子集,使得在此子集上

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n(\ln x\cdot\ln(1-x))<0$$

解 设 $f(x)=\ln x\cdot\ln(1-x)$,那么

$$f'(x)=\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}=$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{m-1}-x^{m-1}}{m}$$

由此显然得出当 n 是偶数时,由于所有的项都是负的,故 $f^{(n)}(x)$ 总是负的.而当 n 是奇数时,当且仅当 $1-x<x$ 或 $x>\frac{1}{2}$ 时,$f^{(n)}(x)$ 是负的.

(AMM E2115)

61. 设 $S_n=\frac{n+1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^i}{i}$,证明:极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在并求出此极限.

解 $$S_{n+1}=\frac{n+2}{2^{n+2}}\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{i}=\frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)$$

因此 $$S_{n+2}-S_{n+1}=\frac{(n+2)^2(S_{n+1}-S_n)-S_{n+1}-1}{2(n+1)(n+2)}$$

由于对所有的 n,$S_n\geqslant 0$,因而从上式看出 $S_{n+1}-S_n\leqslant 0$ 蕴含 $S_{n+2}-S_{n+1}\leqslant 0$.又由实际计算得出 $S_4-S_3=0$,因此当 $n\geqslant 3$ 时,S_n 是不增的叙列,因而极限 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在.由 S_n 的递推关系就得出

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(n+1)}(S_n+1)=\frac{1}{2}(S+1)$$

这就得出 $S=1$.

62. 设

(1) $f(x)$ 是在区间 (a,b) 上连续的，严格递增的下凸函数.

(2) 在 $a < f(x) < x$.

(3) $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x) = 1$.

又设 $f^n(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 次迭代函数，$f^0(x)$ 表示恒同函数，那么对任意 $x,y\in(a,b)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{n+1}(x)-f^n(x)}{f^{n+1}(y)-f^n(y)}=1$$

证明 首先凸形条件保证了在 (a,b) 的任一点处，$f(x)$ 两边的单边导数的存在性并且蕴含了导函数是递减的. 以下 $f'(x)$ 将表示 $f(x)$ 的右导数.

其次，从 $f(x)$ 的性质得出，对每一个 n，$f^n(x)$ 在 (a,b) 上是有定义的，连续的和严格递增的. 此外，在 (a,b) 上

$$a < f^{n+1}(x) < f^n(x) < x$$

并且对每一个 $x\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = a$.

不失一般性，不妨设 $y < x$（对 $y = x$，结果是显然的，对 $y > x$，交换 x,y 的位置即可）. 那么存在正整数 k，使得

$$f^k(x) < y < x$$

由于 $f(x)$ 是凸的，因此如果 $t_1 < t_0$，$t_1,t_0\in(a,b)$，那么

$$f'(t_0)\leqslant\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}\leqslant f'(t_1)$$

在上式中令 $t_0 = f^n(x)$，$t_1 = f^{n+1}(x)$，就得到

$$f'[f^n(x)]\leqslant\frac{f^{n+2}(x)-f^{n+1}(x)}{f^{n+1}(x)-f^n(x)}\leqslant f'[f^{n+1}(x)]$$

因此由条件(3)得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{n+2}(x)-f^{n+1}(x)}{f^{n+1}(x)-f^n(x)}=1$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{n+k+1}(x)-f^{n+k}(x)}{f^{n+1}(x)-f^n(x)}=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{f^{n+i+2}(x)-f^{n+i+1}(x)}{f^{n+i+1}(x)-f^{n+i}(x)}=1 \quad ①$$

由于 $f'(x)$ 是递减的，从条件(3)就得出在 (a,b) 上 $f'(x)\leqslant 1$，因而在 (a,b) 上 $f(x)-x$ 是递减的，即对 $v < u$，$u,v\in(a,b)$ 有 $f(u)-u\leqslant f(v)-v$，这个式子的两边都是负的，因此

$$\frac{f(u)-u}{f(v)-v}\geqslant 1$$

在上式中令 $u=f^n(x)$ 和 $v=f^n(y)$ 就得出

$$\frac{f^{n+1}(x)-f^n(x)}{f^{n+1}(y)-f^n(y)}\geqslant 1 \qquad ②$$

然而,另一方面,由 $f^k(x)<y<x$ 可知$f^{k+n}(x)<f^n(y)$,因此由 $f(u)-u\leqslant f(v)-v$ 又得出

$$f^{n+1}(y)-f^n(y)\leqslant f^{n+k+1}(x)-f^{n+k}(x)$$

以及

$$\frac{f^{n+1}(x)-f^n(x)}{f^{n+k+1}(x)-f^{n+k}(x)}\geqslant\frac{f^{n+1}(x)-f^n(x)}{f^{n+1}(x)-f^n(x)} \qquad ③$$

这样,从以上已证的式 ①,②,③ 即可得出结论.

(AMM 4615)

63. 设 $F(x)=\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}\cdots$,证明:当 $x\to\infty$ 时,$F(x)\to 0$.

证明 对 $x>0$,至少有$\frac{3x}{2\pi}-2$个整数使得$\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{x}{k}\leqslant\frac{2\pi}{3}$,只考虑这些因子就得出

$$|F(x)|\leqslant 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3x/2\pi}=O(e^{-cx})$$

其中 $c=\frac{\ln 8}{2\pi}$,由此即可得出结果.

(AMM E1179)

64. 设 z 表示一个复数,$f(z)=\frac{|z|+z}{2}$,$f^2(z)=f(f(z)),\cdots,f^n(z)=f(f^{n-1}(z))$. 又设 $i=\sqrt{-1}$,计算 $\lim\limits_{n\to\infty}f^n(i)$.

解 设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,那么

$$f(z)=r\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

因而

$$f^n(z)=r\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k}\left(\cos\frac{\theta}{2^n}+i\sin\frac{\theta}{2^n}\right)$$

因此由所谓韦达(Vieta)公式

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\cos\frac{\theta}{2}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\frac{\sin\frac{\theta}{4}}{\frac{\theta}{4}}=\cdots=$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}$$

就得出
$$\lim_{n\to\infty} f^n(z)=\frac{r\sin\theta}{\theta}$$

特别
$$\lim_{n\to\infty} f^n(i)=\frac{2}{\pi}$$

(AMM 10901)

65. 设 $a_1=1,a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3},a_3=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{13},a_4=\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{8}+\frac{1}{57}+\frac{1}{5}+\frac{1}{21}+\frac{1}{14}+\frac{1}{183}$,然后每一次把 a_n 的表达式中的$\frac{1}{d}$ 换成$\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d^2+d+1}$ 就得到 a_{n+1} 的表达式,计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解 $a_n=\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i}$,其中 $m=2^{n-1}$.注意对所有的 i 成立 $d_i\geqslant n$ 以及当 $0<x\leqslant 1$ 时有 $x-\frac{x^3}{3}<\arctan x<x$,就得到

$$a_n\left(1-\frac{1}{3n^2}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i}-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{d_i}\right)^3<\sum_{i=1}^{m}\arctan\frac{1}{d_i}<\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i}=a_n$$

由于
$$\arctan\frac{1}{d+1}+\arctan\frac{1}{d^2+d+1}=\arctan\frac{1}{d}$$

我们递推地看出

$$\sum_{i=1}^{m}\arctan\frac{1}{d_i}=\arctan a_1=\frac{\pi}{4}$$

因此
$$\frac{\pi}{4}<a_n<\left(1-\frac{1}{3n^2}\right)\frac{\pi}{4}$$

由此即可得出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\frac{\pi}{4}$.

(AMM E2451)

66. 设 $0<x_0<\pi,x_{n+1}=\sin x_n$,证明:当 $n\to\infty$ 时,$\sqrt{n}x_n\to\sqrt{3}$.

证明 易证 x_n 是正的严格单调递减的叙列,因此 $L=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,在 $x_{n+1}=\sin x_n$ 的两边让 $n\to\infty$ 可得 $L=\sin L$,又当 $n\geqslant 1$ 时,$0\leqslant x_n\leqslant 1$,因此必有 $L=0$.这就是说,当 $n\to\infty$ 时,x_n 是一个无穷小量.

令 $y_n = \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_{n-1}^2}$，$x = x_{n-1}$，那么当 $n \to \infty$ 时，$x \to 0$ 而

$$y_n = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} =$$

$$\frac{x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + \cdots\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

由此得出当 $n \to \infty$ 时，$y_n \to \frac{1}{3}$，因而由史笃兹定理（在这种特殊情况下的史笃兹定理又称柯西定理）可知

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{\frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_0^2}}{n} \to \frac{1}{3}$$

因而
$$\frac{1}{nx_n^2} \to \frac{1}{3}, nx_n^2 \to 3, \sqrt{n}x_n \to \sqrt{3}$$

这就证明了所求的极限，并且得出当 $n \to \infty$ 时，$x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$。

67. 设 $0 < x_0 < 1$，$x_{n+1} = x_n - x_n^2$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，证明：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(1 - nx_n)}{\ln n} = 1$$

（AMM E3034）

证明 设 $y_n = \frac{1}{x_n}$，则我们得出等价的循环关系

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{y_n - 1} = y_n + 1 + \frac{1}{y_n - 1}$$

其中 $y_n > 1$。用数学归纳法容易得出 $y_n \geqslant n$。由此可以得出存在常数 C，使得对于所有的 n 都有

$$y_n \leqslant y_{n-1} + 1 + \frac{1}{n-1} \leqslant$$

$$y_{n-2} + 2 + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} \leqslant \cdots \leqslant$$

$$y_1 + n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \leqslant n + \ln n + C$$

这又反过来可以证明存在另一个常数 C'，使得对于所有的 n 都有

$$y_n \geqslant y_{n-1} + 1 + \frac{1}{n - 1 + \ln n + C} \geqslant \cdots \geqslant$$

$$y_1 + n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i + \ln(i+1) + C} \geqslant n + \ln n + C'$$

一方面，从以上两式我们得出

$$\frac{n(1 - nx_n)}{\ln n} = \frac{n(y_n - n)}{y_n \ln n} \leqslant$$

$$\frac{n(\ln n+C)}{(n+\ln n+C')\ln n}=1+o(1),n\to\infty$$

另一方面，仍从以上两式我们得出

$$\frac{n(1-nx_n)}{\ln n}=\frac{n(y_n-n)}{y_n\ln n}\geqslant$$

$$\frac{n(\ln n+C')}{(n+\ln n+C)\ln n}=1+o(1),n\to\infty$$

由此即可得出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(1-nx_n)}{\ln n}=1$$

(AMM E2692)

68. 证明：递增的繁分数的叙列

$$\frac{1}{2},\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)},\frac{\left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)/\left(\frac{7}{8}\right)},\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)/\left(\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{5}{6}\right)/\left(\frac{7}{8}\right)}\right]\Bigg/\left[\frac{\left(\frac{9}{10}\right)/\left(\frac{11}{12}\right)}{\left(\frac{13}{14}\right)/\left(\frac{15}{16}\right)}\right],\cdots,$$

趋近于一个极限，并求出这个极限.

一般的，对叙列

$$\frac{x}{x+1},\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)}{\left(\frac{x+2}{x+3}\right)},\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)/\left(\frac{x+2}{x+3}\right)}{\left(\frac{x+4}{x+5}\right)/\left(\frac{x+6}{x+7}\right)},\cdots$$

我们能说些什么？

解 一般的叙列可以被归纳地定义为

$$f_0(x)=x,f_{k+1}(x)=\frac{f_k(x)}{f_k(x+2^k)},k\geqslant 0$$

现在，利用对 k 的归纳法易于证明

$$f_k(x)=\prod_{r=0}^{2^k-1}(x+r)^{\theta(r)}$$

其中依赖于 r 的二项展开式中 1 的个数是偶数还是奇数，$\theta(r)=+1$ 或 -1.

定义 $f(x)$ 是无穷乘积 $\prod\limits_{r\geqslant 0}(x+r)^{\theta(r)}$. 由于这个乘积可以被看成是形如

$$\left(\frac{x+4n+1}{x+4n}\cdot\frac{x+4n+2}{x+4n+3}\right)^{\pm 1}=\left(1+\frac{2}{(x+4n)(x+4n+3)}\right)^{\pm 1}$$

的因式的乘积，因此它是收敛的.

由于 $\theta(2r)=\theta(r),\theta(2r+1)=-\theta(r)$，我们有

$$f(2x)f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left[\prod(2x+r)^{\theta(r)}\right]\left[\prod\left(x+\frac{1}{2}+r\right)^{\theta(r)}\right]=$$

$$\left[\prod (2x+r)^{\varepsilon(r)}\right]\left[\prod (2x+2r+1)^{\varepsilon(r)}\right] =$$
$$\prod (2x+2r)^{\varepsilon(2r)} = f(x)$$

利用上式和 L'Hôpital 法则得出

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{f(2x)} = \frac{f'(0)}{2f'(0)} = \frac{1}{2}$$

容易验证 $f'(0) \neq 0$，由此及上面的乘积式子还可以得到 $f(1)^2 = f\left(\frac{1}{2}\right)$，由于 $f(1) > 0$，我们就得出 $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

69. 设 $a_0, a_1 > 0$，$a_n = \sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_{n-2}}$ $(n \geq 2)$. 证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛并且计算其极限.

(AMM E2721)

证明　利用计算机或计算器容易发现当 $n \to \infty$ 时此数列趋于 4，并且以几何速度收敛到此极限. 因此，可试图证明

$$|a_n - 4| \leq Mq^n$$

(1) $1 \leq a_0 \leq 4$，$1 \leq a_1 \leq 4$，那么容易用归纳法证明对一切 $n \geq 1$，成立 $1 \leq a_n \leq 4$. 对 $n = 0,1,2$ 可以直接验证 $0 < 4 - a_n < 4\left(\frac{4}{5}\right)^n$. 现在假设对所有小于或等于 n 的正整数，这一不等式成立，那么

$$0 < 3(2-\sqrt{a_n}) \leq (2-\sqrt{a_n})(2+\sqrt{a_n}) = 4 - a_n \leq 4\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$0 < 2 - a_n \leq \frac{4}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

利用这个不等式易证对 $n+1$ 成立

$$0 < 4 - a_{n+1} < 4\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

因此由数学归纳法就证明了对所有正整数 n 上述不等式成立. 这就证明了对情况 1，命题成立，且极限为 4.

(2) $1 \leq \max(a_0, a_1) \leq 4$，这时易证对 $n \geq 2$，$1 \leq a_n \leq 4$. 因此我们又回到(1).

(3) $0 < \max(a_0, a_1) < 1$，这时

$$\sqrt{a_0} > a_0 > 0, \sqrt{a_1} > a_1 > 0$$

由此易证

$$a_n \geq u_n \sqrt{a_0}$$

其中 $u_0 = u_1 = 1$，$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}$，因此由(1)已证的结果可知，存在正整数 n_1 使得

$$u_{n_1+1} \geq u_{n_1} \geq 2\sqrt{a_0}$$

如果 $2\sqrt{a_0} \geq 1$，那么我们又回到(2)，如果 $0 < 2\sqrt{a_0} < 1$，那么由

刚才已证的结果可知，又存在正整数 n_2 使得

$$u_{n_2+1} \geqslant u_{n_2} \geqslant 2(2\sqrt{a_0}) = 2^2\sqrt{a_0}$$

如果 $2^2\sqrt{a_0} \geqslant 1$，那么我们又回到(2)，如果 $0 < 2^2\sqrt{a_0} < 1$，那么由刚才已证的结果可知，又存在正整数 n_3 使得

$$u_{n_3+1} \geqslant u_{n_3} \geqslant 2(2^2\sqrt{a_0}) = 2^3\sqrt{a_0}$$

$$\cdots$$

如此继续下去，必定存在一个正整数 n_k，使得

$$u_{n_k+1} \geqslant u_{n_k} \geqslant 2(2^{k-1}\sqrt{a_0}) = 2^k\sqrt{a_0} > 1$$

因此我们最终总要回到(2).

(4) $\max(a_0, a_1) \geqslant 4$ 可类似证明.

70. 设 $-1 < a_0 < 1$，$a_n = \sqrt{\dfrac{1 + a_{n-1}}{2}}$，$n > 0$，当 $n \to \infty$ 时，求

$$A_n = 4^n(1 - a_n)$$

$$B_n = a_1a_2\cdots a_n$$

$$C_n = 4^n(B_n - a_1a_2\cdots a_n)$$

的极限.

(AMM E2835)

解 设 $\varphi = \arccos a_0$，并利用公式 $\cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{1+\cos x}{2}$ 我们得出 $a_n = \cos\dfrac{\varphi}{2^n}$，所以

$$A_n = 4^n(1 - a_n) = 4^n\left(\frac{\varphi^2}{2\cdot 4^n} - \frac{\varphi^4}{24\cdot 4^{2n}} + O\left(\frac{1}{4^{3n}}\right)\right) = \frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi^4}{24^n} + O\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

故 $A_n \to \dfrac{\varphi^2}{2}$.

由定义

$$\sin\frac{\varphi}{2^n}B_n = \cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}$$

反复应用公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 得出

$$B_n = \frac{\sin\varphi}{2^n\sin\left(\dfrac{\varphi}{2^n}\right)} = \frac{\sin\varphi}{\varphi} + \frac{\sin\varphi}{6\cdot 4^n} + O\left(\frac{1}{4^{2n}}\right)$$

那样 $B_n \to \dfrac{\sin\varphi}{\varphi}$，而 $C_n = -\dfrac{\varphi\sin\varphi}{6} + O\left(\dfrac{1}{4^{2n}}\right)$，因此 $C_n \to -\dfrac{\varphi\sin\varphi}{6}$.

注 如果 $a_0 > 1$,我们可用 $\operatorname{ch} x$ 和 $\operatorname{sh} x$ 代替 $\cos x$ 和 $\sin x$ 并设

$$\varphi = \ln(a_0 + \sqrt{a_0^2 - 1}) = \operatorname{ch}^{-1} a_0$$

那么类似地可求出 $A_n \to -\frac{\varphi^2}{2}$, $B_n \to \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\varphi}$ 以及 $C_n \to \frac{\varphi \operatorname{sh}\varphi}{6}$.

(AMM E2859)

71. 设由递推公式 $a_n = a_{n-1}(a_{n-1} - 1)$, $n \geqslant 2$ 定义了实数数列 $\{a_n\}$,问对初值 a_1 的那些值,此数列收敛.

解 答案是如果 $-1 \leqslant a_1 \leqslant 2$,数列收敛,否则数列单调地发散到 ∞,后一断言是显然的. 当 $a_1 = -1,0,1$ 或 2 时,收敛性可立即得出. 如果 $-1 < a_1 < 2$,收敛性是基于性质:存在某一个 n 使得 $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. 以下分几种情况分别讨论.

(1) $1 < a_1 < 2$. 这时只要 a_n 停留在区间 $1 < a_n < 2$ 中,a_n 就是严格递减的($a_{n+1} < a_n$). 这就说明 a_n 或者趋近于某一极限或者最终要进入区间$(0,1]$之中,而由于 a_n 的任何极限只能是方程 $y = y^2 - y$ 的解,即0或2. 因此第一种可能性可以排除,即 a_n 最终要进入区间$(0,1]$之中,即我们只须考虑:

(2) $0 < a_n < 1$. 如果 $0 < a_n < 1$,则 $-\frac{1}{4} < a_{n+1} < 0$. 由于 $\frac{a_n - a_{n+1}}{2a_n} = 1 - \frac{1}{2}a_n < 1$,我们首先看出 $|a_{n+1}| < a_n$. 其次我们看出递推映射把区间$\left(-\frac{1}{4},0\right)$和$(0,1)$中的每一个映入到另一个中去. 第三,由于 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 1 - 2a_n^2 + a_n^3 < 1$,我们看出如果 $0 < a_n < 1$,那么 $0 < a_{n+2} < a_n < 1$.

最后我们看出数列的奇数项必须单调地趋于0,并且数列的偶数项也必须单调地趋于某个极限,因此此数列的每个子数列都趋近于一个极限,比如说 x_0 和 y_0,而这些极限满足关系

$$x_0 = y_0^2 - y_0, y_0 = x_0^2 - x_0$$

因此 $x_0 = y_0 = 0$.

(AMM E2748)

72. 设 $f(x) = x^n \ln x$,求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$.

解 由于

$$f^{(k)}(x) = x^{n-k} n(n-1)\cdots(n-k+1) \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{n-k+1} + \ln x\right)$$

那样易于用数学归纳法证明

$$f^{(n)}\left(\frac{1}{n}\right)=n!\left(\sum_{i=1}^{n-1}i!-\ln n\right)$$

因此所求得极限就等于欧拉常数 $\gamma=0.577\cdots$.

(AMM E1978)

73. 设函数 $f(x)$ 及其直到 $n+1$ 阶导数在 $x=0$ 的邻域内都有定义并且连续. $f(0)=0$. 证明:对 $k=0,1,2,\cdots,n$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\frac{1}{k+1}f^{(k+1)}(0)$$

证法 1 由莱布尼兹公式,对 $k=0,1,2,\cdots,n$

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(f(x)\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{g(x)}{x^{k+1}}$$

其中

$$g(x)=\sum_{r=0}^{k}C_k^r(-1)^r r!\,x^{k-r}f^{(k-r)}(x)$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=0$,因此我们可以应用 l'Hopital 法则来求当 $x\to0$ 时商式的极限. $g'(x)$ 的和式中包括 $x^kf^{(k+1)}(x)$ 项,因此

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\left(f(x)\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k+1}=\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$$

证法 2 由于 $f(0)=0$,我们可令

$$\frac{f(x)}{x}=\int_0^1 f'(tx)\mathrm{d}t$$

在积分号下微分是合法的,因此

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\int_0^1 f^{(k+1)}(xt)t^k\mathrm{d}t$$

在积分号下去极限也是合法的,因此

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k\left(f(x)\cdot\frac{1}{x}\right)=\int_0^1 f^{(k+1)}(0)t^k\mathrm{d}t=\frac{f^{(k+1)}(0)}{k+1}$$

(AMM E2807)

74. 设 a 和 r 是固定的正常数,且设 $r>1$. 对每一个正整数 k,存在一个最小的正整数 $n=n(k)$ 使得 $(n+a)^k\leqslant rn^k$. 证明:当 $k\to\infty$ 时, $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{n(k)}{k}$ 存在,并求出这个极限.

证明 两个相关的结果是

(1) 如果把所给的不等式换成

$$(bn+a)^k \leqslant r(bn+c)^k, r>1, b>0, a>c\geqslant 0$$

那么当 $k\to\infty$ 时，$\frac{n(k)}{k}\to\frac{a-c}{b\ln r}$.

(2) 如果把所给的不等式换成

$$(n^2+bn+a)^k \leqslant r(n^2+bn+c)^k, r>1, b>0, a>c\geqslant 0$$

那么当 $k\to\infty$ 时，$\frac{n(k)^2}{k}\to\frac{a-c}{\ln r}$.

所问的问题显然是(1)的特殊情况.我们证明(1).从

$$(bn+a)^k \leqslant r(bn+c)^k$$

得出
$$n \geqslant \frac{a-cr^{\frac{1}{k}}}{b(r^{\frac{1}{k}}-1)}$$

那样
$$\left|\frac{n(k)}{k}-\frac{a-cr^{\frac{1}{k}}}{b(r^{\frac{1}{k}}-1)}\right| < \frac{1}{k}$$

而由 L'Hôpital 法则易得 $k(r^{\frac{1}{k}}-1)\to\ln r$，由此即可得出结果.

(AMM E2954)

> 75. 设 $f(n)$ 是对所有正整数有定义的非负的实值函数. 当 $|b-a|\leqslant\tau$(τ 是固定的)时，$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}$ 是否一定存在？

解 极限不一定存在.设 T 是2的幂的集合：$T=\{2^m \mid m=0,1,2,3,\cdots\}$. 对每个固定的 $\tau\geqslant 0$，如果距离$(n,T)\leqslant\tau$，定义 $f_\tau(n)=n$，否则为零.显然

$$\liminf_{\tau}\frac{f_\tau(n)}{n}=0, \limsup_{\tau}\frac{f_\tau(n)}{n}=1$$

假设对某个 a,b 有

$$|a-b|\leqslant\tau \qquad (*)$$

而
$$f_\tau(a+b)>f_\tau(a)+f_\tau(b)$$

这意味着或者 $f_\tau(a)=0$，或者 $f_\tau(b)=0$. 比如说 $f_\tau(a)=0$，那么对某个正整数 m

$$2^{m-1}+\tau<a<2^m-\tau$$

由此得出
$$2^m+\tau<a+(a-\tau)\leqslant a+b\leqslant a+(a+\tau)<2^{m+1}-\tau$$

这迫使 $f_\tau(a+b)=0$. 因而$(*)$是不可能的.

(AMM E2787)

> 76. 证明：如果 $k\geqslant 3$，那么方程$(\ln x)^k=x$，$x\geqslant 1$ 只有两个解 r_k 和 s_k，其中当 $k\to\infty$ 时，$r_k\to e$，而 $s_k\to\infty$.

证明 设 $t=\ln x$，并考虑等价的方程 $\frac{1}{k}=\frac{\ln t}{t}=F(t)$. 注意 $F'=\frac{1-\ln t}{t^2}$，因此 $f(t)$ 在 $(0,e)$ 上是单调递增的而在 $t>e$ 时是递减的. 由于 $F(1)=0$，$F(e)=\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$ 以及当 $t\to\infty$ 时，$F\to 0$，因此方程恰有两个解. 由于当 $k\to\infty$ 时，$F(t)\to 0$，所以 $t\to 1$ 或 ∞，那样 $x\to e$ 或 ∞.

77. 设 P 是一个把 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 分成两个不相交的集合 $a_1<a_2<\cdots<a_n$ 和 $b_1<b_2<\cdots<b_n$ 的分划. 设 M_k 表示 $a_i-b_j=k$，$-2n<k<2n$ 的解的数目，并令 $M(n)=\min\limits_{P}\max\limits_{k} M_k$. Selfridge，Motzkin 和 Ralston 已证明 $\liminf\frac{M(n)}{n}\leqslant 0.4$，而 Moser 已证明 $\limsup\frac{M(n)}{n}\geqslant 0.357$. 证明：极限 $\lim\frac{M(n)}{n}$ 确实存在. (AMM E6428)

证明 设 $M^*=\liminf\frac{M(n)}{n}$，$\delta>0$ 并选择 n 使得

$$\frac{M(n)}{n}\leqslant M^*+8$$

如果对 n 的最优分划 P 由 (a_i)，(b_j) 给出. 我们考虑由 (ra_i+h)，$1\leqslant i\leqslant n$，$0\leqslant h<r$ 和 (rb_j+h')，$1\leqslant j\leqslant n$，$0\leqslant h'<r$ 所给出的 $\{1,2,\cdots,2nr\}$ 的分划 P'. 这个分划的使得距离等于 k 的元素的数目就等于 $(ra_i+h)-(rb_j+h')=k$ 的解的数目. 易于看出，这个解数有上界 $rM(n)$.

这就证明了 $M(rn)\leqslant rM(n)$，因此

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{M(rn)}{rn}\leqslant M^*+\delta$$

由于

$$M(rn+h)\leqslant M(rn)+h$$

所以我们也有

$$\limsup\frac{M(n)}{n}\leqslant M^*+\delta$$

这就证明了结论.

(AMM E3276)

78. 设 $x_1=1, x_{n+1}=x_n+\frac{1}{x_n}, n\geqslant 1$. 证明

(1) $\sqrt{2n}<x_n<\sqrt{2n+\frac{1}{2}\ln n}$.

(2) 设 $G(n)=2n+\frac{1}{2}\ln n-x_n^2$, 证明: $G(n)$ 存在最大值和最小值, 并求出这些值.

(3) 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}G(n)$ 存在.

证明 (1) 易用数学归纳法证明.

(2) (3) $G(n)$ 的最大值和最小值分别是 $G(1)=1$ 和 $G(13)\approx 0.2671$. 计算表明, 当 n 从 1 跑到 13 时, $G(n)$ 递减, 然而 $G(13)<G(14)$. 我们将证明当 n 从 14 跑到 ∞ 时, $G(n)$ 递增但是有界, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}G(n)$ 存在.

我们将使用数学归纳法去证明更特殊的结果, 即当 $n\geqslant 14$ 时

$$0<G(13)<G(14)<\cdots<G(n)<G(13)+\sum_{k=13}^{n-1}\frac{\ln k}{8k^2}$$

当 $n=14$ 时, 由直接计算可以验证

$$0<G(13)<G(14)<G(13)+\frac{\ln 13}{8\cdot 13^2}$$

因此命题对 $n=14$ 成立.

现在假设命题对正整数 n 成立.

首先注意 $x_{n+1}^2=x_n^2+2+\frac{1}{x_n^2}$ 蕴含

$$G(n+1)-G(n)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n+\frac{1}{2}\ln n-G(n)}$$

由于

$$G(13)+\sum_{k=13}^{\infty}\frac{\ln k}{8k^2}<G(13)+\int_{12}^{\infty}\frac{\ln x}{8x^2}\mathrm{d}x=$$

$$G(13)+\frac{\ln 12+1}{96}<0.305$$

因此归纳法假设给出

$$\frac{1}{2}\ln n-G(n)>\frac{1}{2}\ln 14-0.305>1$$

那样由上面的 $G(n+1)-G(n)$ 的表达式就得出

$$G(n+1)-G(n)>\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n+1}>0$$

另一方面, 由上式和归纳法又得出 $G(n)>0$, 因此再次由上面的 $G(n+1)-G(n)$ 的表达式就得出

$$G(n+1)-G(n)<\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n+\frac{1}{2}\ln n}<$$

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+\frac{1}{2}\ln n}<\frac{\ln n}{8n^2}$$

因此 $$0<G(13)<G(14)<\cdots<G(n)<$$

$$G(n+1)<G(13)+\sum_{k=13}^{n}\frac{\ln k}{8k^2}$$

这就说明命题对正整数 $n+1$ 也成立，因而由数学归纳法就证明了当 $n\geqslant 14$ 时命题成立.这就是说，当 $n\geqslant 14$ 时，$G(n)$ 递增但是有界，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}G(n)$ 存在.

(AMM 6379)

79. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin n|^{\frac{1}{n}}$.

解 设 $m>1$ 和 $|n-m\pi|<\frac{\pi}{2}$，那么 $m<n$ 并且根据 K. Mahler, On the approximation of π, Indag. Math., 15(1953), 30-42 中的结果 $|n-m\pi|>\frac{1}{m^{41}}$，因此就有

$$1>|\sin n|=|\sin(n-m\pi)|>\frac{2}{\pi}|n-m\pi|>\frac{2}{\pi n^{41}}$$

由此即可得出结果.

80. 设 $\psi(x)=\sum\limits_{p^a\leqslant x}\ln p$，其中 p 是素数，a 是正整数，证明

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\leqslant 1,\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}\geqslant 1$$

(N. Costa Pereira, A short proof Chebyshev's theorem, AMM Vol. 92(1985), No. 7, 494)

证明 我们将应用以下初等结果

$$\ln n!=\sum_{k\geqslant 1}\psi\left(\frac{n}{k}\right) \qquad ①$$

$$\ln n!=n\ln n+O(n) \qquad ②$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+O(1) \qquad ③$$

设 m 是任意大于 1 的整数，n 是任意大于 m 的整数.由 ① 得出

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{1}{k} \frac{\psi\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}} \leqslant \frac{\ln n!}{n} \leqslant \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{1}{k} \frac{\psi\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}} + \sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n} \frac{1}{k} \frac{\psi\left(\frac{n}{k}\right)}{\frac{n}{k}} \quad ④$$

定义 $L_m^- = \inf\limits_{x \geqslant m} \frac{\psi(x)}{x}, L_m^+ = \sup\limits_{x \geqslant m} \frac{\psi(x)}{x}, \lambda_m = \sup\limits_{1 \leqslant x \leqslant m} \frac{\psi(x)}{x}$

由 ④ 得出

$$L_m^- \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{1}{k} \leqslant \frac{\ln n!}{n} \leqslant L_m^+ \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{m}\right]} \frac{1}{k} + \lambda_m \sum_{k=\left[\frac{n}{m}\right]+1}^{n} \frac{1}{k}$$

从 ③ 和 ④ 得出

$$L_m^-(\ln n - \ln m + O(1)) \leqslant \ln n + O(1) \leqslant L_m^+(\ln n - \ln m + O(1)) + \lambda_m(\ln m + O(1))$$

因此我们有 $\qquad L_m^- \leqslant \dfrac{\ln n + O(1)}{\ln n - \ln m + O(1)}$

以及 $\qquad L_m^+ \geqslant \dfrac{\ln n + O(1) - \lambda_m(\ln m + O(1))}{\ln n - \ln m + O(1)}$

由于上面的两个不等式对所有大于 m 的整数 n 和有限的 λ_m 都有效，因此

$$L_m^- = \inf_{x \geqslant m} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant 1, L_m^+ = \sup_{x \geqslant m} \frac{\psi(x)}{x} \geqslant 1$$

当 $m \to \infty$ 时就得到所要的结果.

(AMM E3200)

81. 设(1)$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots, a_n \to \infty$;

(2) $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_n} \to \infty$.

又设 $N(x) = \sum\limits_{a_n < x} 1$，证明：当 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{N(x)}{\ln x} \to \infty$.

证法 1 设 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，那么由于当 $x > 1$ 时，$\ln x < x - 1$. 因此对任意 $\varepsilon > 0$，必存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 时，有

$$\ln S_n - \ln S_{n-1} < \frac{S_n - S_{n-1}}{S_{n-1}} < \varepsilon$$

以及 $\qquad \ln S_n - \ln S_N < \varepsilon(n - N)$

因此当 $n > N$ 时，有 $S_n < ce^{\varepsilon n}$，其中 $c = c(\varepsilon)$. 给定 $x >$

$ce^{\varepsilon N}$，可确定一个 n 使得 $ce^{\varepsilon n} < x \leqslant ce^{\varepsilon(n+1)}$，那样 $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\ln\frac{x}{c} - 1$，并且由于 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < S_n < x$，故 $N(x) \geqslant n$. 因此当 $x > X(\varepsilon)$ 时，$\frac{N(x)}{\ln x} > \frac{1}{2\varepsilon}$，从而当 $x \to \infty$ 时，$\frac{N(x)}{\ln x} \to \infty$.

证法2 设 $N(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是不减的，则

$$A(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t\,\mathrm{d}N(t)$$

那么我们断言

$$\varliminf_{x\to\infty} A(x) \leqslant \varliminf_{x\to\infty} \frac{N(x)}{\ln x} \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} \frac{N(x)}{\ln x} \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} A(x)$$

为证明上式，我们有

$$\int_0^y \frac{A(x)}{x}\mathrm{d}x = \int_0^y t\,\mathrm{d}N(t)\int_t^y \frac{\mathrm{d}x}{x^2} =$$

$$\int_0^y \mathrm{d}N(t)\left(1 - \frac{t}{y}\right) = N(y) - A(y)$$

如果对所有的 $x \geqslant x_0$，$A(x) > \lambda$，那么

$$\int_0^y A(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} > \lambda\ln\frac{y}{x_0}, y > x_0$$

由上式可知当 $y \to \infty$ 时，$N(y) > \lambda\ln y + O(1)$，这就证明了最左边的不等式. 为了证明最右边的不等式，我们可设 $\varlimsup_{x\to\infty} A(x) < \infty$. 如果对所有的 $x \geqslant x_1$，$A(x) < \mu$，那么上式蕴含当 $y \to \infty$ 时

$$N(y) > \mu\ln\frac{y}{x_1} + O(1)$$

这就完成了证明.

为了作为一个特殊情况而获得所要证的结果，设 $N(t) = k$，$a_k \leqslant t < a_{k+1}$，$k = 0, 1, \cdots$，那么 $A(t) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{t}$，问题的条件是 $A(a_k) \to \infty$. 由于

$$A(a_{k+1}) - 1 = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{a_{k+1}} \leqslant$$

$$A(t) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{t} \leqslant$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{a_k} \leqslant A(a_k)$$

这就得出 $A(t) \to \infty$，利用开始时所示的上下极限的不等式就可得出 $\frac{N(x)}{\ln x} \to \infty$.

注 Bennett 注意到无需假设叙列是递增的，只要 $a_n \to \infty$ 和 $\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{a_n} \to \infty$ 即可保证结果成立.

(AMM E2755)

> 82. 设 $f \in C^\infty(R)$，并设当 $x \to \pm\infty$ 时，$f(x) = o(x^n)$. 证明：当 $r \geqslant n+1$ 时，$f^{(r)}$ 必有零点. 这一结论是否是最好的?

证明 由于假设蕴含对任意 $k \geqslant n$ 有 $f(x) = o(x^k)$，我们只须证明 $f^{(n+1)}(x)$ 有零点即可.

假设 $f^{(n+1)}(x)$ 没有零点，那么 $f^{(n)}(x)$ 是严格单调的函数并且因此至多有一个零点. 如果 $f^{(n)}(x)$ 没有零点，设 $x_0 = 0$，如果 $f^{(n)}(z_0) = 0$，设 $x_0 = z_0 + 1$，那么由带余项的泰勒定理可知对任意 $x > x_0$，存在 $c = c(x) > x_0$ 使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(c)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

由于 $f(x) = o(x^n)$，这就得出当 $x \to +\infty$ 时，$f^{(n)}(c(x)) \to 0$. 由于 $f^{(n)}(x)$ 是严格单调的函数以及 $c(x) > z_0 + 1$，这就得出 $c(x) \to +\infty$. 因此当 $x \to +\infty$ 时，$f^{(n)}(x) \to 0$. 同理可证当 $x \to -\infty$ 时，$f^{(n)}(x) \to 0$. 但这对严格单调函数是不可能的，因此 $f^{(n+1)}(x)$ 必存在零点. 例子

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{t_1}\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}} e^{-t_n^2}dt_1dt_2\cdots dt_n$$

表明对 $0 \leqslant k \leqslant n$，$f^{(k)}(x)$ 可以没有零点.

(AMM E2756)

> 83. 设 $f \in C^\infty(R)$，$f(0)f'(0) \geqslant 0$ 并且当 $x \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$. 证明：存在叙列 $0 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots$ 使得对 $n = 1, 2, \cdots$ 有 $f^{(n)}(x_n) = 0$.

证明 我们只须证明

(1) 对某个 $x_1 \geqslant 0$，$f'(x_1) = 0$.

(2) 如果 $f^{(k)}(t) = 0$，那么对某个 $s > t$，$f^{(k+1)}(s) = 0$.

那么显然问题即已得证.

(1) 的证明：考虑集合 $\{x \geqslant 0, f'(x) \neq 0\}$，那么必有 $f'(x) > 0$ 或者 $f'(x) < 0$. 在第一种情况下由于 $f(0)f'(0) \geqslant 0$，故 $f(0) \geqslant 0$，并且 $f(x)$ 是递增的，在第二种情况中 $f(0) \leqslant 0$，并且 $f(x)$ 是递减的. 在这两种情况中都不可能成立 $f(x) \to 0$.

(2)的证明:假设对 $s > t$,$f^{(k+1)}(s) \neq 0$,那么 $f^{(k+1)}(s)$ 必是正的或者是负的.如果它是正的,那么当 $s > t$ 时,$f^{(k)}(s)$ 是严格递增的,因此由于 $f^{(k)}(t) = 0$,故必有 $s \geqslant t_1 > t$,使得 $f^{(k)}(s) \geqslant \delta > 0$.积分 k 次后,我们得出对 $s \geqslant t_1$ 有 $f(s) \geqslant \frac{\delta s^k}{k!} + p(s)$,其中 $p(s)$ 是一个 $k-1$ 次的多项式,这与 $f(x) \to 0$ 矛盾.类似的,如果对 $s > t$,$f^{(k+1)}(s) < 0$,则对某个 $c > 0$,我们有 $f(s) < -cs^k + p(s)$,其中 $p(s)$ 的意义与前面一样,这仍与 $f(x) \to 0$ 矛盾.

(AMM E1593)

84. 设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 是任意多项式,k 是任意常数,而 $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 表示微分算子.证明:

$$P(D)[e^{kx}Q(x)]|_{x=0} = Q(D)[P(x)]|_{x=k}$$

证明 由于要证的式子的两边对于 P 和 Q 都是线性的,因此我们只须对单项式加以证明即可.而利用对 n 的归纳法容易验证

$$D^n(e^{kx}x^m)|_{x=0} = m!C_n^m k^{n-m} = D^m(x^n)|_{x=k}$$

由此即可得出结论.

(AMM E1670)

85. 设 $P(x)$ 和是任意多项式,$D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 表示微分算子.证明:

$$e^D P(x) = P(ex)$$

解 由算子 D 的线性性易于得出算子 e^D 的线性性,因此我们只须对单项式 x^k 加以证明即可,其中 k 是任意非负整数.易于用数学归纳法证明 $D^n(x^k) = k^n x^k$(k 和 n 是任意非负整数),因此

$$e^D(x^k) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}\right)x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!}x^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n x^k}{n!} = e^k x^k = (ex)^k$$

由此即可得出结论.

(AMM E1807)

86. 设 $p(x)$ 是一个 n 阶多项式,$p^{(0)}(x) = p(x)$,其中 $p^{(0)}(x)$ 表示 $p(x)$ 的 0 阶导数.证明:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{p^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

证明 设

$$M=\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1},N=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{p^{(k)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

则
$$M(0)=N(0)=0$$

又
$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^{k}=p(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{p^{(k)}(x)}{k!}x^{k}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{p^{(k+1)}(x)}{(k+1)!}x^{k+1}=$$

$$p(x)+(-1)^{n}\frac{p^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}x^{n+1}=p(x)$$

由上面的式子显然就得出 $M=N$.

注 Bell 注意到,对任意正整数 r 和 n 阶多项式 $p(x)$,成立下面的更一般的结果

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{p^{(k)}(0)}{(k+r)!}x^{k+r}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{C_{k+r-1}^{r-1}}{(k+r)!}p^{(k)}(x)$$

87. 确定[0,1]中的最小的闭子区间$[a,b]$,使得$[a,b]$具有性质:如果 p 是一个次数至多为 6 的在$[a,b]$上递增的多项式,则必有 $p(1)\geqslant p(0)$. (AMM 6449)

解 答案是 $a=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{15}}{10},b=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{15}}{10}$.

假设 p 是一个次数至多为 6 的在$[a,b]$上递增的多项式,那么

$$p'(a)\geqslant 0,p'\left(\frac{1}{2}\right)\geqslant 0,p'(b)\geqslant 0$$

由于 $\deg p'\leqslant 5$,我们可以使用[0,1]上的勒让德 - 高斯(Legendre-Gauss)求积公式而得出

$$p(1)-p(0)=\int_{0}^{1}p'(x)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{18}\left(5p'(a)+8p'\left(\frac{1}{2}\right)+5p'(b)\right)\geqslant 0$$

现在假设在[0,1]中存在一个更短的具有同样性质的闭子区间$[c,d]$,那么 $a<c$ 或 $d<b$. 考虑 $a<c$ 的情况(另一种情况可以类似处理). 设

$$p'(x)=(x-c)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2}(x-b)^{2}$$

显然 $p'(a)<0$,同时在$[c,d]$上 $p'(x)\geqslant 0$. 应用和上面一样的求积公式,我们有

$$p(1)-p(0)=\int_0^1 p'(x)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{18}\left(5p'(a)+8p'\left(\frac{1}{2}\right)+5p'(b)\right)=$$
$$\frac{5p'(a)}{18}<0$$

矛盾.

(AMM E2580)

88.证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-2\sqrt{x}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right]=-n\prod_{k=1}^{n-2}\left(a-2\sqrt{x}\cos\frac{k\pi}{n-1}\right)$$

证明 切比雪夫多项式 T_n 和 U_{n-2} 由下式给出

$$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\cos\theta-\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}\right)$$

$$\frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta}=U_{n-2}(\cos\theta)=2^{n-2}\prod_{k=1}^{n-2}\left(\cos\theta-\cos\frac{k\pi}{n-1}\right)$$

那样

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(a-2\sqrt{x}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)=2(\sqrt{x})^nT_n\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$\prod_{k=1}^{n-2}\left(a-2\sqrt{x}\cos\frac{k\pi}{n-1}\right)=(\sqrt{x})^{n-2}U_{n-2}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}\right)$$

令 $z=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$,那么要证的等式就成为

$$nT_n(z)-zT'_n(z)=-U_{n-2}(z)$$

但是从切比雪夫多项式 T_n 和 U_{n-2} 的定义和

$$\sin(n-1)\theta=\sin n\theta\cos\theta-\cos n\theta\sin\theta$$

即可得出上式.

(AMM E2971)

89.求常微分方程 $y'''=y'(3y''^2-y'''y')$ 的解曲线.

解 所给的微分方程可以写成

$$\frac{y'''(1+y'^2)-3y'y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{5}{2}}}=0$$

左边显然是解曲线的曲率 $K=\dfrac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 的导数,因此 K 是一个常数,因而解曲线是直线和平面上的圆以及例外解 $x=$ 常数.

90. 计算$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}$.

解 对 $x>0$,设

$f_n(x)=$

$$\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n-1)\sqrt{1+(x+n)}}}}$$

显然 $f_n(x)$ 关于 n 是递增的

$x+1=\sqrt{1+x(x+2)}=$

$\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)(x+3)}}=\cdots=$

$\sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+\cdots+(x+n-1)(x+n+1)}}}>$
$f_n(x)$

因此 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在,并且 $f(x)\leqslant x+1$,此外还有

$$f(x)>\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{1+x\sqrt{\cdots}}}}=\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}>x$$

设 $\delta(x)=x+1-f(x)$,因而 $0\leqslant\delta(x)<1$. 容易导出函数方程

$$f^2(x)=1+xf(x+1)$$

由此方程得出

$$(x+1+f(x))\delta(x)=\delta(x+1)$$

因而

$$0\leqslant\frac{\delta(x)}{x}\leqslant\frac{\delta(x+1)}{x+1}\leqslant\cdots\leqslant\frac{\delta(x+n)}{x+n}<\frac{1}{x+n}\to 0$$

因此 $f(x)=x+1$,最后就得出我们所要求的式子的值是 $f(2)=3$.

(AMM E1428)

91. 计算:$\prod\limits_{0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]$.

解法1 $\prod\limits_{0}^{n}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k}\right]=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right]$

因此 $$\prod_{0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]=2$$

解法2 对 $|z|<1$

$$\prod_{0}^{\infty}(1+z^{2^{n}})=\sum_{0}^{\infty}z^{n}=\frac{1}{1-z}$$

(AMM 4905)

92. 研究极限 $\lim\limits_{x\to 1-0}(1-x)^{\frac{1}{2}}\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{4^{n}})$ 是否存在?

解 不存在.设 $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}\prod\limits_{n=0}^{\infty}(1+x^{4^{n}})$,则从等式

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\prod_{n=0}^{\infty}(1+x^{2^{n}})$$

可以得出

$$f(x)(x^{2})=(1+x)^{\frac{1}{2}} \quad ①$$

同时可以验证

$$\frac{f(x)}{f(x^{4})}=\left(\frac{1+x}{1+x^{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ②$$

如果 $L=\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)$ 存在,则从①得出 $L^{2}=\sqrt{2}$,因此 $L=\sqrt[4]{2}$.

另一方面,设 $d=0.999\ 976\ 974\ 4$,那么 $\log d=-0.000\ 01$,$\log f(d)>0.76>\frac{\log 2}{4}$,因此 $f(d)>\sqrt[4]{2}$.现在由②可知 $0<x<1$ 蕴含 $f(\sqrt[4]{2})>f(x)$.那样对叙列

$$x_{1}=d,x_{2}=d^{\frac{1}{4}},\cdots,x_{n+1}=x_{n}^{\frac{1}{4}},\cdots,x_{n}<1$$

我们有 $\sqrt[4]{2}<f(x_{1})<f(x_{2})<\cdots<f(x_{n})<\cdots$

这说明 $\sqrt[4]{2}$ 不可能是极限,所以所说的极限不可能存在.

此题 log d 可以算做是以10为底,但是从解答所给的数据来看应该只是一个近似于10的底,因为如果设所用的底是 a,就有

$$\log_{a}0.999\ 976\ 974\ 4=-0.000\ 01$$

$$a^{-0.000\ 01}=0.999\ 976\ 974\ 4$$

$$a=10.000\ 022\ 547\ 897\ 55$$

因此真正的底就是上面这个数,但是这么写太麻烦,因此没有写出来,其实取任何数为底,从

$$\log_{a}f(d)>\frac{1}{4}\log_{a}2$$

都可以得出 $f(d)>\sqrt[4]{2}$,所以这个底没必要明确写出来,总之是存在这样一个底,log 就是这个意思,就是取一下对数,用什么当底都可以.

93. 设 F_{n} 表示第 n 个斐波那契数,即 $F_{0}=0,F_{1}=1$ 以及当 $n\geqslant 2$ 时,$F_{n}=F_{n-1}+F_{n-2}$.证明

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{F_{2n}+1}{F_{2n}-1}=3$$

(MathematicsMagazine Vol.80(2007),No 5.1758,395-396)

证明 设 L_{n} 表示第 n 个卢卡斯数,即 $L_{0}=2,L_{1}=1$ 并且对 $n\geqslant 2,L_{n}=L_{n-1}+L_{n-2}$,那么用数学归纳法可证明以下一组恒等式

$$F_{2n}=F_{n}L_{n},F_{2n+1}-F_{n}L_{n+1}=(-1)^{n}$$

$$F_{2n+1}-F_{n+1}L_{n}=(-1)^{n+1}$$

$$F_{2n}-F_{n-1}L_{n+1}=(-1)^{n+1}$$

$$F_{2n}-F_{n+1}L_{n-1}=(-1)^{n}$$

对乘积中的因子应用上面最后两个恒等式,我们发现 $\prod_{n=2}^{N}\frac{F_{2n}+1}{F_{2n}-1}$ 当 N 是偶数时就等于

$$\frac{F_1L_2}{F_2L_1}\cdot\frac{F_NL_{N+1}}{F_{N+1}L_N}$$

而当 N 是奇数时就等于

$$\frac{F_1L_2}{F_2L_1}\cdot\frac{F_{N+1}L_N}{F_NL_{N+1}}$$

由于

$$\lim_{N\to\infty}\frac{F_{N+1}}{F_N}=\lim_{N\to\infty}\frac{L_{N+1}}{L_N}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

这就得出所给的无穷乘积收敛到 $\frac{F_1L_2}{F_2L_1}=3$.

(AMM E2921)

94. 设 a,b 是任意复数,计算

$$r(a,b)=\limsup_{n\to\infty}|a^n-b^n|^{\frac{1}{n}}$$

解 如果 $a=b$,显然 $r(a,b)=0$,如果 a 或 b 之中有一个为零,比如说 $b=0$,那显然 $r(a,b)=|a|$.因此不妨设 $|a|\geqslant|b|$,并且 a,b 都不为零.这时

$$r(a,b)=|a|\limsup_{n\to\infty}\left|1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right|^{\frac{1}{n}}$$

如果 $|a|>|b|$,则由上式看出 $r(a,b)=|a|$.

如果 $|a|=|b|$,则我们可设 $\frac{b}{a}=e^{i\theta}$,因而只要 $e^{in\theta}$ 不落在介于 $-\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 之间的扇形中,就有

$$2\geqslant\left|1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right|=|1-e^{in\theta}|=(2-2\cos n\theta)^{\frac{1}{2}}\geqslant 1$$

由于这个区域包括了多半个单位圆,那么除非 $\theta=0$,即 $a=b$,否则将有无穷多个 n 使上式成立,由此即可得出

$$r(a,b)=\max(|a|,|b|)$$

95. 设在区间 $I:[a,b]$ 上,$f(x)$ 是连续的,$g(x)$ 是可微的,$g(a)=0$,$\lambda\neq 0$ 是一个常数,如果在 I 上

$$|g(x)f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant g(x)$$

那么在 I 上,$g(x)=0$.

证明 f 只须是有界的即可.

如果 g 不恒等于0,那么就存在一个 (a,b) 的子区间 $(\bar{a},\bar{b})$ 使得 g 在 $(\bar{a},\bar{b})$ 上不等于0并且 $g(\bar{a})=0$.那么在 $(\bar{a},\bar{b})$ 上所给的

不等式就蕴含

$$\left|f(x)+\frac{\lambda g'(x)}{g(x)}\right|\leqslant 1$$

设 $h(x)=\ln|g(x)|$，那么 $|f(x)+\lambda h'(x)|\leqslant 1$. 但是 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=-\infty$，由于 $(\bar{a},\bar{b})$ 是有限区间，这就得出 $h'(x)$ 是无界的，这和 f 的有界性矛盾.

96. 设 $F_{n+1}(x)=F(F_n(x))$，$n=0,1,2,\cdots$，其中 $F_0(x)=x$，$F(x)=4x-4x^2$，求积分

$$\int_0^1 F_n(x)\mathrm{d}x$$

的值.(The Mathematical Intelligencer Vol.7(1985), No.4, 39)

解 设 $x=\sin^2\theta$，则

$$F(x)=4(1-\sin^2\theta)\sin^2\theta=\sin^2 2\theta$$

由数学归纳法可证 $F_n(x)=\sin^2(2^{n+1}\theta)$，因而

$$\int_0^1 F_n(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2^{n+1}\theta)\sin 2\theta\mathrm{d}\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin(2^{n+1}+1)\theta-$$

$$\sin(2^{n+1}-1)\theta]\mathrm{d}\theta=\frac{2^{2n-1}}{2^{2n}-1}$$

(AMM 10422)

97. 设 $f:[0,1]\to R$ 是 C^1 类函数，$f(1)=L$，其中 L 是 f 的图像的长度. 证明：

(1) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{\pi}{4}$.

(2) 当且仅当 f 的图像是四分之一圆周时，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

证明 (1) 由部分积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$$

由于 $$f(1) = L = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

我们就得出 $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\sqrt{1+z^2} - xz)dx$$

其中 $z = f'(x)$.

对任意正实数 a,b 有

$$(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2 = (b-1)(1-a) + (1-\sqrt{ab})^2$$

因此如果 $b \geqslant 1 \geqslant a \geqslant 0$,则

$$\sqrt{b}-\sqrt{a} \geqslant \sqrt{b-1}\sqrt{1-a}$$

等号仅在 $ab = 1$ 时成立. 令 $b = 1+z^2, a = 1-x^2$ 就得出

$$\sqrt{1+z^2} - \sqrt{1-x^2} \geqslant xz$$

等号仅在$(1+z^2)(1-x^2) = 1$时或 $z = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 时成立. 因而上面的式子就蕴含

$$\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$$

(2) 上式的等号仅在对所有的 $x \in [0,1], z = f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 时成立,解此微分方程即可得出 $f(x) = C - \sqrt{1-x^2}$,即 $y = f(x)$ 的图像是一个四分之一圆周. 此外,由于 $f(1) = L$,我们必须有 $C = \dfrac{\pi}{2}$.

注 本题给出了等周不等式的一种初等证明(既不使用变分法和傅里叶(Fourier)分析的方法).

98. 设 $f'(x)$ 在$[0,1]$上连续并且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明:
$$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > 4.$$
(AMM E1205)

证明 由罗尔(Rolle)定理,存在点(X,Y),使得当 $x = X$ 时,$|f(x)|$ 取得极大值 Y. 又由平均值定理,存在两个横坐标 a, b 使得

$$0 < a < X < b < 1, f'(a) = \frac{Y}{X}, f'(b) = -\frac{Y}{1-X}$$

那样 $$\int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx > \int_0^1 \left|\frac{f''(x)}{Y}\right| dx > \frac{\int_a^b f''(x)dx}{|Y|} =$$

$$\frac{|f'(b)-f'(a)|}{|Y|}=\frac{1}{X(1-X)}\geqslant 4$$

通过下面的例子可知所给的不等式已不可能再改进.

我们考虑一个函数 $f(x)$. 在 $\left[0,\frac{1}{2}-\varepsilon\right]$ 上 $f(x)=x$, 在 $\left[\frac{1}{2}+\varepsilon,1\right]$ 上 $f(x)=1-x$, 并且在 $[0,1]$ 上, $f''(x)\leqslant 0$, 那么我们就有

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x<\frac{4}{1-2\varepsilon}$$

因此对任何大于 4 的常数, 都存在着对此常数不等式不成立的反例.

99. 证明: 如果 $f(x)\geqslant 0$ 是凸的, 那么

$$\int_0^\infty f^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{2}{3}\max f\int_0^\infty f\mathrm{d}x$$

其中 $\frac{2}{3}$ 是最佳常数.

(AMM 4954)

证明 本题的结果是下面的更一般的命题的特例

$$\int_0^\infty f^{\alpha+\beta}(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1}\max f^\alpha\int_0^\infty f^\beta(x)\mathrm{d}x$$

而上面这个命题又是下面的更一般的命题的特例.

设 f 是正, 凸的, 又设 F, L 在 $[0,\infty)$ 上递增, 绝对连续, $F(0)=0, G=F\cdot L$, 那么

$$\int_0^\infty G'(f(x))\mathrm{d}x\leqslant L(\max f)\int_0^\infty F'(f(x))\mathrm{d}x$$

如果 $F'(0)=0$, 对 $x>0, F'(x)>0$, 那么当且仅当对某个 $a, b>0$ 有

$$f(x)=\begin{cases}b\left(1-\dfrac{x}{a}\right), & 0\leqslant x\leqslant a\\ 0, & x>a\end{cases}$$

时, 有限的等式成立.

为证明这一结果, 我们有

$$F(f(t))=-\int_t^\infty F'(f(u))f'(u)\mathrm{d}u\leqslant -f'(t)\int_t^\infty F'(f(u))\mathrm{d}u$$

将上式两边乘以 $L'(f(t))$ 然后加上 $L(f(t))F'(f(t))$ 就得出

$G'(f(t))=L(f(t))F'(f(t))+L'(f(t))F(f(t))\leqslant$

$$L(f(t))F'(f(t)) - L'(f(t))f'(t)\int_t^{\infty}F'(f(u))\mathrm{d}u$$

两边从 0 到 ∞ 积分得出

$$\int_0^{\infty}G'(f(t))\mathrm{d}t \leqslant -\int_0^{\infty}(L(f(t))\int_t^{\infty}F'(f(t_1))\mathrm{d}t_1)'\mathrm{d}t \leqslant$$

$$L(\max f)\int_0^{\infty}F'(f(t))\mathrm{d}t$$

(AMM E2211)

100. 证明:(1) 对 $x>0$, $\int_x^{x+1}\sin^2 t\ \mathrm{d}t < \frac{1}{x}$,并证明这是最好可能的结果,即

(2) $\limsup\limits_{x\to\infty}\left|x\int_x^{x+1}\sin^2 t\ \mathrm{d}t\right| = 1$.

证明 (1) 由分部积分得出

$$\int_x^{x+1}\sin^2 t\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t^2}{2t}\right]\Bigg|_x^{x+1} - \frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\sin t^2}{t^2}\mathrm{d}t$$

因此

$$\left|\int_x^{x+1}\sin^2 t\mathrm{d}t\right| < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+\frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{x}$$

(2) 任给 $\varepsilon>0$,存在一个任意大的 x,使得

$$\cos x^2 > 1-\varepsilon, \cos(x+1)^2 < -1+\varepsilon$$

由此从(1)中的

$$\int_x^{x+1}\sin^2 t\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t^2}{2t}\right]\Bigg|_x^{x+1} - \frac{1}{2}\int_x^{x+1}\frac{\sin t^2}{t^2}\mathrm{d}t$$

式即得出

$$\left|\int_x^{x+1}\sin^2 t\mathrm{d}t\right| > \frac{1-\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

因而
$$\left|x\int_x^{x+1}\sin^2 t\mathrm{d}t\right| > (1-\varepsilon)+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

由于 ε 是任意的并且 x 可以任意大,所以就得出

$$\limsup_{x\to\infty}\left|x\int_x^{x+1}\sin^2 t\mathrm{d}t\right| \geqslant 1$$

为证明上面所说的 x 的存在性,我们证明对任意 $\delta>0$,可以求出正整数 m,n 使得 $|x_n^2-2m\pi|<\delta$,其中 $x_n=\frac{1}{2}((2n+1)\pi-1)$.

对任意 n，设 $y_n = \frac{((2n+1)\pi-1)^2}{8\pi} = \frac{4x_n^2}{8\pi} = \frac{x_n^2}{2\pi}$，我们证明 y_n 的分数部分可以任意小. 为此，设 h 是任意一个固定的正整数，我们有

$$z_n = y_{n+h} - y_n = nh + \frac{1}{2}h[(h+1)\pi - 1]$$

z_n 是一个固定的无理数，而集合 $\{z_n\}$ 是一致分布的，因而由 Corput 定理可知 $\{y_n\}$ 也是一致分布的，(Acta. Math, 56(1931), 373) 这就证明了 y_n 的分数部分可以任意小.

(AMM E2216)

101. 两个积分 $\int_0^1 x^x \mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，那个是较大者?

解 利用替换 $xy = u$ 可以把第二个积分写成

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{u^u}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}u = -\int_0^1 u^u(\ln u)\mathrm{d}u$$

由于 $\int_0^1 u^u(1+\ln u)\mathrm{d}u = u^u\Big|_0^1 = 0$，因此所给的两个积分是相等的.

注 J. Gillis 证明了下面的更一般的结果：定义

$$I_n = \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 (x_1x_2\cdots x_n)^{x_1x_2\cdots x_n}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

那么 $I_1 = I_2 < I_3 < I_4 < \cdots$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$. Klein 报告了 I_3 的计算值是 0.783 430 51….

(AMM 5278)

102. 证明：(1) $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln^2 x\mathrm{d}x = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$.

(2) $K - \frac{5}{2} < \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln^3 x\mathrm{d}x < K - \frac{9}{4}$.

其中 $K = -\gamma\left(\gamma^2 + \frac{\pi^2}{2}\right)$，$\gamma$ 是欧拉常数.

证明 $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}x^{z-1}\mathrm{d}z$，$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln^2 x\mathrm{d}x = \Gamma''(1)$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\ln^3 x\mathrm{d}x = \Gamma'''(1)$$

从 $$\ln\Gamma(z)=-\gamma z-\ln z+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n}-\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)\right)$$
我们得出
$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\gamma-\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+z}\right),\Gamma'(1)=-\gamma$$
$$\frac{\Gamma(z)\Gamma''(z)-(\Gamma'(z))^2}{(\Gamma(z))^2}=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2}$$
因此

$$(1)\Gamma''(1)=\gamma^2+\frac{\pi^2}{6}.$$

类似的,我们再次微分并解出 $\Gamma'''(1)$ 就得出
$$\Gamma'''(1)=-\gamma\left(\gamma^2+\frac{\pi^2}{2}\right)-2\zeta(3)$$
因此从 $$\frac{9}{8}=1+\frac{1}{2^3}<\zeta(3)<1+\frac{1}{2^3}+\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^3}=\frac{5}{4}$$
就得出(2).

注 上述过程可继续下去而用 $\gamma,\zeta(2),\zeta(3),\cdots,\zeta(n)$ 来估计 $\int_0^{\infty}e^{-x}\ln^n x\mathrm{d}x$.

(AMM 5266)

103. 设 F 是定义在 $[0,+\infty)$ 上的正的不减的凸函数, $F(0)=0$ 并且以 $y=x-a$ 为渐近线. 设 $H(x)=\frac{1}{2}F(F(2x))$, 证明:

(1) 对所有的 $x\geqslant 0$, $H(x)\leqslant F(x)$ 并且仍以 $y=x-a$ 为渐近线.

(2) 定义 $F_1=F$, $F_n(x)=\frac{1}{2}F_{n-1}(F_{n-1}(2x))$, 那么每个 F_n 都是正的不减的凸函数, 并且在 $[0,+\infty)$ 上 $F_n(x)$ 一致地 $\to\max(0,x-a)$.

证明 (1) 由于 $F(x)$ 是正的不减的凸函数, 因此对所有的 $x\geqslant 0$, $h\geqslant 0$ 成立 $F(x+h)\leqslant F(x)+h$, 由此即得出 $F(2x)\leqslant F(x)+x$, 因而
$$H(x)=\frac{1}{2}F(F(2x))\leqslant\frac{1}{2}F(x+F(x))\leqslant F(x)$$
从上式和 $$H(x)=\frac{1}{2}F(F(2x))\geqslant\frac{1}{2}F(2x-a)\geqslant\frac{1}{2}(2x-a-a)=x-a$$
立即得出 $y=x-a$ 是 $H(x)$ 的渐近线.

(2) 从 $F(x)$ 的凸性可以得出 $H(x)$ 的凸性. 我们有

$$H(\lambda x+(1-\lambda)y)=\frac{1}{2}F(F(2\lambda x+2(1-\lambda)y))\leqslant$$
$$\frac{1}{2}F(\lambda F(2x)+(1-\lambda)F(2y))\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\lambda F(F(2x))+\frac{1}{2}(1-\lambda)F(F(2y))=$$
$$\lambda H(x)+(1-\lambda)H(y)$$

那样, $H(x)$ 和每个 $F_n(x)$ 都是当 $x>0$ 时为正的, 不减的凸函数, 并且对所有的 $x\geqslant 0$ 成立

$$\max(0,x-a)\leqslant F_n(x)\leqslant F_{n-1}(x)$$

由此得出 $F_n(x)$ 收敛到一个当 $x\geqslant 0$ 时不减的连续的凸函数 $G(x)$, 它仍以 $y=x-a$ 为渐近线. 此外, 收敛在每个有限区间 $[0,x_0]$ 上是一致的, 因此我们有

$$\max(0,x-a)\leqslant G(x)=\lim_{n\to\infty}F_{n+1}(x)=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}F_n(F_n(2x))=\frac{1}{2}G(G(2x))$$

但是对

$$H(x)=\frac{1}{2}F(F(2x))\leqslant\frac{1}{2}F(x+F(x))\leqslant F(x)$$

应用同样的论述可得

$$\frac{1}{2}G(G(2x))\leqslant\frac{1}{2}G(x+G(x))\leqslant$$
$$\frac{1}{2}(G(x)+G(x))=G(x)$$

这就得出 $G(2x)=G(x)+x$ 是严格递增的. 这蕴含或者 $G(x)=0$ 或者对 $t\geqslant x$, $G(t)$ 是线性的, 即 $G(t)=t-a$, $t\geqslant x$. 这也就是 $G(x)=\max(0,x-a)$. 在 $[0,+\infty)$ 上收敛的一致性可从

$$F_n(a)=\sup_{x\geqslant 0}[F_n(x)-\max(0,x-a)]$$

以及 $F_n(a)$ 递减的 $\to 0$ 而得出.

104. 证明: 存在一个函数 $f(x)$, 使得对所有的 $x>1$, 成立

$$\int_x^{x^2}f(t)\mathrm{d}t=1$$

(AMM E1947)

解 设 F 是 f 的任意原函数, 那么

$$F(x^2)-F(x)=1$$

令 $x=e^y$ 以及 $G(y)=F(e^y)$, 那么 $G(2y)-G(y)=1$. 再令 $y=e^z$, $H(z)=G(e^z)$, 那么

$$H(z+\ln 2)-H(z)=1$$

这个方程的一般解是

$$H(z)=\frac{z}{\ln 2}+P\left(\frac{z}{\ln 2}\right)$$

其中 P 是一个周期为1的函数.由于 H 是可微的,因此 P 也是可微的,其导函数 $p(z)$ 仍然是一个周期为1的函数,并且 $\int_0^1 p(z)\mathrm{d}z=0$.把这些替换换回原来的变量就求出

$$F(x)=\frac{\ln(\ln x)}{\ln 2}+\frac{P(\ln(\ln x))}{\ln 2}$$

因此 $$f(x)=\frac{1}{x\ln 2\ln x}+\frac{1}{x\ln 2\ln x}p\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln 2}\right)$$

(AMM E1265)

105.是否存在定义在[0,1]上的非负的、不平凡的连续函数 $f(x)$,使得对所有的 $0\leqslant x\leqslant 1$ 都有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(x)$$

解 除了平凡情况 $f(x)\equiv 0$ 之外,不可能存在题目中所说的函数.

设不恒等于零的非负连续函数在 $0\leqslant x\leqslant b<1$ 上的最大值是 $M>0$,那么在此子区间的某个内点 a 处将成立

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t\leqslant Ma<f(a)$$

而这与问题中的不等式矛盾.

(AMM 4989)

106.设 $P(x)$ 是 n 阶多项式,使得 $\int_0^1 x^kP(x)\mathrm{d}x=0(k=0,1,2,\cdots,n)$,证明

$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x=(n+1)^2\left(\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

证明 设

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

由于 $$\int_0^1 x^kP(x)\mathrm{d}x=0,k=1,2,\cdots,n$$

我们有 $$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x=a_0\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x$$

以及

$$\int_0^1 x^k P(x)\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+k+1} + \frac{a_{n-1}}{n+k} + \cdots + \frac{a_0}{k+1}$$

$$\frac{a_n}{n+k+1} + \frac{a_{n-1}}{n+k} + \cdots + \frac{a_0}{k+1} = 0, k = 1,2,\cdots,n$$

现在
$$\frac{a_n}{n+k+1} + \frac{a_{n-1}}{n+k} + \cdots + \frac{a_0}{k+1} = \frac{Q(k)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

其中 $Q(k)$ 是 k 的至多为 n 阶的多项式. 由于 $Q(k)=0, k=1,2,\cdots,n$,因此

$$Q(k) = C(k-1)(k-2)\cdots(k-n)$$

其中 C 是一个常数. 因此

$$\frac{a_n}{n+k+1} + \frac{a_{n-1}}{n+k} + \cdots + \frac{a_0}{k+1} = \frac{C(k-1)(k-2)\cdots(k-n)}{(k+1)(k+2)\cdots(k+n+1)}$$

对 $k=0$, $\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n+1} + \cdots + \frac{a_0}{1} = \frac{(-1)^n C}{n+1}$,用 $k+1$ 乘以上式并令 $k=-1$,我们就得出

$$a_0 = (-1)^n(n+1)C$$

或
$$a_0 = (n+1)^2\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x$$

那样,再由
$$\int_0^1 P^2(x)\mathrm{d}x = a_0\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x$$

就得出
$$\int_0^1 P^2(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)^2\left(\int_0^1 P(x)\mathrm{d}x\right)^2$$

107. 设 $x_0=a, x_1=a+h, x_2=a+2h, x_3=a+3h$,证明:对每个5次连续可微在 x_0,x_1,x_2,x_3 取零值的函数 $f(x)$,存在3个唯一的5次多项式 $u(x),v(x),w(x)$ 使得

$$\int_{x_0}^{x_1} u(x)f^{(5)}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} v(x)f^{(5)}(x)\mathrm{d}x + \int_{x_2}^{x_3} u(x)f^{(5)}(x)\mathrm{d}x = 44\int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + 152\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + 44\int_{x_2}^{x_3} f(x)\mathrm{d}x$$

(AMM 5784)

证明 在积分中做变量替换 $x = x_0 + \frac{h(y+3)}{2}$,表明当且仅当对特殊情况 $x_0=3, h=2$ 存在那种唯一的多项式时,存在满

足给定关系的唯一的多项式.在这种情况下,在积分中令 $x=-t$,那么由于 $g(t)=f(-t)$ 满足像 $f(t)$ 那样的相同条件,我们看出,如果 $u(x),v(x),w(x)$ 存在,那么他们必须满足 $u(-x)=-w(x),v(-x)=-v(x)$,因此他们必须具有形式

$$u=k(x^5+dx^4+ex^3+fx^2+gx+h)$$
$$v=k(ax^5+bx^3+cx)$$
$$w=k(x^5-dx^4+ex^3-fx^2+gx-h)$$

在含 $f^{(5)}$ 的积分中相继进行分部积分将产生一个由 $f^{(4)}(3)$,$f^{(3)}(3)$,$f''(3)$,$f'(3)$,$f^{(4)}(1)$,$f^{(3)}(1)$,$f''(1)$,$f'(1)$ 的和,对点 3,1 和 -3,-1 可产生两个类似的和,这些和相加的结果为

$$k(-120)\left[\int_{-3}^{-1}f+a\int_{-1}^{1}f+\int_{1}^{3}f\right] \quad ①$$

让上述提到的 8 个项的系数等于零,就给出一个由 8 个方程组成的 8 个未知数的线性方程组(其他的 8 个方程组成的线性方程组是相同的),即

$$81d+27e+9f+3g+h+243=0$$
$$108d+27e+6f+g+405=0$$
$$108d+18e+2f+540=0,72d+6e+540=0$$
$$a+b+c-d-e-f-g-h-1=0$$
$$-5a-3b-c+4d+3e+2f+g+5=0$$
$$20a+6b-12d-6e-2f-20=0$$
$$-60a-6b+24d+6e+60=0$$

这个方程组有唯一解,特别 $a=\frac{38}{11}$.最后 ① 成为

$$44\int_{-3}^{-1}f+152\int_{-1}^{1}f+44\int_{1}^{3}f \quad ②$$

如果 $k=-\frac{44}{120}$;并且在 $[-3,-1]$ 和 $[1,3]$ 上取 $f=0$ 和在 $(-1,1)$ 上取 f 为正.我们看出仅当 $k=-\frac{44}{120}$ 时,① 和 ② 相同,因而所说的多项式是唯一的.

(AMM 6485)

108.设 $f\in C[0,1]$,$(B_nf)(x)$ 表示伯恩斯坦(Bernstein)多项式

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

证明:如果 $f\in C^2[0,1]$,那么对 $0\leqslant x\leqslant 1,n=1,2,\cdots$ 成立

$$|(B_nf)(x)-(B_{n+1}f)(x)|\leqslant\frac{x(1-x)}{n+1}\left(\frac{1}{3n}\int_0^1|f''(t)|^2dt\right)^{1/2}$$

证明 我们有恒等式

$$(B_nf)(x)-(B_{n+1}f)(x)=$$

$$\frac{x(1-x)}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\left[f;\frac{k-1}{k},\frac{k}{n+1},\frac{k}{n}\right]$$

其中

$$[f;x_1,x_2,x_3]=\frac{1}{x_3-x_1}\left[\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right]=$$

$$\int_0^1 H_k(t)f''(t)\mathrm{d}t$$

是 f 的二阶导差，而

$$(x_3-x_1)H_k(t)=\begin{cases}\dfrac{t-x_1}{x_2-x_1}, & x_1<t\leqslant x_2\\ \dfrac{x_3-t}{x_3-x_2}, & x_2\leqslant t<x_3\end{cases}$$

在其他地方，上式的值为零．这里还有

$$\int_0^1 H_k^2(t)\mathrm{d}t=\frac{n}{3}$$

这样，从一开始的恒等式和柯西－施瓦兹(Cauchy－Schwarz)不等式就可导出所需的绝对值不等式．

109．设 $f:[0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ 是可测函数．如果 $p>1$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)-\int_0^x|f|^p\mathrm{d}t$ 是否可能 $\to+\infty$？ (AMM 6422)

解 回答是不可能．甚至也不可能有对 $x\geqslant x_0\geqslant 0$ 成立

$$|f(x)|\geqslant\int_0^x|f|^p\mathrm{d}t \qquad (*)$$

除非在 (x_0,∞) 上几乎处处 $f=0$．

假设式$(*)$成立，f 在 (x_0,∞) 不是几乎处处为零的．设 $G(x)=\int_0^x|f|\mathrm{d}t$，那么对某个 $x_1\geqslant x_0$，$G(x_1)>0$ 并且在 $(x_0,+\infty)$ 上几乎处处成立 $G'(x)=|f(x)|^p$．因此由式$(*)$，在 $(x_0,+\infty)$ 上几乎处处成立 $G'(x)\geqslant G^p(x)$．在 $[x_1,y]$ 上积分 $\frac{G'}{G^p}$，我们得出对所有 $y>x_1$，有

$$\frac{G^{1-p}(x_1)-G^{1-p}(y)}{p-1}\geqslant y-x_1$$

矛盾．

(AMM E2523)

110. 计算:积分$\int_0^1 \ln(1+x)\ln(1-x)\mathrm{d}x$.

解

$$\int_0^1 \ln(1+x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \ln(1+x)\ln(1-x)\mathrm{d}x(\text{对称性}) =$$

$$\int_0^1 \ln 2t\ln(2-2t)\mathrm{d}t\ (x=2t-1) =$$

$$\int_0^1 (\ln 2+\ln t)(\ln 2+\ln(1-t))\mathrm{d}t =$$

$$\ln^2 2 + 2\ln 2\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t + \int_0^1 \ln t\ln(1-t)\mathrm{d}t$$

上面第一个积分的值等于 -1,而第二个,由 $\ln(1-t)$ 的马克劳林展开式就等于

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^1 t^k\ln t\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)^2} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$1-(\zeta(2)-1) = 2-\frac{\pi^2}{6}$$

因此 $\int_0^1 \ln(1+x)\ln(1-x)\mathrm{d}x = \ln^2 2 - 2\ln 2 + 2 - \frac{\pi^2}{6}$

(AMM 6382)

111. 计算$\int_0^1 \frac{\ln x\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x$.

解 设$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t$,那么

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}, 0 \leqslant x \leqslant 1$$

因此

$$\int_0^1 \frac{\ln x\ln^2(1-x)}{x}\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(x)\left(\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x}\right)\mathrm{d}x =$$

$$-\int_0^1 f(x)f'(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\mathrm{d}x =$$

$$-\frac{1}{2}f^2(1)-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\int_0^1 x^n\ln x\mathrm{d}x=$$

$$-\frac{1}{2}\zeta^2(2)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{(n+1)^2}=$$

$$-\frac{1}{2}\zeta^2(2)+\sum_{1\leqslant m<n}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}=$$

$$-\frac{1}{2}\zeta^2(2)+\frac{1}{2}(\zeta^2(2)-\zeta(4))=-\frac{1}{2}\zeta(4)=-\frac{\pi^4}{180}$$

(AMM 6454)

112. 计算积分

$$I(p)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\tan^p\theta\mathrm{d}\theta,\ -2<p<1$$

解 作变量替换 $\tan\theta=x$ 得出

$$I(p)=\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\arctan x\mathrm{d}x$$

设

$$J(p)=\int_0^{\infty}\frac{x^p}{1+x^2}\arctan ax\mathrm{d}x$$

那么对 $-2<p<0$，我们有

$$J'(a)=\int_0^{\infty}\frac{x^{p+1}\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}=$$

$$\frac{1}{2(1-a^2)}\left(\int_0^{\infty}\frac{x^{p+1}}{1+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^{\infty}\frac{a^2x^{p+1}}{1+a^2x^2}\mathrm{d}x\right)$$

在上面的两个积分中分别作变量替换 $x=\sqrt{t}$ 和 $x=\frac{\sqrt{t}}{a}$ 得出

$$J'(a)=\frac{1-a^{-p}}{2(1-a^2)}\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{p}{2}}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)}\ \frac{a^{-p}-1}{1-a^2}$$

因此

$$I(p)=J(1)=\frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right)}\int_0^1\frac{t^{-p}-1}{1-t^2}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{\pi}{4\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right)}\int_0^1\frac{u^{-\frac{p+1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}}}{1-u}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{\pi}{4\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right)}\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{1-p}{2}\right)\right)$$

其中 ψ 是 digamma 函数(见 I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, 1965, 公式 3.231.5). 由上述等式的解析连续性事实上对 $-2<p<0$ 成

立

$$I(0)=\lim_{p\to 0} I(p)=\frac{\pi^2}{8}$$

113. 设 $g(\theta)=\arctan\sqrt{\dfrac{\cos 2\theta}{2\cos^2\theta}}$，证明：

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{24}$.

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2}{32}$.

(AMM E2803)

证明　(1) 做变量替换 $\theta=\sin x$，则(1) 中积分化为

$$G(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(\alpha\cos x)\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

其中 $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 在上式中对 α 微分并做变量替换 $t=\tan x$ 得出

$$G'(\alpha)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+2\alpha^2}-\frac{1}{(1+2\alpha^2)\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$$

对上式积分并注意 $G(0)=0$ 即可得出结果.

(2) 考虑积分

$$K(\alpha)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan(\alpha\cos x)\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

其中 $\delta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. 对 α 微分后，关于 x 的积分就成为可计算的，再对 α 积分就得出

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\sqrt{2}}{1+2\alpha^2}\mathrm{d}\alpha-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\alpha^2}}}{(1+2\alpha^2)\sqrt{1+\alpha^2}}\mathrm{d}\alpha$$

上式中第一个积分等于 $\dfrac{\pi^2}{16}$. 在第二个积分中做变量替换 $\tan\beta=\alpha$ 就得出

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi^2}{16}-K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

由此即可得出结果.

(AMM 6206)

114. 如果 n 是一个不等于零的整数,证明

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x+\tan x)}\mathrm{d}x = 0$$

证明 映射 $t \to t + \tan t$ 在 $\mathbf{R}$ 上是保勒贝格测度的(见 Gerard Letac, Which function preserve Cauchy laws ?, Proc. Amer. Math. Soc., 67(1977), 277-286). 按如下方式引进定义在 R 上的函数 $f_n(t)$

$$f_n(t) + \tan(f_n(t)) = t, n\pi - \frac{\pi}{2} < f_n(t) < n\pi + \frac{\pi}{2}$$

由于映射 $t \to t + \tan t$ 在 R 上是保勒贝格测度的,所以我们有对所有的 t, $\sum_{-\infty}^{\infty} f'_n(t) = 1$. 那样对所有的 t, $f'_n(t) = f'_0(t - n\pi)$ 并且 $F(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f'_0(t + n\pi) = 1$. 因此当 n 是一个不等于零的整数时就有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(t)e^{2int}\mathrm{d}t = 0$$

但是这蕴含

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(t)e^{2int}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f'_0(t)e^{2int}\mathrm{d}t$$

在上式右边的积分中令 $x = f_0(t)$ 就得出所要的结果.

(AMM E3140)

115. 设 $K = \frac{1}{2}\ln^2(\sqrt{2} + 1)$,证明

(1) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{x(1 + x^2)}\mathrm{d}x = K$.

(2) $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2 - 1}}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8} + K$.

(3) $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{8} - K$.

证明 (1) 设

$$I=\int_1^{\infty}\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

令 $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$，我们得到

$$I=\int_0^1\frac{t-1}{(t+1)(t^2+6t+1)}\ln t\mathrm{d}t$$

由分部积分得出

$$4I=\int_0^1\left(\frac{2}{t+1}-\frac{1}{t+a}-\frac{1}{t+b}\right)\ln t\mathrm{d}t$$

其中 $a=3+2\sqrt{2}$，$b=\frac{1}{a}=3-2\sqrt{2}$. 代换 $u=bt$ 给出

$$\int_0^1\frac{\ln t}{t+a}\mathrm{d}t=\ln a\ln(b+1)+\int_0^b\frac{\ln u}{u+1}\mathrm{d}u$$

当交换 a,b 的位置后成立类似的方程，因此

$$\begin{aligned}4I=&2\int_0^1\frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t-\ln a\ln(b+1)-\int_0^b\frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t-\\&\ln b\ln(a+1)-\int_0^a\frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t=\\&\ln a\ln\left(\frac{a+1}{b+1}\right)-\int_1^a\frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t+\int_b^1\frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t=\\&\ln^2 a-\int_1^a\frac{\ln t}{t+1}\mathrm{d}t-\int_1^a\frac{\ln t}{t(t+1)}\mathrm{d}t\\&\text{(在第二个积分中用}\frac{1}{t}\text{代替}t\text{)}=\\&\frac{1}{2}\ln^2 a=2\ln^2\sqrt{a}=2\ln^2(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

由此即可得出结果.

(2) 考虑函数

$$F(\alpha)=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}}\frac{\arctan\alpha x}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x,0\leqslant\alpha<1$$

由微分的莱布尼兹公式得出

$$F'(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\int_1^{\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\alpha^2x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

令 $t^2=1-\frac{1}{x^2}$，并且注意 $\arcsin\alpha=\arctan\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$，就得出

$$F'(\alpha)=\frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\int_0^\alpha\frac{\mathrm{d}t}{1+\alpha^2-t^2}=$$

$$\frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+t}{\sqrt{1+\alpha^2}-t}\right)\Bigg|_0^\alpha=$$

$$\frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{1}{2\sqrt{1+\alpha^2}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha}\right)=$$

$$\frac{\arcsin\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}+\frac{\ln(\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha)}{\sqrt{1+\alpha^2}}$$

积分得出

$$F(\alpha)=\frac{1}{2}(\arcsin\alpha)^2+\frac{1}{2}\left(\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})\right)^2+C$$

现在 $F(0)=0$ 蕴含 $C=0$，让 $\alpha\to1$ 就得出(2)．

注意到 $\arctan x=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}$，因此

$$\int_0^1\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-\int_0^1\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$\frac{\pi^2}{4}-\int_1^\infty\frac{\arctan t}{t\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\left(\text{令 } t=\frac{1}{x}\right)=$$

$$\frac{\pi^2}{8}-K$$

116．计算：(1) $\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x$．

(2) $\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta$．

(Robert . M . Yang , On Jensen's formula and $\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta$, AMM Vol .93(1986) , No. 1, 44-45)

解 (1) 令 $I=\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x$，则

$$I=\int_0^\pi\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi\ln 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=$$

$$\pi\ln2+\int_0^\pi\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_0^\pi\ln\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

在上面的第一个积分中作变量替换 $t = \frac{x}{2}$，在第二个积分中作变量替换 $\frac{\pi}{2} - t = \frac{x}{2}$ 就得出

$$I = \pi \ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t\mathrm{d}t = \pi \ln 2 + 2I$$

故

$$I = \int_0^{\pi} \ln \sin x\mathrm{d}x = -\pi \ln 2$$

(2) 由于 $|1 - \mathrm{e}^{i\theta}| = 2\sin \frac{\theta}{2}$，因此由(1)已得的结果就得出

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - \mathrm{e}^{i\theta}| \mathrm{d}\theta = 0$$

(AMM 6470)

117. 对 $b \geqslant 1$，计算 $I = \int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{a^2 x(x-b)^2}{(x-1)^2}} \mathrm{d}x$。

解 做变量替换 $x \to x^2$ 得出

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-a^2 u^2} \mathrm{d}x$$

其中

$$u = \frac{x(x^2 - b)}{(x^2 - 1)} \qquad (*)$$

当 $b = 1$ 时，众所周知有 $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^3}$。

当 $b > 1$ 时，从 u 的图像可以看出，$(*)$ 有三个根 $x_1(u)$，$x_2(u)$，$x_3(u)$，其中每个根对 $-\infty < u < +\infty$ 都是 u 的连续可微的和递增的函数，由于 x_1, x_2, x_3 满足方程

$$x^3 - ux^2 - bx + u = 0$$

因此

$$x_1 + x_2 + x_3 = u, x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = -b$$

以及

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = u^2 + 2b$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = u^3 + 3ub - 3u$$

因而

$$I = \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{1} + \int_{1}^{\infty}\right) x^2 \mathrm{e}^{-a^2 u^2} \mathrm{d}x =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(x_1^2 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}u} + x_2^2 \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}u} + x_3^2 \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}u}\right) \mathrm{e}^{-a^2 u^2} \mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \mathrm{e}^{-a^2 u^2} \mathrm{d}u =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u^2+b-1)e^{-a^2u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(\frac{1}{2a^2}+b-1\right)$$

(AMM E2822)

118. 计算极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}}\sin t\ln\frac{1}{t}dt$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}\cos t\ln\frac{1}{t}dt$.

解 (1) 由于

$$\int_0^x\frac{1-\cos t}{t}=\gamma+\ln x+\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

其中 γ 是欧拉常数，因此由分部积分就得出

$$\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\sin t\ln\frac{1}{t}dt=-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi+\int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\frac{1-\cos t}{t}dt=$$

$$\gamma+\int_{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

(2) $\int_0^{n\pi}\cos t\ln\frac{1}{t}dt=\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}-\int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt$

当 $n\to\infty$ 时，两个无穷积分都趋于零，那样(1)的答案是 γ 而(2)的答案是 $\frac{\pi}{2}$.

(AMM E3145)

119. 证明：$\int_0^{\pi}\frac{\cos nx-\cos ny}{\cos x-\cos y}dx=\pi\frac{\sin ny}{\sin y}$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

证明 设 $f_n(x,y)=\frac{\cos nx-\cos ny}{\cos x-\cos y}$，$n=0,1,2,\cdots$，$(x,y)\in\mathbf{R}^2$. 由于存在 n 次多项式使得 $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$. 这就得出 $f_n(x,y)$ 可以表示成 $\cos x$ 和 $\cos y$ 的 $n-1$ 次多项式，显然

$$f_0(x,y)=0, f_1(x,y)=1, f_2(x,y)=2\cos x+2\cos y$$

余弦函数的加法公式给出

$$f_{n+1}(x,y)+f_{n-1}(x,y)=\frac{2\cos nx\cos x-2\cos ny\cos y}{\cos x-\cos y}=$$

$$2\cos nx+2f_n(x,y), n=1,2,\cdots$$

由 $\quad\sin(r+1)y+\sin(r-1)y=2\sin ry\cos y$

和数学归纳法可以得出 $f_n(x,y)$ 的表达式为

$$f_n(x,y)=\frac{\sin ny}{\sin y}+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos kx\frac{\sin(n-k)y}{\sin y},n=2,3,\cdots$$

固定 y,并积分上式就得出

$$\int f_n(x,y)\mathrm{d}x=x\frac{\sin ny}{\sin y}+2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin kx}{k}\frac{\sin(n-k)y}{\sin y},n=2,3,\cdots$$

由此即可得出结果.

(AMM E3357)

120. 计算:$\lim\limits_{y\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^3}\sin(xy)\mathrm{d}x$.

解 所求的极限等于$\frac{\pi}{2}$.为看出这点,在$(0,+\infty)$上定义一个函数 $f(x)$ 如下

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x^2}{x^3}-\frac{1}{x},0<x<1\\ \frac{\sin x^2}{x^3},x\geqslant 1\end{cases}$$

由于当 $0<x<1$ 时,$-\frac{x^3}{6}<\frac{\sin x^2}{x^3}-\frac{1}{x}<0$,我们看出 $f\in L(0,+\infty)$,因此可写

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^3}\sin(xy)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}f(x)\sin xy\mathrm{d}x+\int_0^{1}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$$

当 $y\to\infty$ 时,由黎曼 - 勒贝格(Riemann - Lebesgue)引理可知上式中第一项趋于 0,而第二项等于

$$\int_0^{y}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

众所周知,当 $y\to\infty$ 时,它趋于$\frac{\pi}{2}$.

注 Klaus Schurger 和 Chico 问题组都考虑了如下的推广问题:对固定的任意正数 r

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin x^r\sin xy}{x^{r+1}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

上面的积分可写成

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\frac{t^2}{y^2}}{\frac{t^2}{y^2}}\cdot\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

而此积分当 $y\to\infty$ 时,是点收敛到$\frac{\sin t}{t}$的.由于$\frac{\sin t}{t}$不是绝对可积的,因此在这里不能应用优积分定理.

(AMM 6672)

121. 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi)(a\sin^2\varphi+b\cos^2\varphi)}}=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}$$

并利用这个结果证明如果在右边的积分中把 a 和 b 分别换成 $\sqrt{ab}$ 和 $\frac{a+b}{2}$,那么所得的积分值不变.

证明 分别用 $J(a,b)$ 和 $I(a,b)$ 代表左边和右边的积分,那么变量替换 $\varphi=\sqrt{\frac{b}{a}}\tan\theta$ 表明 $J(a,b)=I(a,b)$,此外 $J(a,b)$ 根号内的表达式可以写成

$$(a\cos^2\varphi+b\sin^2\varphi)(a\sin^2\varphi+b\cos^2\varphi)=$$
$$a_1^2\cos^2 2\varphi+b_1^2\sin^2 2\varphi$$

其中 $a_1=\sqrt{ab}$ 而 $b_1=\frac{a+b}{2}$,那样

$$J(a,b)=I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{a_1^2\cos^2 2\varphi+b_1^2\sin^2 2\varphi}}=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta_1+b_1^2\sin^2\theta_1}}\ (\theta_1=2\varphi)=$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta_1+b_1^2\sin^2\theta_1}}=I(a_1,b_1)$$

(AMM 10241)

122. 设 m,n 都是正整数,$m\geqslant n$. 证明:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\left(\frac{\sin mx}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

证明 设所要计算的积分为 $I(m,n)$,那么

$$\int\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n\left(\frac{\sin mx}{x}\right)\mathrm{d}x=$$

$$\int(\sin x)^n\sin mx\,\mathrm{d}\left(\frac{-1}{nx^n}\right)=-\frac{\sin^n x\sin mx}{nx^n}+$$

$$\int\frac{n\sin^{n-1}x\cos x\sin mx+m\sin^n x\cos mx}{x^n}\mathrm{d}x$$

由此得出当 $n\geqslant 1$ 时有

$$2nI(m,n)=(n+m)I(m+1,n-1)+(n-m)I(m-1,n+1) \qquad (*)$$

注意对 $n\geqslant 0$ 有 $I(0,n)=0$ 以及对 $m\geqslant 1$ 有 $I(m,0)=\frac{\pi}{2}$（$I(m,0)$ 实质上就是标准的迪利克雷积分）.

现在用数学归纳法即可容易地导出所要的结果.

对 $n=1$ 和 $m\geqslant 1$，由式（$*$）得出 $I(m,1)=\frac{\pi}{2}$，$m\geqslant 1$.

假设对正整数 n 和 $m\geqslant n$ 成立 $I(m,n)=\frac{\pi}{2}$，那么从式（$*$）就得出对 $m\geqslant n+1$ 成立 $I(m,n+1)=\frac{\pi}{2}$，这就完成了数学归纳法的步骤.

123. 计算

$$\int_0^{\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

（AMM 11101）

解 对给定的 a，设 $f(x,s)=\frac{a}{a^2+s^2+x^2}$. 这个函数在整个 x,s 平面上是 x,s 的连续函数. 此外 $f(x,s)\leqslant\frac{a}{a^2+x^2}$，因此积分 $\int_0^{\infty}\frac{a\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$ 是收敛的.

注意

$$\int_0^b\frac{a\mathrm{d}s}{a^2+s^2+x^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$$

因此

$$\int_0^{\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\int_0^b\frac{a}{a^2+s^2+x^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^b\int_0^{+\infty}\frac{a}{a^2+s^2+x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}s=\int_0^b\frac{a}{a^2+x^2}\left[\arctan\frac{x}{\sqrt{a^2+s^2}}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}\mathrm{d}s=$$

$$\frac{a\pi}{2}\int_0^b\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{a\pi}{2}\left[\ln\left(s+\sqrt{a^2+s^2}\right)\right]\Big|_{s=0}^{s=b}=$$

$$\frac{a\pi}{2}\left[\ln\left(b+\sqrt{a^2+b^2}\right)-\ln a\right]$$

124. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，那么由积分中值定理可知存在 $a<c<b$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

证明：如果 $f(x)$ 在 a 点可微并且 $f'(a)\neq 0$，那么

$$\lim_{b\to a}\frac{c-a}{b-a}=\frac{1}{2}$$

（Bernard Jocobson ,On the mean value theorem fir integrals , AMMVol . 89(1982) , No 5. 300-301)

证明　由 c 的定义可知，当 $b\to a$ 时，必有 $c\to a$.

考虑极限

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)}{(b-a)^2}$$

由中值定理可知

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)}{(b-a)^2}=\lim_{c\to a}\frac{f(c)(b-a)-f(a)(b-a)}{(b-a)^2}=$$

$$\lim_{c\to a}\frac{f(c)-f(a)}{b-a}=$$

$$\lim_{c\to a}\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\cdot\frac{c-a}{b-a}=$$

$$f'(a)\lim_{b\to a}\frac{c-a}{b-a}$$

另一方面，由 L'Hôspital 法则又可得出

$$\lim_{b\to a}\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)f(a)}{(b-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-(x-a)f(a)}{(x-a)^2}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f'(a)$$

对比上面两个极限即可得出

$$\lim_{b\to a}\frac{c-a}{b-a}=\frac{1}{2}$$

（AMM E3033）

125. 设 f 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的二次可微函数，f,f',f'' 递增. 对两个固定的数 a,b 和 $x>0$，由中值定理，可定义一个函数 $\xi=\xi(x)$ 使得

$$\frac{f(b+x)-f(a-x)}{b-a+2x}=f'(\xi)$$

证明：$\xi(x)$ 是 x 的递增函数，条件中的 f'' 递增是否能改成 f'' 是正的？

证明 方程

$$\xi(x)=(f')^{-1}\left(\frac{f(b+x)-f(a-x)}{b-a+2x}\right)$$

说明 $\xi(x)$ 是可微的. 微分确定 $f'(\xi)$ 的方程得出

$$\frac{f'(b-x)+f'(a-x)-2f'(\xi)}{b-a+2x}=f''(\xi)\cdot\xi'(x)$$

由于 f'' 递增，因此 f' 是凹的，因而

$$\frac{f'(b+x)+f'(a-x)}{2}>f'(\xi)$$

由 f' 递增得出 $f''\geqslant 0$，由此和上面的两个式子显然就可得出 $\xi'(x)>0$，因而 $\xi(x)$ 是 x 的递增函数.

条件 f'' 递增不能改成 $f''(x)>0$. 考虑

$$f(x)=\frac{\pi}{2}x+\int_0^x\arctan t\,dt$$

那么 $$f'(x)=\frac{\pi}{2}+\arctan x,f''(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

因此 f 和 f' 递增，$f''(x)>0$，但是 f'' 在 $\mathbf{R}^+$ 上递减. 令 $a=b=0$，那么定义 $\xi(x)$ 的方程成为

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\arctan\xi(x)$$

这样 $\xi(x)\equiv 0$.

（AMM 6448）

126. 证明：

$$2\sqrt{3}\,Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\psi'\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{2\pi^2}{3}$$

其中 $Cl_2(\theta)=-\int_0^\theta\ln\left(2\sin\frac{1}{2}t\right)dt$ 是克劳森（Clausen）积分，而 $\psi(x)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$.

证明 设

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2},S_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)^2}$$

$$A_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)^2},A_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)^2}$$

那么

$$S_1+S_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+3)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{9}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{4\pi^2}{27}$$

$$S_1-A_1=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+4)^2}=\frac{1}{2}S_2$$

$$S_2+A_2=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(6n+1)^2}=\frac{1}{2}S_1$$

因此 $$A_1+A_2=\frac{3}{2}(S_1-S_2)=3S_1-\frac{2\pi^2}{9}$$

我们还有两个众所周知的级数表示式

$$Cl_2(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n^2},0\leqslant\theta\leqslant\pi$$

$$\psi'(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+t)^2},t\neq 0,-1,-2,\cdots$$

因此 $$\psi'\left(\frac{1}{3}\right)=9S_1$$

$$Cl_2\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1+A_2)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\psi'\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{2\pi^2}{3}\right)$$

(AMM E2965)

127. 设 $0<h$，$A\subset[a,b]$，A 可测，证明：

$$\frac{1}{2h}\int_a^b m[A\cap(x-h,x+h)]\mathrm{d}x\leqslant m(A)$$

证明 设 $\chi_A(t)$ 表示 A 的特征函数，那么，我们有

$$\int_a^b m[A\cap(x-h,x+h)]\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{|x-t|<h}\chi_A(t)\mathrm{d}t$$

对上式右边的二重积分应用富比尼(Fubini)定理，我们看出它显然小于或等于

$$\int_{-\infty}^{\infty}\chi_A(t)\mathrm{d}t\int_{|x-t|<h}\mathrm{d}x=2hm(A)$$

这就证明了所要的结果.

(AMM 10771)

128. 计算 $\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$.

解 设要计算的积分为 I. 由对称性，我们可让 x，y 在区域 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$ 中变动，然后把所得的结果加倍. 令 $x=$

$r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = \tan\varphi$,那么

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sec\theta} \frac{r\sec^2\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{(r^2+\sec^2\varphi)^2} =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\varphi\left(\frac{-1}{2(r^2+\sec^2\varphi)}\right)\Bigg|_{r=0}^{r=\sec\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi =$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\sec^2\theta+\sec^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\sec^2\theta+\sec^2\varphi}$$

上面最后两行中的积分是相同的,因此

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi}{\sec^2\theta+\sec^2\varphi} = \frac{\pi^2}{16}$$

因而 $I = \frac{\pi^2}{32}$.

129. 设 f 和 F 是定义在非负实数上的可微函数,且满足

$$f(x) = F(x) - F(x-1), x \geqslant 1$$

证明:(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} f(k) = F(n) - F(0)$.

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} f'(k) = F'(n) - F'(0)$.

(3) 利用上面的公式求 $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha$.

(AMM Lee Yong - Jeng, Theorem of George B. Thomas, Jr , V01 73, No.9: 995-996)

证明 (1) 在 $f(x) = F(x) - F(x-1)$ 中令 $x = 1,2,\cdots,n$ 并将所得的式子相加即得

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = F(n) - F(0)$$

(2) 在 $f(x) = F(x) - F(x-1)$ 的两边微分,再利用(1)的结果即得.

(3) 设 $F(n) = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \cdots + \sin n\alpha$,两次应用(1)中的公式得出

$$-\alpha^2 F(n) = \sum_{k=1}^{n} -\alpha^2\sin k\alpha = F''(n) - F''(0)$$

解微分方程 $-\alpha^2 y = y'' + k$,然后求得

$$F(n)=\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha-\cos\frac{1}{2}(2n+1)\alpha}{2\sin\frac{1}{2}\alpha}$$

(AMM E1183)

130. 证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}=1$.

证明 $S=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k-1}{k!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)=1-\frac{1}{n!}\to 1$

(AMM 10262)

131. 设 F_n 表示斐波那契数，求和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}}$.

解 更一般的，设数列 p_n 满足循环关系 $p_n=ap_{n-1}+p_{n-2}$，$a>0,n\geqslant 2$，以及条件 $k\geqslant 1,p_kp_1-p_{k+1}p_0\neq 0$，那么由循环数列的理论可知 $p_n=A\alpha^n+B\beta^n$，其中 A,B 是常数，而

$$\alpha=\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2},\beta=\frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2}$$

由于 $p_kp_1-p_{k+1}p_0\neq 0$，因此 A 和 B 都不等于零. 由于 $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$，因此我们有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-1}}{p_n}=\frac{1}{\alpha}=\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$$

对固定的 k，通过对 n 作归纳法容易证明

$$p_{n-1}p_{n+k}-p_{n+k-1}p_n=(-1)^n(p_kp_1-p_{k+1}p_0),n\geqslant 1$$

那样

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{p_np_{n+k}}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{p_kp_1-p_{k+1}p_0}\frac{p_{n-1}p_{n+k}-p_{n+k-1}p_n}{p_np_{n+k}}=$$

$$\frac{1}{p_kp_1-p_{k+1}p_0}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{p_{n-1}}{p_n}-\frac{p_{n+k-1}}{p_{n+k}}\right)=$$

$$\frac{1}{p_kp_1-p_{k+1}p_0}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{p_{n-1}}{p_n}-\sum_{n=N+1}^{N+k}\frac{p_{n-1}}{p_n}\right)$$

在上式中令 $n\to\infty$ 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p_np_{n+k}}=\frac{1}{p_kp_1-p_{k+1}p_0}\left(\sum_{n=1}^{k}\frac{p_{n-1}}{p_n}-k\left(\frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}\right)\right)$$

在上式中，再取 $k=1,a=1$，即可得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{F_nF_{n+2}}=2-\sqrt{5}$$

(AMM 10292)

132. 求和(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{8n}{n^4-2n^2+5}\right)$.

解 (1) $\arctan\frac{2}{n^2}=\arctan(n+1)-\arctan(n-1)$

由此易得 $$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\frac{3\pi}{4}$$

(2) $$\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\arctan\frac{(n+1)^2}{2}-\arctan\frac{(n-1)^2}{2}$$

由此易得 $$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{8n}{n^4-2n^2+5}=\pi-\arctan\frac{1}{2}$$

(AMM E3088)

133. 证明：$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot k!}{n^k}C_n^k=n$.

证法1 所给的等式等价于
$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{k}{n}=1$$
我们用数学归纳法甚至易于证明更多一点的一般命题：设 t_1，$t_2,\cdots,t_n$ 是任意实数. 那么
$$t_1+(1-t_1)t_2+(1-t_1)(1-t_2)t_3+\cdots+$$
$$(1-t_1)\cdots(1-t_{n-1})t_n+(1-t_1)\cdots(1-t_{n-1})(1-t_n)=1$$
取 $t_k=\frac{k}{n}$ 即可得出上面的等价式子.

证法2 设
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot k!}{n^k}C_n^k=S+\frac{n!}{n^{n-1}}$$
S 可用分部求和公式
$$\sum_{k=1}^{n-1}u(k)\triangle v(k)=[u(k)v(k)]\Big|_1^n-\sum_{k=1}^{n-1}v(k+1)\triangle u(k)$$
计算，其中
$$\triangle f(k)=f(k+1)-f(k)$$
设 $$u(k)=n^{-k}C_n^k,v(k)=k!$$
那么 $$S=u(k)v(k)\Big|_1^n+\frac{n+1}{n}S$$
因此 $$S=n-\frac{n!}{n^{n-1}}$$
把 S 代入开始时的式子即得欲证.

证法 3　考虑函数

$$f(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

对上式反复微分得到

$$f^{(k)}(x)=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^{k-1}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-k}$$

那样　$$f^{(k)}(0)-f^{(k+1)}(0)=\frac{1}{n}\cdot\frac{k\cdot k!}{n^k}C_n^k$$

所以　$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k\cdot k!}{n^k}C_n^k=n\sum_{k=1}^{n}(f^{(k)}(0)-f^{(k+1)}(0))=$$
$$n(f^{(1)}(0)-f^{(n+1)}(0))=$$
$$n(1-0)=n$$

(AMM E2813)

134. 设 $0\leqslant x<1$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[2^n x]}}{2^n}=1-2x$.

证明　如果 $0\leqslant x<1$，设 $x=\sum a_k 2^{-k}$ 是 x 的二进表示，那么 $(-1)^{[2^n x]}=(-1)^{a_n}$，因此问题的答案是 $1-2x$. 如果 $x\geqslant 1$，类似的论证给出 $1-2(x-[x])$，这一公式对 $0\leqslant x<1$ 也适用(事实上，适用于任意实数).

(AMM 11068)

135. 设 x 是有理数，因而可以用唯一的方式表示为既约分数 $\frac{a}{b}$，$b\neq 0$，设 $f(x)=ab$，证明：

$$\sum_{x\in\mathbf{Q}^+}\frac{1}{f(x)^2}=\frac{5}{2}$$

证明　对每个正整数对 (m,n)，令 (m,n) 对应于一个三整数的有序组 (p,q,r)，其中 $r=(m,n)$ 表示 m,n 的最大公因数，$p=\frac{m}{r}$，$q=\frac{n}{r}$，因而 p,q 是互素的. 这个映射是 1 - 1 的，其逆映射由 $m=pr$，$n=qr$ 给出. 由此得出，当 $s>1$ 时

$$\left(\sum_m\frac{1}{m^s}\right)\left(\sum_n\frac{1}{n^s}\right)=\left(\sum_{(p,q)=1}\frac{1}{(pq)^s}\right)\left(\sum_r\frac{1}{r^{2s}}\right)$$

设 $\zeta(s)$ 表示 Riemann - zeta 函数，那么

$$\zeta(s)^2=\left(\sum_{x\in\mathbf{Q}^+}\frac{1}{f(x)^s}\right)\zeta(2s)$$

因此　$$\sum_{x\in\mathbf{Q}^+}\frac{1}{f(x)^s}=\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}$$

特别
$$\sum_{x\in Q^+}\frac{1}{f(x)^2}=\frac{\zeta(2)^2}{\zeta(3)}=\frac{\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2}{\frac{\pi^4}{90}}=\frac{5}{2}$$
在一般情况下,设 B_n 表示第 n 个伯努利数,那么
$$\sum_{x\in Q^+}\frac{1}{f(x)^s}=\frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}=\frac{1}{2}C_{2s}^{s}\frac{B_s^2}{|B_{2s}|}$$

(AMM 5531)

136. 证明:如果 $\sum a_n$ 是没有非零项的收敛级数,并且 a_n-a_{n+1} 是递减的,那么当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\to\infty$.

证明 由于 $\sum(a_n-a_{n+1})$ 是收敛的,并且 a_n-a_{n+1} 是递减的,这就得出 $a_n>a_{n+1}>0$,那样
$$0<\frac{a_na_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}\leqslant\frac{a_n^2}{a_n-a_{n+1}}=\frac{1}{a_n-a_{n+1}}\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2-a_{k+1}^2)\leqslant$$
$$\sum_{k=n}^{\infty}(a_k+a_{k+1})\to 0$$
因此当 $n\to\infty$ 时,$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\to\infty$.

(AMM E1994)

137. 设 a_n 是一个正数的叙列. $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\frac{a_n}{a_n}$,证明:当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 有限时,极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在.

证明 首先看出 $a_{n+1}>a_n\geqslant 1$. 设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$,那么对所有的 n,$a_n\leqslant a$,因而有
$$\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n)=a_{N+1}-a_1=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{a_n}\geqslant\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{N}a_n$$
因此
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<a(a-1)<\infty$$
反过来,如果 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$,那么
$$\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}-a_n)=a_{N+1}-a_1=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{a_n}\leqslant\sum_{n=1}^{N}a_n$$
因此
$$\lim_{n\to\infty}a_n=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

(AMM E3159)

138. 数列 p_n 定义如下：$p_0=1, p_n+\frac{p_{n-1}}{1!}+\frac{p_{n-2}}{2!}+\cdots+\frac{p_1}{(n-1)!}+\frac{p_0}{n!}=1$，证明：$p_n$ 收敛，并求出它的极限.

解 设 $p(x)=\sum p_n x^n$ 是 p_n 的生成函数，那么级数乘积

$$p(x)e^x=\sum x^n=\frac{1}{1-x}$$

的第 n 项给出 p_n 的循环关系，因此 $p(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$，而 $p_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$ 收敛，并具有极限 $\frac{1}{e}$.

(AMM E3416)

139. 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是一个正数的叙列，则

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{(a_1+x)(a_2+x)\cdots(a_n+x)}$$

证明：当且仅当 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ 发散时，$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{x}$.

证明 设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，那么

$$xS_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_kx}{(1+b_1x)\cdots(1+b_kx)}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(1+b_1x)\cdots(1+b_{k-1}x)}-\frac{1}{(1+b_1x)\cdots(1+b_kx)}\right)$$

这也就是

$$S_n(x)=\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{(1+b_1x)\cdots(1+b_nx)}\right)$$

现在让 $n\to\infty$，那么当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_nx)$ 收敛，这就完成了证明.

(AMM E3353)

140. 对每个正整数 n，设 $G(n)$ 表示 2^n 的十进数字表示中的数字的个数，问是否可能成立展式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)}{2^n}=\frac{1\ 169}{1\ 023}$$

解 我们证明所给的和将超过 $\frac{1\ 169}{1\ 023}$.

用 $\log x$ 表示 $\log_{10}x$,那么

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1+n\log 2]}{2^n}=$$
$$1+\sum_{n=1}^{10}\frac{[n\log 2]}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+10)\log 2]}{2^{n+10}}=$$
$$\frac{1\ 167}{1\ 024}+\frac{1}{1\ 024}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(n+10)\log 2]}{2^n}$$

由于
$$[(n+10)\log 2]\geqslant[n\log 2+3]$$
在 $n=93$ 时成立严格的不等式,因此我们有
$$S>\frac{1\ 167}{1\ 024}+\frac{1}{1\ 024}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[n\log 2+3]}{2^n}=\frac{1\ 167}{1\ 024}+\frac{1}{1\ 024}(S+2)$$
这蕴含
$$S>\frac{1\ 169}{1\ 023}$$

(AMM E1318)

141. 证明:(1) 当 $n\to\infty$ 时,$\Phi(n)=\sum_{k=0}^{n}P_n^k\sim(n!)e$.

(2) $\Phi(n)=[n!e]$.

(1) 证明:

$$0<n!e-\Phi(n)=n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}=$$
$$n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots\right)=$$
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots<$$
$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}<1$$

由上式就得出 $\Phi(n)=n!e+a_n,0<a_n<\frac{1}{n}$,因而 $\Phi(n)\sim n!e$.

(2) 由于 $\Phi(n)$ 是一个整数,由(1) 就得出 $\Phi(n)=[n!e]$.

(AMM E2052)

142. 设 $f(n)=\sin\pi\left(\frac{(n-1)!+1}{n}\right)$,证明:$\sum_{n=1}^{N}f(n)=\pi\ln\left(\frac{N}{\ln N}\right)+O(1)$.

证明 对 $n=ab,a>b>1$,则
$$(ab-1)!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot b\cdot\cdots\cdot a\cdot\cdots$$
则
$$(ab-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2ab)$$
对 $n=p^2$,其中 p 是大于2的素数
$$(p^2-1)!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot p\cdot\cdots\cdot 2p\cdot\cdots\cdot(p^2-1)\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2p^2)$$
因此
$$\sin\pi\left(\frac{(n-1)!+1}{n}\right)=\sin\frac{\pi}{2},n\neq p,n\neq 4$$

由 Wilson 定理有

$$\sin \pi\left(\frac{(p-1)!+1}{n}\right)=0$$

因此当 $N \geqslant 4$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{N} f(n)=\sum_{n=1}^{N} \sin \frac{\pi}{n}-\sum_{p \leqslant N} \sin \frac{\pi}{p}-2 \sin \frac{\pi}{4}$$

由于 $$\sum_{n=1}^{N} \sin \frac{\pi}{n}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\pi}{n}+O\left(\frac{1}{n^{3}}\right)\right)=\pi \ln N+O(1)$$

$$\sum_{p \leqslant N} \sin \frac{\pi}{n}=\sum_{p \leqslant N}\left(\frac{\pi}{p}+O\left(\frac{1}{p^{3}}\right)\right)=\pi \ln \ln N+O(1)$$

这就得出 $$\sum_{n=1}^{N} f(n)=\pi \ln \frac{N}{\ln N}+O(1)$$

143. 设 $R_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln\left(n+\frac{1}{2}\right)$，$\gamma$ 表示欧拉常数，证明：

$$\frac{1}{24(n+1)^{2}}<R_n-\gamma<\frac{1}{24 n^{2}}$$

(Duane W . DeTemple . A Quicker Convergence to Euler's Constant ,AMM Vol .100(1003) , No 5: 468-470)

证明 对 $x>0$，考虑函数

$$f(x)=-\frac{1}{x+1}-\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

那么由计算可得

$$R_n-R_{n+1}=f(n)$$

$$f'(x)=-\frac{1}{4(x+1)^{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$$

由此可以看出

$$-f'(x)<\frac{1}{4\left(x+\frac{1}{2}\right)^{4}}$$

因而

$$f(k)=-\int_{k}^{\infty} f'(x) \mathrm{d} x<\frac{1}{4} \int_{k}^{\infty} \frac{\mathrm{d} x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{4}}=\frac{1}{12\left(k+\frac{1}{2}\right)^{3}}$$

由于 $$\left(k+\frac{1}{2}\right)^{2}>k(k+1)$$

故
$$\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^3}<\frac{1}{2}\,\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$
(从图 1 可以看出,几何上在区间 $k\leqslant x\leqslant k+1$ 上 $\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^3}$ 要小于曲线 $y=\frac{1}{x^3}$ 下面的面积是显然的.)

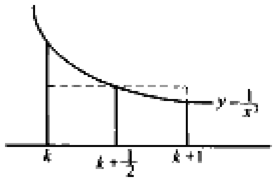


图 1

由上面的两个式子就有
$$R_n-\gamma=\sum_{k=n}^{\infty}(R_k-R_{k+1})=\sum_{k=n}^{\infty}f(k)<$$
$$\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^3}<\frac{1}{12}\int_n^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\frac{1}{24n^2}$$
另一方面,我们有
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)=x^2+2x+\frac{3}{4}<(x+1)^2$$
由此得出
$$-f'(x)>\frac{1}{4(x+1)^4}$$
类似于上面的推导得出
$$f(k)>\frac{1}{4}\int_k^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^4}=\frac{1}{12(k+1)^3}$$
因而
$$R_n-\gamma>\frac{1}{12}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3}>\frac{1}{12}\int_{n+1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}=\frac{1}{24(n+1)^2}$$

144. 证明:对 $0<x<1$ 和所有的正整数 n,成立不等式
$$\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{j-1}}{j}\right)^2<$$
$$(4\ln 2)(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n-2})$$
且常数 $4\ln 2$ 是最好的.

(AMM 6663)

证明　我们看出,对 $0<x<1$ 和正整数 n,有
$$\int_x^1\int_x^1\frac{1-(st)^n}{1-st}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{n}\int_x^1\int_x^1(st)^{j-1}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1-x^j}{j}\right)^2$$
我们可以把要证的不等式重写成
$$\int_x^1\int_x^1\frac{1-(st)^n}{1-x^{2n}}\,\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1-st}<(4\ln 2)\frac{1-x}{1+x}$$
而这个不等式显然又可从不等式

$$\int_x^1\int_x^1 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1-st} < (4\ln 2)\frac{1-x}{1+x}, 0 < x < 1$$

得出.为了证明上式,我们考虑二重积分

$$\int_x^1\int_x^1 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1-st} = \int_x^1\left[-\frac{1}{t}\ln(1-st)\right]\Bigg|_{s=x}^{s=1}\mathrm{d}t =$$

$$-\int_x^1 \ln(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{x^2}^x \ln(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{t} =$$

$$-2\int_x^1 \ln(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_{x^2}^1 \ln(1-t)\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

在后一积分中作代换 $t = \tau^2$,并注意

$$\ln(1-\tau^2) = \ln(1-\tau) + \ln(1+\tau)$$

就可把

$$\int_x^1\int_x^1 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1-st} < (4\ln 2)\frac{1-x}{1+x}, 0 < x < 1$$

式变为

$$\int_x^1 \ln(1+t)\frac{\mathrm{d}t}{t} < (2\ln 2)\frac{1-x}{1+x}, 0 < x < 1$$

通过对 t 求导可知对 $t \in (0,1)$, $\frac{\ln(1+t)}{t}$ 是递减函数,而 $\left(1+\frac{1}{t}\right)\ln(1+t)$ 是递增函数.因此对 $0 < x < 1$,我们有

$$\int_x^1 \ln(1+t)\frac{\mathrm{d}t}{t} < (1-x)\frac{\ln(1+x)}{x} =$$

$$\frac{1-x}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) < 2\ln 2\frac{1-x}{1+x}$$

这就证明了

$$\int_x^1 \ln(1+t)\frac{\mathrm{d}t}{t} < (2\ln 2)\frac{1-x}{1+x}, 0 < x < 1$$

假设在结论中可把 $4\ln 2$ 换成常数 c,让 $n\to\infty$ 并取极限就得出

$$2\int_x^1 \ln(1+t)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_x^1\int_x^1 \frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1-st} \leqslant c\frac{1-x}{1+x}, 0 < x < 1$$

在
$$\frac{2}{1-x}\int_x^1 \ln(1+t)\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{c}{1+x}$$

中令 $x\to 1$ 就得出 $2\ln 2 \leqslant \frac{c}{2}$ 或 $c \geqslant 4\ln 2$,这就说明常数 $4\ln 2$ 是最好的.

(AMM 11145)

145. 对 $n \geqslant 1$ 和 $a_1, \cdots, a_n > 0$，求出使得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}} \leqslant c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

成立的最小常数.

解 用 S_n 表示要证的不等式的左边. 由柯西 - 施瓦兹(Cauchy - Schwartz) 不等式可知

$$\left(\sum_{j=1}^{k} j\right)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{k} j a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}\right)$$

或等价地

$$\frac{k}{\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{a_j}} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{j=1}^{k} j^2 a_j$$

对 k 求和得出

$$S_n \leqslant 2\sum_{j=1}^{n} j^2 a_j \sum_{k=j}^{n} \frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant 2\sum_{j=1}^{n} j^2 a_j \sum_{k=j}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} =$$

$$2\sum_{j=1}^{n} j^2 a_j \sum_{k=j}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) =$$

$$2\sum_{j=1}^{n} j^2 a_j \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) < 2\sum_{j=1}^{n} a_j$$

由此可见，所给的不等式对 $c = 2$ 成立.

为说明 $c = 2$ 是可能的最小常数. 我们令 $a_j = \frac{1}{j}$，在这种情况下，左边成为 $2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$，而右边是 $c\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$，由于调和级数是发散的，所以必须 $c \geqslant 2$，因而使所给不等式成立的最小常数就是 $c = 2$.

(AMM E1437)

146. 研究 $0 < x < \pi$ 时，以下级数的收敛性：

(1) $x + \sin x + \sin(\sin x) + \sin(\sin(\sin x)) + \cdots$;

(2) $x - \sin x + \sin(\sin x) - \sin(\sin(\sin x)) + \cdots$.

解 (1) 用 $\sin_n x$ 表示级数的第 c 项，那么对 $0 < x < \pi$，$\sin_1 x = x$，$\sin_2 x = r$，$0 < r < 1$，$\sin_3 x = \sin r > r - \frac{r^3}{6} > \frac{r}{2}$. 我们用数学归纳法证明当 $n \geqslant 3$ 时，$\sin_{n+1} x > \frac{r}{n}$. 由归纳法假设有 $\sin_n x > \frac{r}{n-1}$，那么

$$\sin_{n+1}x = \sin(\sin_n x) > \sin\frac{r}{n-1} > \frac{r}{n-1} - \frac{r^3}{6(n-1)^3} \geqslant$$
$$\frac{r}{n} + \frac{r}{n(n-1)}\left(1 - \frac{nr^2}{6(n-1)^2}\right) >$$
$$\frac{r}{n} + \frac{r}{n(n-1)}(1 - r^2) > \frac{r}{n}$$

那样由调和级数的发散性就得出对所有的 $x, 0 < x < \pi$,级数发散.

(2)对 $0 < x < \pi$,叙列 $\sin_n x$ 是单调递减有下界的,因此存在极限 $L = \sin L$,这蕴含 $L = 0$.再由交错级数检验法可知对所有的 $x, 0 < x < \pi$,级数收敛.

(AMM E2170)

147. 设当 $n \to \infty$ 时 $a_n \to \infty$,证明:$\sum_{n=1}^{\infty} \arccos\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \infty$.

证明 如果 $0 < x_1 < x_2 < x_3$,那么容易证明

$$\arccos\left(\frac{x_1}{x_3}\right) \leqslant \arccos\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \leqslant \arccos\left(\frac{x_2}{x_3}\right)$$

(只要两边都取余弦即可).这样易于用数学归纳法证明,如果 $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$,那么

$$\arccos\left(\frac{x_1}{x_n}\right) \leqslant \arccos\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + \arccos\left(\frac{x_2}{x_3}\right) + \cdots + \arccos\left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

设 $k_0 = 1$, k_1 是使得 $a_{k_1} \geqslant 2a_{k_0}$ 的最小正整数.一般,k_i 是使得 $a_{k_i} \geqslant 2a_{k_{i-1}}$ 的最小正整数.注意 $\frac{a_{k_{i-1}}}{a_{k_i}} \leqslant \frac{1}{2}$.又设 $S_n = \sum_{i=1}^{n} \arccos\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right)$,那么由上式就有

$$S_{k_n-1} = \sum_{i=1}^{k_n-1} \arccos\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}\right) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \arccos\left(\frac{a_{k_{j-1}}}{a_{k_j}}\right) \geqslant n\arccos\left(\frac{1}{2}\right) > n$$

这就证明了所要的结论.

(AMM 4770)

148. 研究级数 $S = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^n n$ 的收敛性.

解 此级数发散.由于我们可以证明 $\sup |\sin^n n| = 1$.

由于 $\frac{\pi}{2}$ 是无理数,因此存在无穷多个有理数 $\frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$,使得

$$\left|\frac{\pi}{2}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2} \quad ①$$

我们可以进一步假设 q 是奇数，由于 $\frac{p}{q}$ 可以取成 $\frac{\pi}{2}$ 的连分式展式的各阶渐近分数.而易于证明两个连续的渐近分数的分母不可能都是偶数.从 ① 我们有

$$\left|\frac{q\pi}{2}-p\right|<\frac{1}{q}$$

因此
$$\frac{q\pi}{2}-\frac{1}{q}<p<\frac{q\pi}{2}+\frac{1}{q}$$

因而
$$|\sin p|>\cos\frac{1}{q}>1-\frac{1}{2q^2}$$

由于 $\frac{p}{q}$ 是接近于 $\frac{\pi}{2}$ 的，因此我们可以假设 $\frac{p}{q}<2$ 或 $p<2q$，那样

$$|\sin^p p|>\left(1-\frac{1}{2q^2}\right)^p>\left(1-\frac{1}{2q^2}\right)^{2q}\geqslant$$

$$1-\frac{1}{q}>1-\frac{2}{p}$$

由于有无限多个 p,q 满足上式，且 p,q 可以任意大，因而从上式就得出 $\sup|\sin^n n|=1$.

(AMM E2675)

149. 设 n 是一个正整数，$f(n)$ 是 n 的十进制数字表示中 0 的个数.问对 $a>0$ 的哪些值，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{f(n)}}{n^2}$$

收敛?

解 考虑由 $m+1$ 位数字 $10^m\leqslant n<10^{m+1}$ 所组成的部分和 S_m.在这个部分和中，对任意 k，共有 $C_m^k 9^{m+1-k}$ 个数使得 $f(n)=k$.对 S_m 中的每个 n，由 $10^m\leqslant n<10^{m+1}$ 得出

$$\frac{1}{10^{2m+2}}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{10^{2m}}$$

设
$$M_m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k 9^{m+1-k}a^k=9(9+a)^m$$

则
$$\frac{M_m}{10^{2m+2}}\leqslant S_m\leqslant\frac{M_m}{10^{2m}}$$

或
$$\frac{9}{100}\left(\frac{9+a}{100}\right)^m\leqslant S_m\leqslant 9\left(\frac{9+a}{100}\right)^m$$

由此即可得出当 $0<a<91$ 时级数收敛，当 $a\geqslant 91$ 时，级数发散.

150. 证明:对每个使得 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 的实数叙列,都存在一个叙列 b_n 使得 $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant 0$, $\sum b_n$ 发散而 $\sum a_n b_n$ 绝对收敛. (AMM E2591)

证明 定义一个正整数的叙列 m_k 使得

(1) 如果 $n \geqslant m_k$,则 $|a_n| < \frac{1}{2^k}$.

(2) $m_k > 2m_{k-1}$.

对 $m_k < n \leqslant m_{k+1}$,定义 $b_n = \frac{1}{m_{k+1} - m_k}$,那么由(2)对所有的 k 成立

$$m_{k+1} - m_k > m_k - m_{k-1}$$

因此
$$b_{k+1} \leqslant b_k$$

由于
$$\sum_{m_k+1}^{m_{k+1}} b_n = 1$$

因此 $\sum b_n$ 是发散的,但是由于

$$\sum_{m_k+1}^{m_{k+1}} |a_n b_n| = \frac{1}{m_{k+1} - m_k} \sum_{m_k+1}^{m_{k+1}} |a_n| \leqslant \frac{1}{2^k}$$

因此 $\sum a_n b_n$ 是绝对收敛的.

151. 设 $\frac{1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$,其中 $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, $0 \leqslant b_i \leqslant 1$. 证明: $|c_n| \leqslant F_n$,其中 F_n 表示第 n 个斐波那契数.

证法1 c_n 由循环关系

$$c_1 = a_1 - b_1, c_n = a_n - b_n - \sum_{k=1}^{n-1} c_k b_{n-k}, n \geqslant 2$$

给出. 设 $n \geqslant 2$,把 $c_{n-1} = a_{n-1} - b_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} c_k b_{n-1-k}$(当 $n = 2$ 时,把 $c_1 = a_1 - b_1$)代入上式得出

$$c_n = (a_n - b_n) - (a_{n-1} - b_{n-1}) b_1 + \sum_{k=1}^{n-2} c_k (b_{n-1-k} b_1 - b_{n-k})$$

(当 $n = 2$ 时,最后的和式是空的.)由于 $0 \leqslant a_i \leqslant 1$, $0 \leqslant b_i \leqslant 1$,通过取绝对值,我们发现

$$|c_n| \leqslant 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-2} |c_k|, |c_1| \leqslant 1$$

但是第 n 个斐波那契数 $F_n = 1 + \sum_{k=0}^{n-2} F_k$,因此由数学归纳法就得出 $|c_n| \leqslant F_n$.

注 Dr. J. E. Potter, of M.I.T. Instrumentation Lab 指出,对 $0 \leqslant a_i \leqslant 1$,$0 \leqslant b_i \leqslant 1$,$c_n$ 由行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & a_n \end{vmatrix}$$

给出,因此这个结果也是关于这种行列式的一种陈述.

证法2 设 $f(x) = \dfrac{1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots}{1 + b_1x + b_2x^2 + \cdots}$,用 $1 - b_1x$ 乘以分子分母,得到

$$f(x) = \frac{1 + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_1a_1)x^2 + \cdots}{1 + (b_2 - b_1^2)x^2 + (b_3 - b_1b_2)x^3 + \cdots} \ll$$
$$\frac{1 + x + x^2 + \cdots}{1 - x^2 - x^3 - \cdots} = \frac{1}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_nx^n$$

其中 F_n 是第 n 个斐波那契数.

(AMM 5346)

152. 设 $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.对每个 x,由 $H(n(x)) \leqslant x < H(n(x) + 1)$,定义了一个函数 $n(x)$.又设 $E(x) = e^{x-\gamma} - \dfrac{1}{2}$,其中 $\gamma = 0.57\cdots$ 是欧拉常数,$\alpha(x) = \dfrac{1}{e^{x-1} - 1}$,$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,证明:当 $x \geqslant 2$ 时

$$\left[E(x) - \frac{3}{2}\alpha(x)\right] \leqslant n(x) \leqslant \left[E(x) + \frac{1}{12}\alpha(x)\right]$$

证明 由欧拉 - 马克劳林(Euler - Maclaurin)公式可知

$$\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \leqslant H(n) \leqslant \ln n + \gamma + \frac{1}{2n}$$

在此式中令 $n = n(x)$ 就得出

$$\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} \leqslant H(n) \leqslant x < H(n + 1) \leqslant$$
$$\ln (n + 1) + \gamma + \frac{1}{2(n + 1)}$$

因此得出

$$na(n)=n\exp\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{12n^2}\right)<e^{x-\gamma}<$$

$$n\exp\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}-\frac{4}{4}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{n^3}-\cdots\right)=nb(x)$$

容易证明当 $n\geqslant 2$ 时(对应于 $x\geqslant\frac{3}{2}$),有

$$nb(n)<n+\frac{3}{2}+\frac{3}{2n},na(n)>n+\frac{1}{2}-\frac{1}{12n}$$

现在,应用众所周知的不等式 $\ln(n+1)<H(n)<\ln n+1$ 就得出

$$e^{x-1}-1<n=n(x)<e^x-1$$

由此即可得出所要的结果.

(AMM E3052)

153.证明:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k(n-k)^n=n^n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

证明 由于

$$(n-k)^n=\sum_{m=0}^{n}(-1)^mC_n^mk^mn^{n-m}$$

我们可以把所给的和写成

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-1}C_n^mn^{n-m}S(m-1,n)$$

其中 $$S(p,n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^kk^p,n>0$$

现在 $$S(0,n)=(1-1)^n-1=-1$$

$$S(-1,n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^k\int_0^1x^{k-1}dx=$$

$$\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-1)^kC_n^kx^{k-1}dx=\int_0^1\frac{(1-x)^n-1}{x}dx=$$

$$-\int_0^1(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+1)dy$$

$$y=1-x=-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

由于易于看出,对 $p>0$,$(-1)^nS(p,n)$ 恰是第二类斯特灵(Stirling)数,也就是把一个 p 元素集合分成 n 个非空子集的方法的数目,故对 $0<p<n$,$S(p,n)=0$.这就得出

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}C_n^k(n-k)^n=n^n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-1\right)$$

(AMM 5203)

154. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin \frac{x}{n}$ 是否在整个直线上都是 x 的有界函数?

解 所说的函数不是在整条直线上有界的函数.

设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin \frac{x}{n}$,此函数在每个有限区间上是一致收敛的,但并不在整条直线上一致收敛.此级数的导数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos \frac{x}{n}$ 在整条直线上是一致收敛的,它的和函数 $\varphi(x)$ 作为一个一致收敛级数的极限是一个几乎周期(almost periodic)函数.因此如果 $f(x)$ 在整条直线上是有界的,那么 $f(x) = \int_0^x \varphi(x)\mathrm{d}x$ 将也是几乎周期的,因而存在平均值

$$T = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x)\mathrm{d}x$$

但是另一方面

$$T = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \cos \frac{t}{n}\right) =$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2}{t}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2 \frac{t}{2n} = \lim_{t_k\to\infty} \frac{2}{t_k}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2 \frac{t_k}{2n}$$

令 $t_k = k\pi$,$(k = 1,2,\cdots)$,则

$$T = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2 \frac{k\pi}{2n}$$

对固定的 k,如果 $n > k$,则 $\sin \frac{k\pi}{2n} > \frac{k}{n}$,因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2 \frac{k\pi}{2n} > \sum_{n=k+1}^{2k} \frac{k^2}{n^2} > \frac{k}{4}$$

这又说明 T 不可能是有限的,所得的矛盾就说明函数 $f(x)$ 不可能在全直线上有界.

(AMM 5466)

155. 讨论当 $x \to \infty$ 时,$\sum_{n\leqslant x}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sin \frac{x}{n} + \sin \frac{n}{x}\right)$ 的收敛性.

解 当 $x \to \infty$ 时,所给的表达式是无界的.为此,将它写成下述形式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin \frac{x}{n} - \sum_{n>x} \frac{1}{n}\sin \frac{x}{n} + \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n}\sin \frac{n}{x}$$

上式的第一项上题已证是无界的,其余两项的界可以由下式得出

$$\sum_{n>x}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}<\sum_{n>x}\frac{x}{n^2}<x\int_{x-1}^{\infty}\frac{dt}{t^2}=\frac{x}{x-1},x>1$$

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\sin\frac{n}{x}<\sum_{n>x}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{x}\right)\leqslant 1,x\geqslant 1$$

(AMM E2009)

156. 作为迪利克雷判别法的一个例子，众所周知，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin n}{\ln n}$ 是收敛的，这个级数是否是绝对收敛的?

解 由于 $\sin x$ 和 $\sin(x+1)$ 不可能同时为零，因此 $|\sin x|+|\sin(x+1)|$ 总是正的，然而这个函数是连续的周期函数，因此对全体实数 $x\in\mathbf{R}$，存在正数 b 使得

$$|\sin x|+|\sin(x+1)|\geqslant b$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin n|}{\ln n}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\sin 2k|}{\ln 2k}+\frac{|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}\right)\geqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\sin 2k|+|\sin(2k+1)|}{\ln(2k+1)}\geqslant$$

$$b\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2k+1)}$$

那样，这个级数不可能是绝对收敛的.

157. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是实数的收敛级数，又设存在常数 β 使得对所有非负整数 n，以下两条件之一成立(定义 $a_0=0$):

(1) $na_n\geqslant(n+\beta)a_{n-1}$.

(2) $na_n\leqslant(n+\beta)a_{n-1}$.

那么 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. (Frantisek Stepanek, An Extension of Olivier's Theorenm, AMM Vol.72, No6:654-655).

证明 这两个条件是等价的，由于可以通过把级数乘以 -1 而互相转化，因此我们只须对条件(1)加以证明即可. 令

$$r_1=s_1=0,r_n=na_n$$

$$s_n=-(1+\beta)\sum_{i=1}^{n-1}a_i,n\geqslant 2,h_n=r_n+s_n$$

条件(1)可以写成以下形式

$$na_n\geqslant(n-1)a_{n-1}+(1+\beta)a_{n-1},n\geqslant 2$$

而由上式立即可以得出

$$h_n\geqslant h_{n-1}$$

因此叙列 $\{h_n\}$ 是不减的. 由假设, 叙列 $\{s_n\}$ 存在有限极限, 这就得出叙列 $\{r_n\}$ 是收敛的. 由此即可得出结果.

（AMM 5169）

158. 设 $0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots, u_n \leqslant n, S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, 证明: 对所有的 $\alpha > 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n}{S_n}\right)^{\alpha}$ 收敛.

证明　更一般的, 我们将证明如果 $xf(x)$ 是正的, 对 $x \geqslant a$ 是不增的并且 $\int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x < \infty$, 那么

$$\sum_{n=N}^{\infty} f\left(\frac{S_n}{u_n}\right) < \infty \quad ①$$

其中 N 是一个充分大的正数.

我们首先证明如果 $d_n \geqslant 0, D_n = \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \to \infty$, 那么

$$\sum_{n=N}^{\infty} d_n f(D_n) < \infty,\quad D_N \geqslant a \quad ②$$

事实上, 当用较弱的条件 $f(x)$ 是正的, 当 $x \geqslant a$ 时不增来代替关于 $f(x)$ 的前一部分条件时, 式 ② 成立, 因为我们有

$$d_n f(D_n) \leqslant \int_{D_{n-1}}^{D_n} f(x)\mathrm{d}x \quad, D_{n-1} \geqslant a$$

这就说明式 ② 成立.

首先假设 $u_n < \infty$, 那么对所有的充分大的 $n, \frac{S_n}{u_n} > \frac{1}{2}n$, 并且 ① 就是 ② 的当 $d_n = \frac{1}{2}$ 时的一个特例.

现在设 $u_n = \infty$, 设

$$d_1 = u_1$$

$$d_n = \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = \frac{nu_n - S_n}{n(n-1)} \geqslant 0, n \geqslant 2$$

那么
$$D_n = \sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{S_n}{n} \to \infty$$

并且
$$d_n f(D_n) \geqslant \left(\frac{u_n}{S_n} - \frac{1}{n}\right)\frac{S_n}{n} f\left(\frac{S_n}{u_n}\right)$$

因此由 ② 就得出

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{u_n}{S_n} - \frac{1}{n}\right)\frac{S_n}{u_n} f\left(\frac{S_n}{u_n}\right) < \infty, \frac{S_N}{N} \geqslant a \quad ③$$

设 N_1 和 N_2 是两个大于 N 的正整数集合, 使得

当 $n \in N_1$ 时，$\frac{S_n}{u_n} \geqslant \frac{n}{2}$；当 $n \in N_2$ 时，$\frac{S_n}{u_n} < \frac{n}{2}$；那么

$$\sum_{N_1} \frac{S_n}{nu_n} f\left(\frac{S_n}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{N_1} f\left(\frac{n}{2}\right) < \infty \qquad ④$$

而由 ③，由于当 $n \in N_2$ 时，$\frac{u_n}{S_n} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n}$，所以

$$\sum_{N_2} \frac{S_n}{nu_n} f\left(\frac{S_n}{u_n}\right) < \infty \qquad ⑤$$

由 ③，④，⑤ 就得出 ①. 然后在 ① 中取 $f(x) = \frac{1}{x^a}$，$a > 1$ 即得出结论.

（AMM 10624）

> 159. 设 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ 是严格递减的数列，当 $n \to \infty$ 时，$a_n \to 0$.
>
> $$S_n = \sum_{j=n}^{\infty} (-1)^{j-n} a_j = a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - \cdots$$
>
> 证明：当且仅当 $\sum a_n^2$ 收敛时，$\sum a_n S_n$ 收敛.

证明 更一般的，我们证明三个级数 $\sum S_n^2$，$\sum a_n S_n$ 和 $\sum a_n^2$ 同时收敛或发散. 由交错级数收敛性的判别法可知 S_n 存在，且 $0 < S_n < a_n$，因此

$$\sum S_n^2 < \sum a_n S_n < \sum a_n^2$$

那样只须证明 $\sum S_n^2$ 的有限性蕴含 $\sum a_n^2$ 的有限性即可. 为此利用 $S_n = a_n - S_{n+1}$ 及不等式 $(x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$ 可得

$$\sum a_n^2 = \sum (S_n + S_{n+1})^2 \leqslant 2\sum (S_n^2 + S_{n+1}^2) =$$
$$2\sum S_n^2 + 2\sum S_{n+1}^2 < 4\sum S_n^2$$

由此即可推出所需的结论.

（AMM E2558）

> 160. 设 $\sum a_n$ 是正项收敛级数，$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，问对 p 的哪些值 $\sum \frac{a_n}{s_n^p}$ 收敛?

解 如果 $p > 1$，那么

$$\frac{a_n}{s_n^p} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^p} < \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$$

由于右边的积分是收敛的，因此所给的级数收敛.

如果 $p \leqslant 1$，那么对充分大的 n 我们有 $s_n > 1$，并且

$$\frac{a_n}{s_n^p}=\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n^p}\geqslant\frac{s_n-s_{n-1}}{s_n}=1-\frac{s_{n-1}}{s_n}$$

由于乘积 $\prod_{n=2}^{\infty}\frac{s_{n-1}}{s_n}$ 发散到零,因此所说的级数发散.

> 161. 设在 $x>0$ 上 $f(x)$ 连续,严格递增,当 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to\infty$. f^{-1} 表示 f 的反函数.
>
> (1) 证明:当且仅当 $\sum\limits_{n>0}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ 收敛时,$\sum\limits_{n>0}\frac{1}{f(n)}$ 收敛.
>
> (2) 证明:如果 $\sum\limits_{n>0}\frac{1}{f(n)}$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{f(k)\leqslant n}f(k)=0$.

(AMM E2944)

证明 (1)不失一般性,可设存在 $x>0$,使得 $f(x)=1$. 那么由于 $\frac{1}{f}$ 是单调递减的,所以当且仅当 $\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$ 收敛时,级数 $\sum\limits_{n>0}\frac{1}{f(n)}$ 收敛. 同理,由于对任意 $x\in[m,m+1]$,有

$$\frac{f^{-1}(m+1)}{m^2}\geqslant\frac{f^{-1}(x)}{x^2}\geqslant\frac{f(m)}{(m+1)^2}$$

故当且仅当 $\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(x)\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛时,$\sum\limits_{n>0}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ 收敛.

此外还有

$$\int_1^{n}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int_{f(1)}^{f(n)}\frac{1}{y}\mathrm{d}f^{-1}$$

在这里,我们做变量替换 $y=f(x)$ 并把所有的积分看成黎曼-斯蒂尔切斯(Riemann - Stieltjes)积分.

注意当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{1}{y}\mathrm{d}f^{-1}$ 有限时,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{f(1)}^{f(n)}\frac{1}{y}\mathrm{d}f^{-1}$ 有限.

显然

$$\int_1^{n}\frac{1}{y}\mathrm{d}f^{-1}=\left[\frac{1}{y}f^{-1}\right]\Big|_1^n-\int_1^{n}f^{-1}(y)\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)=$$

$$\frac{f^{-1}(n)}{n}-\frac{f^{-1}(1)}{1}+\int_1^{n}\frac{f^{-1}(y)}{y^2}\mathrm{d}y$$

因此当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f^{-1}(n)}{n}+\int_1^{n}\frac{f^{-1}(y)}{y^2}\mathrm{d}y\right]<\infty$$

时，$\int_1^{\infty}\frac{dx}{f(x)}$ 收敛.

现在$\sum_{n>0}\frac{1}{f(n)}$收敛蕴含$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f^{-1}(n)}{n}+\int_1^n\frac{f^{-1}(y)}{y^2}dy\right]<\infty$，而它又蕴含$\int_1^{\infty}\frac{f^{-1}(y)}{y^2}dy$ 收敛，因而$\sum_{n>0}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$收敛. 反之$\sum_{n>0}\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$收敛蕴含极限$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{-1}(n)}{n}$和$\lim_{n\to\infty}\int_1^n\frac{f^{-1}(y)}{y^2}dy$有限，因而$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f^{-1}(n)}{n}+\int_1^n\frac{f^{-1}(y)}{y^2}dy\right]<\infty$，所以$\int_1^{\infty}\frac{dx}{f(x)}$收敛，因而$\sum_{n>0}\frac{1}{f(n)}$收敛.

(2) 由于$f(x)$是递增的，如果$\sum_{n>0}\frac{1}{f(n)}$收敛，那么$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{f(x)}=0$. 令$f^{-1}(n)=x_n$，我们有

$$\frac{1}{n^2}\sum_{f(k)\leqslant n}f(k)=\frac{1}{n^2}\sum_{k\leqslant x_n}f(k)\leqslant\frac{1}{n^2}\cdot x_n\cdot n=\frac{x_n}{f(x_n)}\to 0$$

(AMM 5204)

162. 设 a 是一个大于 1 的正整数，$q_1,q_2,\cdots$ 是正整数的叙列，满足 $q_{n+1}>2q_n,n=1,2,\cdots$. 证明：$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a^{q_n}}\right)$是无理数.

证明 从 $q_{n+1}-q_n-q_n\geqslant 1$ 立即得出

$$q_{n+1}-(q_1+q_2+\cdots+q_n)\geqslant n+1$$

令 $s=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{a^{q_n}}\right)$，我们有

$$s=1+\frac{1}{a^{q_1}}+\left(\frac{1}{a^{q_2}}+\frac{1}{a^{q_1+q_2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a^{q_n}}+\cdots+\frac{1}{a^{q_1+\cdots+q_n}}\right)+\cdots$$

上述级数的每一项都产生一个 s 的 a 进位小数展式中某位上的数字 1. 而其他的数字都是 0. 这就得出，在 $q_1+\cdots+q_n$ 位和 q_{n+1} 位之间存在一个由全是 0 组成的"块"，而且这个"块"的长度大于等于 $n+1$，这就说明 s 的 a 进位小数展式不可能是一个循环小数，因此必是无理数.

(AMM 10231)

163. 设 m,n 是正整数，$f(m,n)=\sum_{k=1}^{\infty}k^n\left(\frac{m}{m+1}\right)^k$，证明：

(1) $f(m,n)$ 是一个整数.

(2) $f(1,n)$ 的末位数只可能是 0，2 或 6.

证明 (1) 设 $g_n(x)=f(x,n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^n\left(\frac{x}{x+1}\right)^k$,这个级数在正半轴上一致收敛,逐项微分得

$$g'_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}k^nk\left(\frac{x}{x+1}\right)^{k-1}\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{g_{n+1}(x)}{x(x+1)}$$

因此
$$g_{n+1}(x)=x(x+1)g'_n(x)$$

由计算可知 $g_0(x)=x$,由递推关系可知,每个 $g_n(x)$ 都是 x 的整系数多项式,因此 $f(m,n)$ 是一个整数.

(2) 我们有 $f(m,1)=g_1(m)=m^2+2m$,利用递推关系可得

$$f(m,2)=2m^3+3m^2+m$$
$$f(m,3)=6m^4+12m^3+7m^2+m$$
$$f(m,4)=24m^5+60m^4+50m^3+15m^2+m$$
$$f(m,5)=120m^6+360m^5+390m^4+180m^3+31m^2+m$$

由此可知
$$f(m,5)\equiv f(m,1)\pmod{10}$$

因此对固定的 m 在模 10 下,这些多项式以周期 4 循环,对 $m=1$,一个周期是 2,6,6,0,这就证明了结论.

164. 设 m 和 k 是正整数,证明:当且仅当 $k\equiv 0\pmod m$ 时

$$S(m,k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(nm+k)}$$

是有理数. (AMM 6424)

证明 当 $\frac{k}{m}$ 是整数时,利用简单的部分分式分解就可得出

$$S(m,k)=\frac{1}{m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{k}$$

这显然是一个有理数.

假设 $\frac{k}{m}$ 不是整数,由 $\Gamma(x)$ 的有限乘积的对数微分得出一个著名的公式(见 T. J. I'A. Bromwith, An Introduction to the Theory of Infinite Series, 2[nd] ed., Macmillan, 1926, 522)

$$\psi(x)=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)},x\neq-1,-2,\cdots$$

其中 γ 是欧拉常数并且 $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$,因此

$$kS(m,k)=\psi\left(\frac{k}{m}\right)+\gamma+\frac{m}{k}$$

因此由 Gauss 公式(见 T. J. I'A. Bromwith, An Introduction to the Theory of Infinite Series, 2[nd] ed., Macmillan, 1926, 523)

$$kS(m,k)=\frac{m}{k}-\ln m-\frac{\pi}{2}\cot\frac{k\pi}{m}+$$

$$\sum_{r=1}^{m-1}\cos\frac{2\pi rk}{m}\cdot\ln 2\sin\frac{r\pi}{m}$$

那样 $S(m,k)$ 是代数数的对数的系数为代数数的线性组合，并且由 Alan Baker 的定理（见 A. Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge University Press, 1975, 1, 定理 2.2）可知 $S(m,k)$ 是超越的.

165. 设 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}<\infty$，其中 p_n 和 q_n 是满足不等式

$$\frac{p_n}{q_n(q_n-1)}\geqslant\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}-1}, n=1,2,\cdots$$

的正整数. 设 S 是使得上述不等式严格成立的下标的集合，证明：当且仅当 S 是无限集时，x 是无理数.

证明 所给的不等式等价于

$$\frac{p_n}{q_n-1}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}-1}\geqslant\frac{p_n}{q_n}$$

显然 $\frac{p_n}{q_n-1}\to 0$，因此 $\frac{p_m}{q_m-1}\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$. 当且仅当 S 有限时，对足够大的 m 等号成立. 那样，S 有限立即蕴含 x 是有理数. 反过来，如果 $x=\frac{a}{b}$ 是有理的，令

$$r_n=\frac{a}{b}-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{q_k}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{p_k}{q_k}\leqslant\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}-1}$$

$$Q_n=bq_1\cdots q_n$$

那么

$$Q_{n+1}r_{n+1}=Q_nr_nq_{n+1}-bq_1\cdots q_nq_{n+1}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\leqslant$$

$$Q_nr_nq_{n+1}-Q_nr_n(q_{n+1}-1)=Q_nr_n$$

一个非负整数的递减叙列最终必会成为一个常数，因此 S 必须是有限的，这就证明了结果.

(AMM E2923)

166. 设 $1<a_1<a_2<\cdots$ 是正整数，证明：$\gamma=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{a_n}}{a_n!}$ 是无理数.

证明 设 $\xi(n)$ 表示 n 的二进表示式中的各位数字之和（也就是 n 的二进表示式中数字 1 的个数），那么勒贝格的一个初等的定理断言 $n!=2^{n-\xi(n)}\beta(n)$，其中 $\beta(n)$ 是奇数. 显然 $\beta(n)\mid\beta(n+1)$.

现在 $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n 2^n}{n!}$，其中 δ_n 是一个由 0 和 1 组成的无限叙列，在这个叙列中，1 出现无限多次. 如果 γ 是有理数，那么 $\gamma = \frac{h}{k}$，其中 h 和 k 都是正整数. 再设 $k = 2^s t$，其中 t 是奇数. 设 N 是一个大于 $\max(t, 2^{s+2})$ 的 2 的幂. 由于 t 是小于 N 的奇数，这就得出 $t \mid \beta(N)$，因此 $2^s\beta(N)\gamma = \frac{\beta(N)h}{t}$ 是一个整数. 又设

$$u_N = 2^s\beta(N)\sum_{n=1}^{N} \frac{\delta_n 2^n}{n!} = 2^s \sum_{n=1}^{N} \frac{\delta_n 2^{\xi(n)}\beta(N)}{\beta(n)}$$

那么显然 u_N 也是整数.

另一方面，由于我们已经假设 $\xi(N) = 1$，因此我们有

$$\begin{aligned} 2^s\beta(N)\gamma - u_N = {} & 2^s\beta(N)\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\delta_n 2^n}{n!} = \\ & 2^{s-N+1}N!\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\delta_n 2^n}{n!} = \\ & 2^{s+2}\sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n 2^{n-N-1}\prod_{j=N+1}^{n} \frac{1}{j} < \\ & \frac{2^{s+2}}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{2}{N+2}\right)^{n-N-1} = \\ & \frac{2^{s+2}}{N+1}\cdot\frac{N+2}{N} < \frac{2^{s+3}}{N+1} < 1 \end{aligned}$$

这和 $2^s\beta(N)\gamma - u_N$ 是两个整数的差因而还是一个整数矛盾. 这就说明 γ 不可能是有理数，因而必是一个无理数.

167.（1）设 $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots$ 是严格递增的正整数. 证明：如果存在整数 $r \geqslant 0$ 使得级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^r}{a_k}$$

发散，则 $\xi = 0.(a_1)(a_2)(a_3)\cdots$ 是一个无理数.

（2）设 2,3,5,7,$\cdots$ 是所有的素数组成的数列，证明：$\xi = 0.235\,7\cdots$ 是无理数.

（3）设 1,4,9,16,25,$\cdots$ 是所有的完全平方数组成的数列，证明：$\xi = 0.149\,162\,5\cdots$ 是无理数.

(A . McD . Mercer , A Note on Some Irrational Decimal Fractions , AMM Vol .101(1994) , No 6;567-568)

证明　（1）设 $\xi = 0.(a_1)(a_2)(a_3)\cdots$ 是有理数，那么将它写成通常的小数形式后，ξ 是一个循环小数. 设其循环的周期为 p. 不失一般性，不妨设 ξ 是一个纯循环小数. 否则我们可考虑另一个

小数 $\eta = 10^m(\xi - d)$，其中 $d = 0.d_1d_2\cdots d_m$ 是 ξ 的不循环部分．那么 ξ,η 同时为有理数或同时为无理数．因此只须证明 η 是无理数即可，而 η 已经是纯循环小数了．

设 N_k 是 a_k 的十进表示中所含有的数字的个数，则由于 a_k 是严格递增的正整数，所以显然 $N_k \leqslant N_{k+1}$．由于 a_k 的最高位数字至少是1，因此

$$a_k \geqslant c_k = 10^{N_k-1} \quad ①$$

由于 $N_k \leqslant N_{k+1}$，因此可能发生两种情况：$N_k = N_{k+1}$ 或 $N_k < N_{k+1}$．

如果 $N_k = N_{k+1}$，则 $c_{k+1} = c_k$，如果 $N_k < N_{k+1}$，则

$$c_{k+1} \geqslant 10c_k \quad ②$$

设数列 $\{N_k\}$ 所取得值构成的数列是 $\{V_k\}$，那么 $\{V_k\}$ 显然是一个严格递增的整数数列，而 $\{N_k\}$ 是一个阶梯状的整数数列．又设 V_k 这个值在数列 $\{N_k\}$ 中共出现了 m_k 次（显然每个 V_k 在数列 $\{N_k\}$ 中只能出现有限次，否则 $\{N_k\}$ 将是一个有界数列，而这与 a_k 是严格递增的正整数矛盾．又由于 $\{V_k\}$ 是严格递增的整数数列，因此这有限个相等的 V_k 值只能连续地出现）．我们证明必有 $m_k < p$，这只要证明至多只可能有 p 个相等的 N_k 连续出现．假设不然，在数列 $\{N_k\}$ 中出现了 $p+1$ 个相等的 N_k，即存在某个下标 v 使得

$$N_v = N_{v+1} = \cdots = N_{v+p} = N$$

那就是说
$$a_v = b_{01}b_{02}\cdots b_{0N}$$
$$a_{v+1} = b_{11}b_{12}\cdots b_{1N}$$
$$\cdots$$
$$a_{v+p} = b_{p1}b_{p2}\cdots b_{pN}$$

那么由于 pN 是 ξ 的小数表示的周期，因此就有 $b_{01} = b_{p1}, b_{02} = b_{p2},\cdots,b_{0N} = b_{pN}$，因而 $a_v = a_{v+p}$，而这与 $a_v < a_{v+p}$ 矛盾，这就说明至多只可能有 p 个相等的 N_k 连续出现，因而必有

$$m_k < p \quad ③$$

现在设

$$\xi = 0.(a_1)(a_2)(a_3)\cdots = 0.[(a_1)(a_2)\cdots(a_{k_1})][(a_{k_1+1})(a_{k_1+2})\cdots(a_{k_2})][(a_{k_2+1})(a_{k_2+2})\cdots(a_{k_3})]\cdots$$

其中 $N_1 = N_2 = \cdots = N_{k_1} < N_{k_1+1} = N_{k_1+2} = \cdots = N_{k_2} < N_{k_2+1} = N_{k_2+2} = \cdots = N_{k_3} < \cdots$

那么显然有

$$k_1 = m_1, k_2 = m_1 + m_2, k_3 = m_1 + m_2 + m_3, \cdots \quad ④$$

于是由式①，②，③，④可知

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^r}{a_k}=\sum_{k=1}^{k_1}\frac{k^r}{a_k}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\frac{k^r}{a_k}+\sum_{k=k_2+1}^{k_3}\frac{k^r}{a_k}+\cdots\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{k_1}\frac{K_1^r}{a_k}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\frac{K_2^r}{a_k}+\sum_{k=k_2+1}^{k_3}\frac{K_3^r}{a_k}+\cdots\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{k_1}\frac{m_1^r}{a_k}+\sum_{k=k_1+1}^{k_2}\frac{(m_1+m_2)^r}{a_k}+$$

$$\sum_{k=k_2+1}^{k_3}\frac{(m_1+m_2+m_3)^r}{a_k}+\cdots\leqslant$$

$$\frac{m_1\cdot m_1^r}{c_{k_1}}+\frac{m_2(m_1+m_2)^r}{c_{k_2}}+$$

$$\frac{m_3(m_1+m_2+m_3)^r}{c_{k_3}}+\cdots\leqslant$$

$$\frac{pp^r}{c_1}+\frac{p(2p)^r}{10c_1}+\frac{p(3p)^r}{10^2c_1}+\cdots\leqslant\frac{p^{r+1}}{c_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^r}{10^{k-1}}$$

由于当 $k\to\infty$ 时，$\frac{k^{r+2}}{10^{k-1}}\to 0$，因此上面的级数将小于 $\frac{p^{r+1}}{c_1}\left(M+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)$，因而是收敛的，而这与已知条件矛盾，所得的矛盾就说明 ξ 不可能是有理数，因而必是一个无理数.

(2) 设 $p_1=2,p_2=3,p_3=5,\cdots$ 是素数的数列，在(1)中取 $r=0,a_n=p_n$，那么 a_n 是严格递增的正整数，且 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}$ 发散，因此由(1)中已证的结果可知 $\xi=0.235\,7\cdots$ 是无理数.

(3) 设 $a_1=1,a_2=4,a_3=9,\cdots,a_n=n^2$，在(1)中取 $r>1$，那么 a_n 是严格递增的正整数，且 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^n}{a_n}$ 发散，因此由(1)中已证的结果可知 $\xi=0.149\,16\cdots$ 是无理数.

168. 设 n 和 x 是正整数，$N_n(x)$ 表示满足 $d\mid x$ 和 $x\leqslant d^2\leqslant n^2$ 的正整数的数目. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{x=1}^{n}N_n(x)=\frac{1}{2}$$

(AMM E1714)

证明 设 $S_n=N_n(1)+N_n(2)+\cdots+N_n(n^2)$. 正整数 d 当且仅当 $x=kd$ 时，才在 $N_n(x)$ 中被计数，其中 $1\leqslant k\leqslant d$. 那样 d 在和数 S_n 中恰被数了 d 次. 因此

$$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

因而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{x=1}^{n}N_n(x)=\frac{1}{2}$$

(AMM 5799)

169. 设 $-1<q<1$，证明：

(1) $\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2}+\frac{1}{q+3}-\cdots\geqslant\frac{1-4q+2q^2}{(1-q)(2-q)}$.

(2) $\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2}+\frac{1}{q+3}-\cdots\geqslant\frac{(1-q)(2-q)}{3-2q}$.

证明 由 $a>0,a\neq 1,a+\frac{1}{a}>2$ 得出：

对 $0<t<1,-1<q<1$，成立

$$\frac{t^q}{1+t}+\frac{1+t}{t^q}>2$$

$$\int_0^1\frac{t^q}{1+t}\mathrm{d}t>2-\int_0^1\frac{1+t}{t^q}$$

因此就得出 $$\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2}+\frac{1}{q+3}-\cdots>$$

$$2-\frac{1}{2-q}-\frac{1}{1-q}=\frac{1-4q+2q^2}{(1-q)(2-q)}$$

我们也有(施瓦兹(Schwarz)不等式)

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geqslant(b-a)^2$$

现在设 $a=0,b=1,f(x)=\frac{x^p}{1+x}$，这就得出

$$\frac{1}{q+1}-\frac{1}{q+2}+\frac{1}{q+3}-\cdots=$$

$$\int_0^1\frac{t^q\mathrm{d}t}{t+1}>\frac{1}{\int_0^1\frac{1+t}{t^q}\mathrm{d}t}=\frac{(1-q)(2-q)}{3-2q}$$

(AMM E2192)

170. 证明：$\sum_p\frac{1}{p^2}+\sum_p\frac{1}{p^3}+\sum_p\frac{1}{p^4}+\cdots<0.806\ 9$.

证明 $$\sum_p\frac{1}{p^2}+\sum_p\frac{1}{p^3}+\sum_p\frac{1}{p^4}+\cdots=$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_p\frac{1}{p^n}=\sum_p\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{p^n}=\sum_p\frac{1}{p(p-1)}=$$

$$\sum_p\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)<\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\ln 2<0.8069$$

(AMM E2922)

171. 设 $F(n)$ 是斐波那契数列，$F(0)=0, F(1)=1, F(n)=F(n-1)+F(n-2)$，求 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^m)}$.

解 由于 $F(n)=\frac{a^n-b^n}{\sqrt{5}}$，其中 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, ab=1$. 我们得出

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{F(2^m)}=1+\sqrt{5}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{a^{2^m}-1}-\frac{1}{a^{2^{m+1}}-1}\right]$$

上面这个复合级数的和为

$$1+\frac{\sqrt{5}}{a^2-1}=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$$

(AMM 6450)

172. (1) 证明：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-n\left[\frac{k}{n}\right]}{k(k+1)}=\ln n$.

(2) 设 $S(n,k)$ 表示在基 n 下，整数 k 的各位数字之和，计算 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S(n,k)}{k(k+1)}$.

(1)

$$\sum_{k=1}^{nN-1}\frac{k-n\left[\frac{k}{n}\right]}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{nN-1}\frac{1}{k+1}-n\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{k=jn}^{(j+1)n-1}\frac{j}{k(k+1)}=$$

$$\sum_{k=1}^{nN-1}\frac{1}{k+1}-n\sum_{j=1}^{N-1}j\left(\frac{1}{nj}-\frac{1}{(j+1)n}\right)=$$

$$\sum_{k=1}^{nN-1}\frac{1}{k+1}-\sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{j+1}\to\ln n, N\to\infty$$

(2) 设

$$k=\sum_{i=0}^{\infty}c_in^i, 0\leqslant c_i<n$$

那么

$$\left[\frac{k}{n^j}\right]=\sum_{i=j}^{\infty}c_in^{i-j}$$

因此

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{k}{n^j}\right]=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\sum_{j=1}^{i}n^{i-j}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}c_i(n^i-1)=$$

$$\frac{1}{n-1}(k-S(n,k))$$

由此得出

$$S(n,k)=k-(n-1)\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{k}{n^j}\right]=$$

$$(n-1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n^j}\left(k-n^j\left[\frac{k}{n^j}\right]\right)$$

由(1)中已证的结果即得

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{S(n,k)}{k(k+1)}=(n-1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n^j}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-n^j\left[\frac{k}{n^j}\right]}{k(k+1)}=$$

$$(n-1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{n^j}\ln n^j=\frac{n}{n-1}\ln n$$

(AMM E3375)

173. 求和：$\tan\left(\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2}\right)$.

解 $\tan\left(\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2}\right)=\tan\left(\sum_{n=1}^{\infty}\arc\left(1+\frac{i}{n^2}\right)\right)=$

$$\tan\left(\arc\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\left(\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^2}{n^2\pi^2}\right)\right)\right)=$$

$$\tan\left(\arc\left(\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{\pi(1+i)}{\sqrt{2}}}\right)\right)=$$

$$\tan\left(\arctan\left(\frac{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\operatorname{th}\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\operatorname{th}\frac{\pi}{\sqrt{2}}}\right)\right)=$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\operatorname{th}\frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\tan\frac{\pi}{\sqrt{2}}+\operatorname{th}\frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

(AMM E1762)

174. 计算 $\sum_{m=1,(m,n)=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n^2}$.

解 对 $k_1,k_2,\cdots,k_r>1$，定义

$$S(k_1,\cdots,k_r)=\sum_{(n_1,\cdots,n_r)}\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}$$

那么

$$(k_1+\cdots+k_r)S(k_1,\cdots,k_r)=\sum_{a=1}^{\infty}\frac{1}{a^{k_1+\cdots+k_r}}\sum_{(n_1,\cdots,n_r)}\frac{1}{n_1^{k_1}n_2^{k_2}\cdots n_r^{k_r}}=$$

$$\sum_{a=1}^{\infty}\sum_{(n_1,\cdots,n_r)}\frac{1}{(an_1)^{k_1}\cdots(an_r)^{k_r}}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(m_1,\cdots,m_r)\vdash n}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}=$$

$$\sum_{m_1,\cdots,m_r=1}^{\infty}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}=$$

$$\zeta(k_1)\cdots\zeta(k_r)$$

因此
$$S(k_1,\cdots,k_r)=\frac{\zeta(k_1)\cdots\zeta(k_r)}{\zeta(k_1+\cdots+k_r)}$$

在此问题中，$k_1=k_2=2$，因此

$$S(2,2)=\frac{\zeta^2(2)}{\zeta(4)}=\frac{(\pi^2/6)^2}{\pi^4/90}=\frac{5}{2}$$

（AMM E2743）

175. 求极限 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

解
$$S_{m,n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\int_0^1\sum\nolimits_i\sum\nolimits_j(-1)^{i+j}x^{i+j-1}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1 x\left(\sum_{i=0}^{m-1}(-x)^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1}(-x)^j\right)\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\frac{x(1-(-x)^m)(1-(-x)^n)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

由于
$$\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=0$$

这就得出

$$\lim_{m,n\to\infty}S_{m,n}=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}$$

（AMM 6399）

176. 证明：$\sum\limits_{n=2}^{N}\frac{\zeta(n)}{n}=\ln N+o(1)$.

证明
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)-1}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{nm^n}=\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nm^n}=$$

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(\ln\frac{m}{m-1}-\frac{1}{m}\right)=$$

$$\lim_{M\to\infty}\left(\ln M-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{M}\right)=$$

$$1-\gamma$$

其中 γ 是欧拉常数,因此

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{\zeta(n)}{n}=\sum_{n=2}^{N}\frac{\zeta(n)-1}{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}=$$
$$1-\gamma-1+\gamma+\ln N+o(1)=\ln N+o(1)$$

(AMM 6127)

177.求级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\left(\frac{a}{b}\right)^n$ 的值,其中 $0<\frac{a}{b}<1$ 是有理数.

解 $$\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\left(\frac{a}{b}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{a}{bm}\right)^n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{a}{bm}\right)^2}{1-\frac{a}{bm}}=$$
$$a\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{bm-a}-\frac{1}{bm}\right)$$

设 b 是固定的,$S_N(a)=\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{bm-a}$.如果 $\omega\neq 1$ 是1的 b 次单位根,那么当 $N\to\infty$ 时

$$\sum_{a=0}^{b-1}\frac{S_N(a)}{\omega^a}=\omega+\frac{\omega^2}{2}+\cdots+\frac{\omega^{bN}}{bN}\to-\ln(1-\omega)$$

其中我们在虚部中从 $-\pi$ 到 $+\pi$ 取对数的值.现在

$$S_N(a)-S_N(0)=\frac{1}{b}\sum_{\omega}(\omega^a-1)\sum_{j=0}^{b-1}\frac{S_N(j)}{\omega^j}$$

因此 $$\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\left(\frac{a}{b}\right)^n=-\frac{a}{b}\sum_{\omega}(\omega^a-1)\ln(1-\omega)$$

其中 ω 遍历1的除1之外的 b 次单位根.

(AMM 6490)

178.证明:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+k)^3}=10-\pi^2$$

更一般的,证明

$$(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k^2+k)^n}=C_{2n-1}^{n-1}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{(2j)!}\cdot C_{2n-1-2j}^{n-1}B_{2j}(-4\pi^2)^j$$

其中 $B_2,B_4,B_6,\cdots$ 是伯努利数 $\frac{1}{6},-\frac{1}{30},\frac{1}{42},-\frac{1}{30},\frac{5}{66},\cdots$

证明 定义

$$I_{mn}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m(k+1)^n},m,n\geqslant 0,m+n\geqslant 2$$

那么我们有循环关系

$$I_{m+1,n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^m(k+1)^n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$I_{m+1,n}-I_{m,n+1},m,n\geqslant 0,m+n\geqslant 1$$
初始值是 $I_{11}=1,I_{n0}=\zeta(n),I_{0n}=\zeta(n)-1,n\geqslant 2$. 由对 m 的归纳法易于证明

$$I_{n1}=(-1)^n\left[-1+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\zeta(k)\right],n\geqslant 2$$
$$I_{1n}=n-\sum_{k=2}^{n}\zeta(k),n\geqslant 2$$
以及 $$I_{mn}=(-1)^m\left[-C_{m+n-1}^{n-1}+\sum_{k=2}^{m}(-1)^kC_{m+n-k-1}^{n-1}\zeta(k)+\sum_{k=2}^{n}C_{m+n-k-1}^{m-1}\zeta(k)\right],m,n\geqslant 2$$
(这里应用了公式
$$C_p^q=C_{p-1}^q+C_{p-1}^{q-1}$$
和 $$C_p^p+C_{p+1}^p+\cdots+C_{p+q}^p=C_{p+q+1}^{p+1})$$
对 $m=n,k$ 为奇数的项消去,因而
$$I_{nn}=(-1)^n\left[-C_{2n-1}^{n-1}+2\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_{2n-2j-1}^{n-1}\zeta(2j)\right],n\geqslant 2$$
特别 $I_{22}=-3+2\zeta(2),I_{33}=10-6\zeta(2)=10-\pi^2$

一般的结果可从众所周知的公式
$$\zeta(2j)=-\frac{(-4\pi^2)^j}{2(2j)!}B_{2j}$$
得出.

(AMM E3103)

179. 证明:$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{\zeta(2k+1)\cdot 2^{2k}}=\ln\pi-1$, 其中 ζ 是 Riemann-zeta 函数.

证明 从欧拉公式
$$\sin\pi x=\pi x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$
我们得出 $$\ln\sin\pi x=\ln\pi x+\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)=$$
$$\ln\pi x-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{kn^{2k}}=$$
$$\ln\pi x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{k}x^{2k}$$
当 $|x|<1$ 时,易于验证上述级数是绝对收敛的.

现在,从 $x=0$ 到 $x=\frac{1}{2}$ 积分,我们得出

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{k(2k+1)2^{2k}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\ln \pi x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{1}{2}}\ln \sin \pi x\mathrm{d}x=$$
$$\frac{1}{2}\ln\pi+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln 2=$$
$$\frac{1}{2}\ln\pi-\frac{1}{2}$$

注 如果我们从0到1积分,则可以得出:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\zeta(2k)}{k(2k+1)}=\ln 2\pi-1$$

(AMM 10212)

180. 设 $a(n)$ 是最接近于 $\sqrt[3]{n}$ 的整数,计算 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a(n)^4}$.

解 更一般的,考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a(n)^s}$. 这一级数可以写成 $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(r)}{r^s}$ 的形式,其中 $f(r)$ 是使得 $\sqrt[3]{n}$ 最接近于 r 的正整数 n 的数目. $f(r)$ 是不等式

$$\left(r-\frac{1}{2}\right)^3<n<\left(r+\frac{1}{2}\right)^3$$

的正整数解的数目(端点可以被排除,由于它们不可能是整数).上面的不等式确定了一个长度为 $3r^2+\frac{1}{4}$ 的区间,因此他将包含 $3r^2$ 个或者 $3r^2+1$ 个整数(当 $r>0$ 时,这两种情况都可能发生).当且仅当 $(2r+1)^3\equiv 1 \pmod 8$ 时,这个区间包含 $3r^2+1$ 个整数,而当且仅当 $r\equiv 0 \pmod 4$ 时,$(2r+1)^3\equiv 1 \pmod 8$,因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a(n)^s}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(r)}{r^s}=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{3r^2}{r^s}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(4m)^s}=$$
$$3\zeta(s-2)+\frac{1}{4^s}\zeta(s)$$

令 $s=4$,即可得出

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a(n)^4}=3\zeta(2)+\frac{1}{4^4}\zeta(4)=\frac{\pi^2}{2}+\frac{\pi^4}{23\ 040}$$

注 M. Borwein & Leo C. Hsu, Rick Mabry & Keith Neu, Josef Roppert, Douglas B. Tyler, and B. M. M. de Weger 考虑了更一般的和 $S_N(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_N(n)^s}$,其中 $a_N(n)$ 是最接近于 $\sqrt[N]{n}$ 的整数.用上面所述的对 $N=3$ 的方法也给出 $S_2(s)=2\zeta(s-1)$ 和 $S_4(s)=4\zeta(s-3)+\zeta(s-1)$.对更大的 N,解中

将出现 Hurwith-zeta 函数 $\zeta(a,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$，并且只有 Chu 以及 Borwein 和 Hsu 的小组给出了对任意 $N>4$ 时 $S_N(n)$ 的值．后者的解答证明了 $S_N(n)$ 是一个 π 的多项式，其系数是代数数而 $n-N$ 是一个奇数．例如

$$Q_6=\frac{170\ 912+49\ 928\sqrt{2}}{15},Q_7=\frac{246\ 013+353\ 664\sqrt{2}}{45}$$

$$S_5(6)=\frac{5\pi^2}{6}+\frac{\pi^4}{36}+\left(\frac{1}{945}-Q_6\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\pi^6}{4^{12}}$$

$$S_6(7)=\pi^2+\frac{\pi^4}{18}+\frac{\pi^6}{2\ 520}+Q_7\frac{\pi^7}{2^{27}}$$

181．设叙列 x_n 和 y_n 使得 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}x_nx_{n-i}=0$ 以及 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}y_n\cdot y_{n-i}=0$，那么是否成立 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{\infty}x_ny_{n-i}=0$？ （AMM 5984）

解 答案是不一定．

设 $x_k=a_k$，如果对某个 $k>0,n=2^k$，否则 $x_n=0$．又设 $y_n=b_k$，如果对某个 $k>l>0,n=2^k-2^l$，否则 $y_n=0$．其中 a_k 和 b_k 是下面将要确定的正数（我们在计算中取 $a_k=\frac{1}{\sqrt[4]{k}},b_k=\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$）．

除非 $n=2^k+2^l(k,l>0)$，否则 $\sum x_ix_{n-i}=0$，那样 $\sum x_ix_{n-i}=2a_ka_l$（如果 $k\neq l$）或者 a_k^2（如果 $k=l$）并且如果当 $r\to 0$ 时 $a_r\to 0$，那么就有 $\sum x_ix_{n-i}\to 0$．

当 r,t 跑过所有可能使得存在 $s<r$ 和 $u<t$，并且 $n=2^r-2^s+2^t-2^u(u,s>0)$ 的值时，$\sum y_iy_{n-i}=\sum b_rb_t$，由对称性，如果我们补充条件 $r\geqslant t$ 就将成立 $\sum y_iy_{n-i}\leqslant 2\sum b_rb_t$．

从要求 $r\geqslant t$ 得出 $2^{r-1}<n<2^{r+1}$，因此 r 至多可取两个值，比如说 $r=m$ 或者 $r=m+1$．当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$．由于

$$n-2^r-2^t=2^s+2^u$$

对固定的 r 和 t，至多存在两个 s 和 u 的值．那样 $\sum y_iy_{n-i}$ 将小于等于 $2(b_m+b_{m+1})\sum_{t\leqslant m+1}2b_t$．适当选择 b_k，比如说取 $b_k=\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$ 即可使右边趋于零．

现在，如果 $n=2^r$，那么

$$\sum x_iy_{n-i}=\sum_{t=1}^{r-1}a_tb_r=\frac{1}{\sqrt[3]{r^2}}\sum_{t=1}^{r-1}a_t$$

选择（例如）$a_t=\frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ 将使得 $a_t\to 0$，而 $\sum x_iy_{n-i}\to\infty$．这就证明了

我们的结论.

182. 对 $x>1$，定义

$$\psi(x)=\lim_{N\to\infty}\left(\ln(x+N)-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{x+n}\right)$$

$$P(x)=\lim_{N\to\infty}\left(\ln\ln(x+N)-\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(x+n)\ln(x+n)}\right)$$

证明：当 x 充分大时，$P(x)>\ln\psi(x)$.

(AMM 6495)

证明 设 $f(x)$ 是一个当 $x\geqslant c$ 时使得它和它的各阶导数都单调的趋于零的函数. 那么由欧拉 - 马克劳林求和公式就有

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_x^{x+N}f(t)\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{N}f(n+x)\right)=-\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{12}f'(x)+R$$

其中
$$|R|\leqslant\frac{1}{720}|f'''(x)|$$

特别，对 $f(x)=\frac{1}{x}$，我们有

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{n!x^{n+1}}\text{，因此当 }x\to\infty\text{ 时}$$

$$\psi(x)=\ln x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

从泰勒展开式

$$\ln(a+t)=\ln a+\frac{t}{a}-\frac{t^2}{2a^2}+O\left(\frac{t^3}{a^3}\right),\frac{t}{a}\to0$$

我们得出

$$\ln\psi(x)=\ln\ln x-\frac{1}{2x\ln x}-\frac{1}{12x^2\ln x}-\frac{1}{8x^2(\ln x)^2}+O\left(\frac{1}{x^3(\ln x)^2}\right)$$

对 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$，我们有

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}\ln x}Q_n\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$

其中 Q_n 是 n 阶多项式，由下面的循环关系确定

$$Q_0(t)=1,Q_{n+1}(t)=(n+1+t)Q_n(t)+t^2Q'_n(t)$$

显然 Q_n 的系数都是正的，因此对所有的 n，Q_n 都是单调的. 那样，我们再次应用欧拉 - 马克劳林求和公式就有

$$P(x)=\ln\ln x-\frac{1}{2x\ln x}-\frac{1}{12x^2\ln x}\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)+O\left(\frac{1}{x^4\ln x}\right)$$

因而　$P(x)-\ln\psi(x)=\frac{1}{24x^2(\ln x)^2}+O\left(\frac{1}{x^3(\ln x)^2}\right)$
显然当 x 充分大时，上述表达式是正的。

183. 对 $x>0$，定义

$$\psi(x)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(n+x-\frac{1}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}$$

$$\psi_2(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\ln^2\left(n+x-\frac{1}{2}\right)-\sum_{k=0}^{n}\frac{\ln(x+k)}{x+k}$$

证明：

$$\psi_2(x)<\frac{1}{2}\psi^2(x)-\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{10}}$$

（AMM 6456）

证明　(1) 注意 $\psi(x)$ 是 digamma 函数 $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$。由平均值定理，我们有对 $k\geqslant 1, x>0$ 成立

$$0<\ln(x+k)-\ln(x+k-1)-\frac{1}{x+k}\leqslant \frac{1}{x+k-1}-\frac{1}{x+k}$$

并且因此

$$0<\ln(x+n)-\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{x+n}$$

让 $n\to\infty$，我们得出

$$0\leqslant\ln x-\psi(x)\leqslant\frac{1}{x}, x>0 \quad ①$$

类似的，我们可证

$$0\leqslant\frac{1}{2}\ln^2 x-\psi_2(x)\leqslant\frac{\ln x}{x}, x>e-1 \quad ②$$

为了证明①，我们首先需要证明对 $x>0$

$$\frac{\ln x}{x}=\psi_2(x+1)-\psi_2(x)>\frac{1}{2}(\psi^2(x+1)-\psi^2(x))-\frac{1/24}{(x+1/2)^2+3/10}+\frac{1/24}{(x-1/2)^2+3/10} \quad ③$$

由于 $\psi(x+1)-\psi(x)=\frac{1}{x}$，上式的右边就等于

$$\frac{1}{x}\left(\psi(x)+\frac{1}{2x}\right)+\frac{x/12}{x^4+x^2/10+121/400}$$

因此式③就等价于

$$\psi(x)<\ln x-\frac{1}{2x}-\frac{x^2/12}{x^4+x^2/10+121/400} \quad ④$$

事实上，我们将证明一个更紧凑的不等式

$$\psi(x) < \ln x - \frac{1}{2x} - \frac{1/12}{x^2 + 1/10} \quad ⑤$$

为了证明 ⑤,我们首先证明

$$\psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} > \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2x} - \frac{1/12}{(x+1)^2 + 1/10} + \frac{1/12}{x^2 + 1/10} \quad ⑥$$

上式等价于

$$\ln\frac{x+1}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{6}\cdot\frac{x+1/2}{(x+1/2)^4 - (3/10)(x+1/2)^2 + 49/400} \quad ⑦$$

上式将从下面的更紧凑的不等式得出

$$\ln\frac{x+1}{x} < \frac{x+1/2}{(x+1/2)^2 - 1/4} - \frac{1/6}{(x+1/2)^3} - \frac{1/20}{(x+1/2)^5} \quad ⑧$$

在 $x + \frac{1}{2}$ 处展开上式的两边,那么式 ⑧ 的左边是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}(2n+1)(x+1/2)^{2n+1}}$$

而右边是

$$\frac{1}{x+1/2} + \frac{1}{2^2\cdot 3(x+1/2)^3} + \frac{1}{2^4\cdot 5(x+1/2)^5} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}(x+1/2)^{2n+1}}$$

这样就得出了 ⑧,因而 ⑦ 和 ⑥ 成立.从式 ⑥ 我们得出

$$\sum_{n=0}^{N-1}(\psi(x+n+1) - \psi(x+n)) =$$

$$\psi(x+N) - \psi(x) > \ln\frac{x+N}{x} - \frac{1}{2(x+N)} + \frac{1}{2x} - \frac{1/12}{(x+N)^2 + 1/10} + \frac{1/12}{x^2 + 1/10} \quad ⑨$$

上式等价于

$$\psi(x) < \psi(x+N) - \ln(x+N) + \frac{1}{x(x+N)} + \frac{1/12}{(x+N)^2 + 1/10} + \ln x - \frac{1}{2x} - \frac{1/12}{x^2 + 1/10} \quad ⑩$$

由 ①,当 $N \to \infty$ 时,$\psi(x+N) - \ln(x+N) \to 0$,那样从 ⑩ 就得出 ⑤ 并且式 ③ 也就成立了.从式 ③ 就得出

$$\sum_{n=0}^{N-1}(\psi_2(x+n+1) - \psi_2(x+n)) =$$

$$\psi_2(x+N) - \psi_2(x) > \frac{1}{2}(\psi^2(x+N) - \psi^2(x)) -$$

$$\frac{1/24}{(x+N-1/2)^2+3/10}+\frac{1/24}{(x-1/2)^2+3/10} \quad ⑪$$

因此
$$\psi_2(x) < \psi_2(x+N)-\frac{1}{2}\psi^2(x+N)+\frac{1/24}{(x+N-1/2)^2+3/10}+\frac{1}{2}\psi^2(x)-\frac{1/24}{(x-1/2)^2+3/10} \quad ⑫$$

然而，从 ① 和 ② 得出，当 $N\to\infty$ 时，$\psi_2(x+N)-\frac{1}{2}\psi^2(x+N)\to 0$. 这就得出了要证的结论. 严格地说，从取极限，我们仅能得出 $\leqslant$ 号，但是更仔细的分析表明 ⑤ 事实上蕴含了具有严格不等号的结果.

184. 证明：(1) $\ln x$ 不是有理函数，即 $\ln x$ 不是两个多项式的比.

(2) $\ln x$ 不是代数函数，即如果设 $y=\ln x$，那么不存在一个实系数或复系数的 x,y 的多项式 $f(x,y)$ 使得 $f(x,y)=0$ 或者存在 x 的多项式 $P_0(x),P_1(x),\cdots,P_N(x)$ 使得 $\sum_{k=0}^{n}P_k(x)y^k=0,P_n(x)\neq 0$. (R. W. Harming, An Elementary Discussion of the Transcendental Nature of the Elementary Transcendental Function ,AMM Vol(1977),No: 294-297)

证明 (1) 假设 $\ln x=\frac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，且可设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 没有公因式. 将上式两边微分，我们得出 $\frac{1}{x}=\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}$ 或 $Q^2=x(P'Q-PQ')$，由此看出 Q 含有因式 x. 因此可设 $Q=x^kQ_1(x),Q_1(0)\neq 0,k\geqslant 1$. 把此式代入 $Q^2=x(P'Q-PQ')$ 之中并且约去 x^k 就得到

$$x^kQ_1{}^2=xP'Q_1-kPQ_1-xPQ'_1$$

这说明 x 是 PQ_1 的因式，但是 x 不是 Q_1 的因式(否则将有 $Q=x^{k+1}Q_1(x),Q_1(0)\neq 0,k\geqslant 1$，这与我们对 Q 所做的假定和 k 的性质相矛盾)，因此 x 必是 P 的因式，而这与我们假设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 没有公因式相矛盾. 这就证明了 $\ln x$ 不可能是有理函数.

(2) 假设 $\ln x$ 是代数函数，那么根据(1)已证的结果，我们可设 n 是最小的使得

$$\sum_{k=0}^{n}P_k(x)(\ln x)^k=0,P_n(x)\neq 0,n\geqslant 2$$

成立的正整数. 于是

$$(\ln x)^n + \frac{P_{n-1}}{P_n}(\ln x)^{n-1} + \cdots + \frac{P_0}{P_n} = 0$$

对上式两边微分得出

$$\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1} + \left(\frac{P_{n-1}}{P}\right)'(\ln x)^{n-1} + \frac{n-1}{x}\frac{P_{n-1}}{P_n}(\ln x)^{n-2} + \cdots = 0$$

如果不是所有含有 $\ln x$ 的项都同时等于零,那么 $\ln x$ 将满足一个低于 n 次的多项式方程,这与 n 的最小性矛盾,而如果所有含有 $\ln x$ 的项都同时等于零,我们将有

$$\frac{n}{x} + \left(\frac{P_{n-1}}{P_n}\right)' = 0$$

$$\frac{n-1}{x} \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} + \left(\frac{P_{n-2}}{P_n}\right)' = 0$$

$$\cdots$$

特别由上面第一个式子通过积分将得出 $\ln x$ 是一个有理函数,这与我们在(1) 中已证的结果相矛盾.

(AMM 6241)

185. 证明:(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)^2 = \frac{\pi - 1}{2}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$.

证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx = g(x) = -\frac{1}{2}(\pi - x), -\pi \leqslant x \leqslant 0$, $\frac{1}{2}(\pi - x), 0 < x \leqslant \pi$

设 $f(x) = \frac{(\pi - 1)x}{2}, |x| \leqslant 1; \frac{\pi - x}{2}, 1 \leqslant x \leqslant \pi$. 由直接计算傅里叶系数,我们有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)\sin(nx)}{n^2}$$

由于 f 和 g 是重合的,因此我们从 $g(1)$ 得出(1) 中公式的前一部分,从 $f(1)$ 得出(1) 中公式的后一部分. 对 f 应用帕塞瓦尔(Parseval) 公式即可得出(2) 中的公式.

(AMM E2291)

186. 证明:对所有的实数 x 成立

$$\left|\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right|=$$
$$\cos x+\frac{1}{3^2}\cos^2 3x+\frac{1}{5^2}\cos^2 5x+\cdots$$

证明 设 $\sum_0 f(n)$ 表示 $f(1)+f(3)+f(5)+\cdots$. 又设对 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi, f(x)=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-|x|\right)$. $F(x)$ 是 $f(x)$ 的 2π 周期延拓,那么

$$F(x)=\sum_0\frac{\cos nx}{n^2}$$

设对 $-\frac{1}{2}\pi\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi, g(x)=f(x)$,那么 $g(x)$ 的 π 周期延拓就是

$$|F(x)|=\frac{\pi^2}{16}+\frac{1}{2}\sum_0\frac{\cos 2nx}{n^2}=$$
$$\frac{\pi^2}{16}+\sum_0\frac{\cos^2 nx}{n^2}-\frac{1}{2}\sum_0\frac{1}{n^2}=\sum_0\frac{\cos^2 nx}{n^2}$$

这就证明了所要的结论.

(AMM E2782)

187. 证明:当 $x>\frac{1}{2}$ 时

$$2\arctan\frac{1}{2x-1}<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}<\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

证明 当 $x>\frac{1}{2}$ 时,我们有(其中 $\sum=\sum_0^{\infty}$)

$$2\arctan\frac{1}{2x-1}=2\sum\left(\arctan\frac{1}{2n+2x-1}-\arctan\frac{1}{2n+2x+1}\right)=$$
$$2\sum\arctan\frac{1}{2(n+x)^2}<\sum\frac{1}{(n+x)^2}<$$
$$\sum\frac{1}{(n+x)^2-\frac{1}{4}}=$$
$$\sum\left(\frac{1}{n+x-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+x+\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{x-\frac{1}{2}}$$

由于 $S=\sum\frac{1}{(n+x)^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}$ 有连分数展式(见 Math Comp., 33, no. 146(1979), 824-825)

$$2x^2S=\frac{1}{3x/1}+\frac{1}{5x/3}+\frac{1}{7x/6}+\frac{1}{9x/10}+\cdots$$

因此一个更紧凑的不等式是

$$\frac{1}{6x^3+1\cdot 2x}<\sum\frac{1}{(n+x)^2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}<\frac{1}{6x^3}, x>0$$

188. 计算"椭圆积分"$I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x)}}$，其中 $f(x)=x^4+4x^3-6x^2+4x+1$. (AMM 5812)

解 设 $R(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 是一个没有重根的四次多项式，其中 a,b,c,d 是有理数. 由于积分$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}$不是初等的，因此至多有一个常数 k 使得$\int\frac{(x+k)\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}$是初等的. M.P. Tchebyshef (Journal de Mathematique (2), Vol.9 (1864), 242-246) 已经证明如何用尝试法来确定这种积分是否是初等的. 其方法是把$\sqrt{R(x)}$展开成连分式

$$a_0(x)+\frac{1}{a_1(x)}+\frac{1}{a_2(x)}+\cdots$$

其中 $a_n(x)$ 是 x 的多项式. 如果 $a_1(x),a_2(x),\cdots$ 都不是二次的，那么$\int\frac{(x+k)\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}$就不是初等的. 实际上只要检验前 N 个多项式就够了，这里 N 是可以确切定义的. 如果另一方面 $a_n(x)$ 是第一个二次的分母，那么积分$\int\frac{(x+k)\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}$就等于

$$\frac{1}{2\lambda}\ln\frac{\varphi(x)+\sqrt{R(x)}}{\varphi(x)-\sqrt{R(x)}}$$

其中 $\varphi(x)=a_0(x)+\frac{1}{a_1(x)}+\frac{1}{a_2(x)}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}(x)}$

而 λ 是某个正整数.

为了对积分 I 应用这一方法，令 $R(x)=x^4-12(x-1)^2$，那么 $f(x)=R(x+1)$. 可以验证

$$\sqrt{R(x)}=x^2-6+\cfrac{12}{x+2+\cfrac{-2}{x+1+\cfrac{-3}{x+1+\cfrac{-2}{x+2+\cfrac{6}{x^2-6+\cdots}}}}}$$

那样 $\varphi(x)=x^2-6+\cfrac{12}{x+2+\cfrac{-2}{x+1+\cfrac{-3}{x+1+\cfrac{-2}{x+2}}}}=\frac{A(x)}{B(x)}$

其中

$$A(x)=x^6+6x^5-36x^3+72x$$
$$B(x)=x^4+6x^3+6x^2-12x-12$$

这样，由一般理论就得出

$$\int\frac{(x+k)\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{12}\ln\frac{A(x)+B(x)\sqrt{R(x)}}{A(x)-B(x)\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{12}\frac{(A(x)+B(x)\sqrt{R(x)})^2}{A^2(x)-B^2(x)R(x)}$$

由直接计算得出

$$A^2(x)-B^2(x)R(x)=12^3$$

由此易于验证

$$A'(x)=6(x-1)B(x)$$

联合这些方程我们得出

$$\frac{1}{2}B(x)R'(x)+B'(x)R(x)=6(x-1)A(x)$$

由此就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(A(x)+B(x)\sqrt{R(x)})=\frac{6(x-1)}{\sqrt{R(x)}}$$

或者 $$\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{6}\ln(A(x)+B(x)\sqrt{R(x)})$$

因而最后有 $$\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x)}}=\frac{1}{6}\ln\left(A(x+1)+\frac{B(x+1)}{\sqrt{f(x)}}\right)$$

189. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是实数的叙列，当 $n\to\infty$ 时，$\bar{x}_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to 0$，证明：对所有的 $\delta>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{1+\delta}}$ 收敛.

（AMM E2433）

证明　我们在更弱的条件下，即在仅假定 $\bar{x}_n$ 有界的情况下证明所需的结论. 设 $S_0=0$，以及当 $n\geqslant 1$ 时

$$S_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$$

那么 $$\sum_{n=1}^{m}\frac{x_n}{n^{1+\delta}}=\sum_{n=1}^{m}\frac{S_n-S_{n-1}}{n^{1+\delta}}=\sum_{n=1}^{m}S_n\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)+\frac{S_m}{m^{1+\delta}}$$

但是当 $m\to\infty$ 时，由于 $\bar{x}_m$ 是有界的，因此 $\frac{S_m}{m^{1+\delta}}=\frac{\bar{x}_m}{m^{\delta}}\to 0$. 那样当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)$ 收敛时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{1+\delta}}$ 收敛. 对函数 $f(x)=\frac{1}{x^{1+\delta}}$ 在区间 $[n,n+1]$ 上应用平均值定理给出不等式

$$\left|S_n\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)\right|\leqslant\frac{|S_n|(1+\delta)}{n^{2+\delta}}=\frac{|\bar{x}_n|(1+\delta)}{n^{1+\delta}}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\bar{x}_n|(1+\delta)}{n^{1+\delta}}$ 显然是收敛的，因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)$ 是绝对收敛的，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{1+\delta}}$ 收敛.

（1）这一命题在某种程度上是所谓克罗内克引理的逆命题，克罗内克引理断言如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$ 收敛，那么当 $n\to\infty$ 时，$\bar{x}_n\to 0$（或者 x_n 在切萨罗（Cesaro）意义下趋于 0），然而这一引理的逆命题却是不成立的，例如见反例 $x_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$.

注 （2）上述证明中提到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)$ 是绝对收敛的，并由此得出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{1+\delta}}$ 的收敛性，这一说法是不够严格的. 实际上，证明过程仍然成立，但并不只是用到级数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)$ 的绝对收敛性. 这是由于即使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}-\frac{1}{(n+1)^{1+\delta}}\right)$ 是绝对收敛的，也并不能得出原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{1+\delta}}$ 的收敛性，例如可见 $x_n=(-1)^n\sqrt{n}$，那么 $S_n=O(\sqrt{n})$，并且 $\bar{x}_n=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=o(1)$；此外 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x_n|}{n^{1+\delta}}$ 对所有 $\delta\leqslant\frac{1}{2}$ 发散.

Kopp 和 Salat 看出如果对某个 $0<\varepsilon<\delta$，$\bar{x}_n=O(n^{\varepsilon})$，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{1+\delta}}$ 将对某个固定的 δ 收敛. 例如对所有 $\delta>0$，如果 $x_n=O(\ln n)$.

（AMM E2489）

190. 设 f 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的连续可谓函数，$f(0)=0$，$f(1)=1$，问 f 的弧长是否能超过 $f\circ f$ 的弧长？

解 回答是可能.

考虑分段线性函数 g，其连接点为 $\left(\frac{1}{4},0\right)$，$\left(\frac{1}{4}+\varepsilon,\frac{1}{4}\right)$，$\left(\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{4}\right)$ 和 $\left(1-\varepsilon,\frac{1}{4}+\varepsilon\right)$，其中 $\varepsilon\leqslant\frac{1}{100}$. 用 $L(f)$ 表示 f 的弧长. 易于看出

$$L(g\circ g)<\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)+\frac{\sqrt{5}}{4}+\left(\frac{3}{4}+\varepsilon\right)=\frac{5+\sqrt{5}}{4}<2-3\varepsilon=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}-2\varepsilon\right)+\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{4}-\varepsilon\right)<L(g)$$

剩下的事就是说明我们可以将连接点光滑化而不显著的影响 g 和 $g\circ g$ 的弧长.设 $M=\frac{1}{\varepsilon}$ 大于 g 在任意点处的斜率.设 F_n 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的连续可微函数,$F_n(0)=0,F_n(1)=1$,$|F'_n(x)|\leqslant M$,并且除了一个测度为 $\frac{1}{n}$ 的集合外,在其余的地方与 g 重合.那么对每个 n

$$|L(F_n)-L(g)|\leqslant\frac{\sqrt{1+M^2}}{n}$$

因此 $$|L(F_n\circ F_n)-L(g\circ g)|\leqslant\frac{\sqrt{1+M^4}}{n}$$

那么当 n 充分大时,就将有

$$|L(F_n\circ F_n)|<|L(F_n)|$$

191.设 C 表示康托(Cantor)三分集,证明:$C+C=\{z\mid z=x+y,x\in C,y\in C\}=[0,2]$.

证明 考虑实数的三进位表示,则从 C 的构造过程可以得出,对任意实数 x,$x\in C$ 的充分必要条件是 x 具有形式 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$,其中 $a_i=0$ 或 2.

设 e 表示数字 0 或 2.对任意 $x\in[0,2]$,设

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

其中 a_0 等于0或1,a_n 等于0,1或2(如果 x 是有限小数,则将其看成后面是无穷多个0的无穷小数).从 a_0 数起,按以下方法构造两个数 y 和 z

$$y=b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

$$z=c_0.c_1c_2\cdots c_n\cdots$$

其中,如果 $a_n\neq1$,则令 $b_n=a_n,c_n=0$.

如果在 x 中含有 $\cdots11\cdots$ 的段,则分别在 y 和 z 的相应的位置用02代替11.

如果在 x 中含有 $\cdots1ee\cdots e1\cdots$ 的段,则在 y 中用

$$\cdots022\cdots22\cdots$$

代替 x 中的段,而在 z 中用

$$\cdots0ee\cdots e2\cdots$$

代替 x 中的段.

如果在 x 中含有 $1ee\cdots$ 的段,则在 y 中用

$$0eee\cdots$$

代替 x 中的段,而在 z 中用

$$0222\cdots$$

代替 x 中的段.

那么容易验证 $x=y+z$,同时显然有 $y\in C$,$z\in C$.这就证明了结果.

192.设 $C=\left\{x \mid x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{a_i}{3^i}\right\}$表示康托集合,其中 a_i 是 0 或 2.证明:单位区间 $I=[0,1]$ 是康托集合的连续像.(AMM,Ira Rosenholtz , Another proof that Compact metric space is the continuous image of the Cantor set , Vol.83 ,No.8:646-647).

证明 易于验证 $g:C\to[0,1]$,其中 $g\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{a_i}{3^i}\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{a_i}{2^{i+1}}$ 是连续映射,这就证明了结论.

(AMM E2857)

193.设 x,y,z,w 都是实数,$xy=4$,$z^2+4w^2=4$,证明:

$$(x-z)^2+(y-w)^2>1.6$$

证明 双曲线 $xy=4$ 在点$(2\sqrt{2},\sqrt{2})$处的切线和椭圆 $z^2+4w^2=4$ 在点$\left(\sqrt{2},\dfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$处的切线是平行的,而这两条平行线之间的距离是$\dfrac{4}{\sqrt{10}}$,因此

$$(x-z)^2+(y-w)^2>\left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2=1.6$$

注 实际上$(x-z)^2+(y-w)^2$无法达到1.6.因此1.6并不是最佳下界,这一下界还可以改进为1.774 7….

(AMM 6387)

194.设 $-\dfrac{1}{e}<a<\dfrac{1}{e}$,$y=e^{ay}$,证明:$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^na^n}{n!}=\dfrac{1}{1-ay}$.

证明 我们必须添加一个条件 $|ay|<1$ 以保证可正确的选择 $y=e^{ay}$ 的一个解,在此条件下,对使得 $|a|<\dfrac{1}{e}$ 的复数 a,结果成立.在等式

$$\frac{n^n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{e^{nz}}{z^{n+1}}dz$$

两边乘以 a^n，并逐项积分下面的一致收敛级数，可以得出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n a^n}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z-ae^z}$$

由鲁歇(Rouche)定理可知函数 $z-ae^z$ 在单位圆 $|z|<1$ 内恰有一个零点 z_1. 由留数定理可知问题中的积分就等于 $\frac{1}{1-ae^{z_1}}$，令 $z_1=ay$ 即可得出所要的结果.

(AMM 6376)

195. 设 F 是一个 R 上的右连续概率分布函数，$\mu=\int_R x\mathrm{d}F(x)$，$-\infty<\mu<\infty$. 设

$$F_1=F,F_2(x)=\int_R F(x-u)\mathrm{d}F(u)=F*F$$

并且 $$F_{n+1}=F_n*F,n=2,3,\cdots$$

(1) 如果 $\mu\neq 0$，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}[F_n(n\mu)-F_{n+1}(n\mu)] \qquad (*)$$

收敛.

(2) 如果 $\mu=0$，$\sigma^2=\int_R x^2\mathrm{d}F(x)<\infty$，那么式(*)收敛.

解 设 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立的都以 F 为分布函数的随机变量，

$$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

并且根据 μ 是正的还是负的 I 是区间 $(-\mu,0)$ 或 $(0,-\mu]$.

(1) 标准的结果是只有部分是对的. 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}[F_k(k\mu)-F_{k+1}(k\mu)]-F_1+F_{n+1}(n\mu)=$$

$$\operatorname{sgn}\mu\sum_{k=2}^{n}(S_k-k\mu\in I)$$

根据 W.Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2, 200-203, 分布 $X_1-\mu$ 是存在的，而这蕴含当 $X_1-\mu$ 的分布不是一个算数或者是一个带有 I 中原子的算数时

$$\sum_{k=2}^{\infty}P(S_k-k\mu\in I)=\infty$$

因此在这两种情况中，(*)都是发散的. 当 $X_1-\mu$ 的分布是个不带 I 中原子的算数时，(*)可能收敛；例如设 $\mu<0$ 以及当 $x<\mu$ 时，$F(x)=0$，当 $x\geq\mu$ 时，$F(x)=1$. 在这种情况中 $X_1-\mu$ 的分布仅仅在它是一个原子时是0，而 $0\overline{\in}(0,-\mu]$.

(2) 由中心极限定理，我们有

$$\sum_{k=1}^{n}[F_k(0)-F_{k+1}(0)]=F_1(0)-F_{n+1}(0)=$$

$$F_1(0)-P(S_{n+1}\leqslant 0)\to F_1(0)-\frac{1}{2}$$

196. 设$f:[0,1]\to R$是连续函数，$f(0)=f(1)=0$. 证明：集合 $S=\{h\in[0,1]\mid$ 对某个 $x\in[0,1], f(x+h)=f(x)\}$ 的勒贝格测度至少是$\frac{1}{2}$. （AMM 10567）

证明 集合 $S=\{h\in[0,1]\mid$ 对某个 $x\in[0,1]$, $f(x+h)=f(x)\}$ 是闭集，因此是勒贝格可测的. 它的在反射 $h\mapsto 1-h$ 下的像 S' 具有同样的勒贝格测度. 我们证明 $S\cup S'=[0,1]$. 这就蕴含 S 和 S' 的相同的勒贝格测度必至少是$\frac{1}{2}$.

任取 $h\in[0,1]$，设 x_0 和 x_1 是$[0,1]$中的点，使得 f 分别在这两个点处达到它的最小值和最大值. 定义 $g:[0,1]\to R$ 如下

$$g(x)=\begin{cases}f(x+h)-f(x), & x+h\leqslant 1\\ f(x+h-1)-f(x), & x+h>1\end{cases}$$

那么 g 是连续的并且$g(x_0)\geqslant 0, g(x_1)\leqslant 0$，因此存在 $x_2\in[0,1]$ 使得 $g(x_2)=0$. 如果 $x_2+h\leqslant 1$，那么 $f(x_2+h)=f(x_2)$ 并且 $h\in S$，如果 $x_2+h>1$，那么

$$\xi=x_2-(1-h)\in[0,1]$$

$$f(\xi+1-h)=f(x_2-(1-h)+1-h))=$$

$$f(x_2)=f(x_2+h-1)=f(\xi)$$

因此 $1-h\in S$ 而$h\in S'$. 这也就是说，每个 $h\in[0,1]$ 都在 $S\cup S'$ 中. 由此即可得出 $S\cup S'=[0,1]$.

编后语

一、一个老想法

有人说策划就是无中生有，图书策划首先要有一个创意、构想，然后会生成一个选题，最后才是去实施，中国哲学讲：一生二，二生三，三生万物，那么最初的一从何而来呢？它的产生有没有一定规律与路径，是不是像浮萍那样居无定所呢？现代科学认为它随机游荡于大脑深处，一遇到机缘便会跑出来.

26年前，笔者在哈尔滨的一家科技书店无意中买到了一本《国际最佳数学征解问题分析》，这本书是24位美国数学名家从《美国数学月刊》33年间（Vol27 – Vol59）的几千个耐人寻味的征解问题中仔细遴选，投票评定出的，问题新颖，解法巧妙，堪称"广征博采，荟萃精华"．买到后爱不释手，当时虽然不能全部读懂，但曾经认真努力过，记得当时和同学通信时还恶作剧地附上一两个让其解答，后果当然可想而知了.

20年前，受笔者的高中班主任哈尔滨师大附中沙洪泽校长委托代为培训几位数学竞赛选手（记得有罗炜、乔立安、张天培、李德宇等，其中罗炜较为著名，他曾获两届IMO金牌，后成为丘成桐先生的弟子，他有与陶哲轩和佩雷尔曼相同的学生时代，成为他们那样的大家自然也指日可待），选择培训试题时也多参考此书.

3年前，笔者赴莫斯科参加国际书展，在距圣彼得堡开往莫斯科的火车开车还有1小时的短暂空隙，笔者快速奔到路边的一家书店找到数学书柜台，来不及细翻在书架上抄起两本就走，冥冥中如有神助，其中一本竟然是俄文版的《国际最佳数学征解问题分析》，原来并不知道还有俄译本，而且中译本早已在中国书店中绝迹了.

这三次经历像蒙太奇镜头般掠过，使笔者感觉到该做一本此类图书了.

更巧的是《国际最佳数学征解问题分析》是译自美国的《四百个最佳问题》(*The Four Hundred "Best" Problems*)，原文载于《美国数学月刊》第六十四卷第八－九月号增刊，而主编为Howard Eves与E.P.Starke，其中的Eves，我们数学工作室刚刚组织翻译了他的巨著《数学史概论》.

诸多巧合，预示这本书的产生仿佛是早已注定的.

二、两本老杂志

《美国数学月刊》(*The American Mathematical Monthly*)(华盛顿)，1894年创刊，是美国数学协会的机关刊物，每年出版10期，该刊旨在促进高校数学的发展，它的长篇文章涉及理论、应用、新老数学的各个分支，是阐述性的，但不排斥偶尔含有新成果，除长篇文章之外，还辟有笔记、进展报告、未解决问题、数学教学、问题和解答、书评等栏目.《美国数学月刊》最大特点是"通俗"，能将数学中最主流、最前沿、最艰深的东西深入浅出地讲出来，以此获得全球声誉，不像我们有些专业期刊中的论文，内容粗浅却写得高深莫测，正像古人所说，是"以艰深之辞，文浅易之说".在数学这行"玩深沉易，玩浅显难".

在这里我们所关注的是其问题专栏.

《美国数学月刊》创始人芬克尔(Benjamin Franklin Finkel)是一个狂热的问题爱好者，他还写过一本流行一时的《芬克尔解数学题》.在《美国数学月刊》第一期的导言里，芬克尔写道："解数学题是数学研究的最低形式……但其教育价值不可估量，它是步入更高的创造性和探索领域的阶梯，许多休眠的头脑就是通过把握某个问题而活跃起来."

国内的许多数学刊物也有问题征解，早年间的问题多为原创(我们数学工作室也准备出一本集子收集那些早期的征解问题)，但近年的问题大多东抄西抄，出题者不认真，解题者也没兴趣，所以最后沦为自拉自唱，由盛而衰.缺少原创性体现出缺少创造性，其根源在于对原创的轻视.

印度科学家浦拿大学教授纳拉利卡曾讲过一个关于原创的轶事.

声望卓著的开尔文(L.Kelvin)勋爵原名为汤姆逊，当年在英国剑桥大学数学荣誉学位考试中，名列第二，一名叫帕金森(Parkinson)的同学名列第一，而后面考生的成绩则远远落后于难分伯仲的前两名.

考试中有一道特别难的题目，只有他们两人做对了.最令考官生疑的是，他们的解答几乎一模一样，其中会不会有抄袭作弊之嫌？

考官先叫来帕金森问个究竟，他问帕金森："告诉我，你是如何解出这道题的?"

帕金森回答道："先生，我偶然读到过一篇研究论文，里面正好有这道题的解答过程，因此我当时便学会了."他说出了发表该论文的杂志.

考官本人也是受这篇文章启发而设计考题的，对此印象很深，于是，他轻拍着帕金森，表扬他能够在课外广泛阅读，追踪科学的最新发展，接着又叫来汤姆逊，以颇为挑剔的口气说："我想知道，你是如何解决这道题的.帕金森做对了，是因为他看过一篇论文中的解答，可别告诉我，你也是从那里看到的!"

"当然不是，先生."未来的开尔文勋爵回答道，"那篇文章是我写的."

科学研究之根本在于原创，今天，几乎无人记得考过第一名的帕金森，汤姆逊的工作却

成了我们教科书中的经典内容.

《美国数学月刊》"问题征解栏"中的问题往往是数学工作者或爱好者在教学科研等工作中妙手偶得,因此不落一般陈题的窠臼.例如自《美国数学月刊》1894年创刊时,杂志的问题专栏立刻吸引了泽尔(G.M.B.Zerr)教授,一个化学工程专家,教育管理者,也是多才多艺的数学家.1960年去世前,泽尔在杂志的前17年为它所作的贡献在质量和数量上都远远超越了所有其他解题专家.他在那17年里收集了令人难以置信的1 697个问题,在同一个时期,他还以同样的热情为当时的许多其他杂志的问题专栏奉献自己的作品.

同时该栏目的提出者及解答者遍布世界各地,仅据1954年统计就达到98个国家和地区,我国也有供题者,如重庆23中的高灵先生,华南师范大学的吴伟朝教授(笔者曾多次问过吴教授问题从何而来,但他一直笑而不答,秘而不宣),而且不少解答也出自名家手笔,如著名数学家和数学教育家G.Pólya、P.Erdös等都是积极的供稿者.

当然早期由于美国整体数学水平不高也会有一些错误.如在该刊第一卷的第7期"问题与信息"专栏发表了印第安纳州的一位叫古德温(E.J.Goodwin)的乡村医生的论文,其论文的主要结果是:圆面积等于边长为四分之一圆周的正方形面积,正方形面积等于该正方形的等周圆的面积,也就是说:如果圆和正方形的周长相等,那么它们的面积相等,由此易得$\pi=4$.

当有人想给普渡大学数学家瓦尔多(C.A.Waldo)引见其人时,瓦尔多婉拒了,并说:"我已经认识够多的疯子了."

水至清则无鱼,一本完美无瑕的刊物是不会引起多数人关注的,瑕瑜共存的现象是普遍的.

本书的第2个问题来源也是一本美国的数学期刊,名为《数学杂志》(*Mathematics Magazine*)(华盛顿),1926年创刊,由美国数学协会编辑、出版、发行,每年出版5期,主要刊载有关大中学数学教学方面的文章,另设有问题、书评、新闻、通讯等专栏.

美国好的数学期刊的产生是有其历史和社会根源的,美国人从骨子里是不喜欢数学的,在美国著名的反对新数学运动中出版了大量诸如《为什么约翰尼不会做加法》或《害怕数学的人》之类的书,这是美国传统观念"我一点也不善于搞数学"的现代隐语.大多数人目睹严如酷吏的数学教师勒令学生拼命死记那些毫无意义、莫名其妙的东西,就会产生不正常的心理,坐失现代数学所提供的良机,矫枉需过正,这两本期刊的成功便是此理.

三、一位老译者

本书的作者是冯贝叶先生,一位老者,虽然就数学家而言还可称中青年数学家,但毕竟年近六旬.

在一本书写什么的问题解决之后,由谁来写便是一个大问题,这里面的原因并不都是水平高的不愿译(稿酬低),水平低的译不了的问题,而是有些人名气大,科研水平高但译书写书(特别是普及的书)不行,就像有些教授有水平但不会讲课一样.据中国著名文史学家朱东润(1896—1988,曾写过《历代文学作品选》和《中国文学批评史大纲》)的《自传》中讲:"沈从文第一天上课,紧张得话都说不出来,只在黑板上写上'请等我十分钟'.学生知道他的名气,就耐心等他了.十分钟过去了,沈从文还没有定神,又写'请再等五分钟',五分钟过去了,沈大作家开讲了,但始终对着黑板."朱东润感叹到:"看来,大学教授不是每一个人都当得了

的，肚子里有货也要会倒呀.”

按理说新锐们英语水平更高些为什么选择老者，中国近代新闻史与文学史的知名人物，清末民初报业和文坛激进派代表人物之一的陈冷（陈景韩）在1904年的侠客小说《刀余生传》中以极端决绝的姿态撰写了令人毛骨悚然的“杀人谱”，列出28类可杀的人，“年过五十者杀”赫然名列第三，更绝的是国学大师钱玄同年轻时曾语出惊人——“四十岁以上的人都该杀”，其后果是当他过四十岁生日时，许多文人都给他送来了挽联，以示调侃.

中国由于长期处于农业社会，靠天吃饭，所以经验丰富很重要，老人以其高寿而见多识广受到社会普遍尊重，乃至近代进入工业化时代快速掌握花样繁多日新月异的知识与技能变得重要起来，于是社会又成为老年人的坟墓，青年人的战场，儿童的天堂，老年人被边缘化已是不争事实.但即使在今天老人也有老人的优势，我们可称之为软优势.曾荣获1994年中美文学交流奖的中国当代著名文学翻译家胡允桓先生说：“现在的时代，是信仰浮躁，治学肤浅，生活浮华.”但这些多指中青年，老年人特别是老年知识分子身上没有这些毛病，他们是信仰坚定，治学严谨，生活俭朴.笔者曾到过科学史界泰斗钱临照院士和前北京师范大学校长王梓坤院士的寓所，其简陋与朴素令人吃惊，但其学术令人仰视.本书作者冯贝叶老先生也是这样一位令人尊敬的长者，以其严谨与认真赢得了读者的尊敬，冯老的《多项式与无理数》在我社出版后，读者反映内容翔实，决非应景之作，许多读者表示愿意与冯老就书中问题进行探讨，甚至有读者提出欲将其书中全部习题解答出来出版.

数学需要老年人，老年人也需要数学，有人说：素数定理逐渐成为了“最希望证明的定理”，因为证明这个定理的人被认为是不朽的，它被两个杰出的分析学家在同一年（1896年）各自独立证明了.他们并没有像古希腊传说那样变成是不朽的，但也差不多如此！Hadamard活了98岁，而de la Vallée Poussin只差一点，活了96岁（世界上最长寿的数学家可能是奥地利数学家Leopold Vietoris（1891—2002），活了111岁，他是一位代数拓扑学家，103岁时还写过一篇三角级数的文章）.

人生本来苦恼已多，能找到一种既可供消磨，又具有无限探索空间同时还具有正当性，不致被人们指责为玩物丧志的事实在不多，数学便是一个，所以说数学之于老年人不亚于化妆品之于女性，既悦己又有益于社会.

译书不易，译数学书更难，尤其高等数学，时不时会冒出一些新词，很难译准.例如：设实数集合 S 中的每个元素 x 满足不等式 $m\leqslant x\leqslant M$，其中 m,M 是固定实数，德文把 m,M 依次叫做 S 的 untere Schranke 和 Obere Schranke，吴大任和陈己同在翻译格申小丛书（Sammlung Göschen）中K·克诺普（Knopp）著的《函数论》时曾将Schranke译成“栏”，于是 m 叫“下栏”，M 叫“上栏”，但后来没能推广开来.连吴大任这等高手都有难译之处，所以可想而知冯老先生在完成此书过程中要克服的困难有多少，虽然冯先生老当益壮，乐此不疲，正像钱钟书先生在《围城》中所云：“老年人恋爱就像老房子失火一样难救.”但译完后和笔者表示暂时不接任何工作了，要好好休息一下.

四、一点老品味

一本好的题解应该是什么样？它应该能像一本小说一样的读.早在1970年就任美国匹兹堡大学史学系及社会系合聘教授的著名学者许倬云在接受李怀宇访谈时，当李怀宇问他：“后来你考台湾大学时数学考了满分？”许倬云回答说：“一百分.我拿了一本蓝皮的数学题

解，躺在草地上像看小说一样看."(李怀宇.访问历史.桂林:广西师范大学出版社,2007年,P6)

现在图书市场各种习题集充斥,多为升学之用,所选题目皆来路不明,平庸乏味且解法机械,虽可应一时之需但用后即弃之如敝履,既无欣赏玩味之内涵也无收藏传后之价值.有人说现在是一个不问对错只讲品味的时代,数学题也该如此,不求有用,但求有"味".少数人把玩的东西多半是构成品味的要素.比如现今时髦的高尔夫运动最开始并不是贵族运动,一些苏格兰的牧羊人实在耐不住与羊为伍的寂寞,就用驱羊棍将石子打进远方的兔子洞,后来这种游戏才变成西方贵族的官方运动,苏格兰议会还一度为了这项运动立法.

单墫教授在形容数学奥林匹克运动普及时爱引用刘禹锡的一句诗:"旧时王谢堂前燕,飞入寻常百姓家."

早期,少数与现代风格迥异是我为冯先生定的几条选题规则.首先要选早期期刊,甚至早过《国际最佳征解问题分析》中的那些题,题目要古典(少些花哨),解法要朴素(少些新词新定理,前东南亚数学学会会长、新加坡国立教育学院数学与数学教育系教授李秉彝曾对他那些攻读纯数学专业的学生说:"你不要用新名词,否则你的读者就少了一半,你应该考虑使用旧名词,也就是说,要用大家都听得懂的名词与对方交流."),搞得有些怀旧意味,这样可以吸引中年读者回忆起他们当年的读书时光,当然是人生中最美好的时光,中年读者最有购买力,为回忆好时光付费值得.

以前在国外看到一本海外华人写的叫做《书法误国》的书,由于价钱太高又非本行,只是简单翻看了一下没有购买,但这一结论却使人感到震惊.最近在看曾任《中国青年报》记者麦天枢(就是那位大型纪录片《大国崛起》的总策划)的一篇访谈才明白其中逻辑.麦天枢说:"为什么一个文化将社会精英一生中三分之一以上的时间和精力耗在这个(指书法)上面?而且几千年下来竟觉得非常合理,诞生了一种独特的文明,可见中国文化追求的不是进步,而是稳定.汉朝后,只有像先人一样生活,才被认为是最高境界,过去的一切都是金科玉律.那些读书人,如果不是因为书写的囚禁,而解放出有生之年三分之一以上的精力的话,会产生什么? 难以想象."

老的东西能传下来自有其道理,数学问题也是如此.英国数学史家,前 HPM(History and Pedagogy of Mathematics)主席 John Fauvel 在 *History in the Mathematics Education* 一书中把数学名题分为以下几类:不能解决的名题;仍未解决或克服了重重困难才得以解决的名题;"一题多解"的名题;推动了整个数学领域向前发展的名题;趣味性名题.布尔巴基学派的狄奥多涅在其名著《数学的建筑》一书中把数学名题分为:没有希望解决的问题;没有后代的问题;产生方法的问题;产生一般理论的问题;日渐衰落的理论问题;平淡无聊的问题.

照此种分类,本书所编译的问题可算做产生方法且有可能"一题多解"的趣味问题,所以有许多可称为名题,这与我们数学工作室的风格是相符的,除了少量严肃学术著作外,我们一直坚持此方向.据说,被引用次数最高的三部(类)英语作品是:《圣经》、莎士比亚戏剧和刘易斯·卡洛尔的《爱丽斯漫游奇境》(可见2008年7月,诺顿出版社出版的由英国开放大学数学系教授 Robin Wilson 撰写的《刘易斯·卡洛尔漫游数境:他的奇妙的、数学的、逻辑的一生》(*Lewis Carroll in Numberland: His Fantastical Mathematical Logical Life*)),其实他的真名叫查尔斯·路德维希·道奇逊,刘易斯·卡洛尔只是他发表小说时所用的笔名,他是牛津大学的老师,一位才华横溢的数学家,他的小说出名后,维多利亚女王下令说:"此人的下一本书一定给我

送过来."结果,下一本书不是小说,而是论述行列式的专著,但再下一本就是《供不眠之夜里思考的枕边益智题》.

我们心目中的理想读者应该是爱数学之人,有人说:对于低级趣味人们有着惊人的一致,而对于高雅的爱好却各有不同很难统一,所以你要想脱离迎合大众口味的低俗,就必然是曲高和寡,必然是小众图书,打个比方说以时装模特作比喻,畅销书如同女模而数学书如男模,在模特界,男模中几乎没有过 Kate Moss 这样的超模,究其原因就是因为男人不能是"纯美"一族,一个纯美的女性会成为时代偶像,并产生价值;但男人总是因为价值才产生魅力,回顾一下男装史中的 Fashion Icon 莫不如此.

一位中年策划的一个老想法在一位老先生的努力下,从两本老杂志中捞出的500余道老题,像老古董一样散发着一种老的气息,其价值一定不菲.相信我!

刘培杰

2009.5.1